ΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗΣ ΣΤΗ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ανανίας Άγγελος
Μαθηματικός MSc
Πάροδος Περιγιαλινής
85104 Κρεμαστή ΡΟΔΟΣ
aamath@otenet.gr

Πανάγος Μιχάλης
Μαθηματικός
Λεωφ. Ρόδου Καλλιθέας
85100 Κοσκινού ΡΟΔΟΣ
toaristion@yahoo.gr

Περίληψη

Η εργασία που ακολουθεί αναφέρεται στην κατασκευή ενός μαθηματικού μοντέλου από μαθητές της γ΄ λυκείου με την καθοδήγηση του διδάσκοντα. Οι μαθητές παρακολουθούν αρχικά ένα εικονικό πείραμα ελεύθερης ψύξης ενός σώματος που έχει προηγουμένως θερμανθεί. Καταγράφουν τα αποτελέσματα και από αυτά προχωρούν σε συμπεράσματα αλλά και εικασίες για τον τρόπο που μεταβάλλεται η διαφορά της θερμοκρασίας ανάμεσα στο σώμα και το περιβάλλον.

Στη συνέχεια, με την υποστήριξη του καθηγητή τους, επιχειρούν τη θεωρητική προσέγγιση του φαινομένου και τον προσδιορισμό του τύπου που δίνει το μέγεθος που μελετούν (μοντελοποίηση). Τέλος, συγκρίνουν τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τη χρήση της συνάρτησης που βρήκαν με τα πειραματικά δεδομένα και αποφασίζουν κατά πόσο το μοντέλο τους είναι ικανοποιητικό και ποιες είναι οι δυνατότητες γενίκευσής του.

Εισαγωγή

Μαθηματικό μοντέλο είναι η περιγραφή ενός συστήματος ή μιας διαδικασίας χρησιμοποιώντας μαθηματικές έννοιες και σύμβολα. Η διαδικασία ανάπτυξης ενός μαθηματικού μοντέλου ονομάζεται μαθηματική μοντελοποίηση.

Τα μαθηματικά μοντέλα χρησιμοποιούνται στη φυσική, τη βιολογία, τη σεισμολογία, τη μετεωρολογία, την επιστήμη υπολογιστών (τεχνητή νοημοσύνη) αλλά έχουν και μεγάλο πλήθος εφαρμογών στην οικονομία, τη ψυχολογία, την κοινωνιολογία και τις πολιτικές επιστήμες.

Εξασκώντας καθημερινά τη διδασκαλία των Μαθηματικών, διαπιστώσαμε ότι το ενδιαφέρον των μαθητών αυξάνεται όποτε γίνεται αναφορά σε κάποια από τις εφαρμογές της θεωρίας. Αποφασίσαμε λοιπόν να τους βοηθήσουμε να γνωρίσουν τη διαδικασία της μαθηματικής μοντελοποίησης, στηριζόμενοι, όσο είναι δυνατόν, στις γνώσεις τους.

Επιλέξαμε μία φυσική διαδικασία, τη διαδικασία της ελεύθερης ψύξης ενός σώματος, της οποίας η εξέλιξη ακολουθεί την εκθετική μεταβολή. Αυτό έγινε γιατί η πρώτη γνωριμία των μαθητών με την εκθετική συνάρτηση συνοδεύεται από το «νόμο της εκθετικής μεταβολής» και την περιγραφή με τη βοήθειά του, φυσικών φαινομένων όπως η εκθετική μείωση της ποσότητας ραδιενεργών ουσιών. Η αυθαίρετη παρουσίαση αυτής της συνάρτησης στη β΄ λυκείου ίσως αποτελεί επιπλέον κίνητρο αφού το αίσθημα αποκατάστασης της εύλογης απορίας των μαθητών γίνεται εντονότερο.

Η ανάπτυξη του μοντέλου που παρουσιάζουμε μπορεί να γίνει αμέσως μετά τη διδασκαλία των συνεπειών του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού στη γ΄ λυκείου. Είναι βέβαια απαραίτητο οι μαθητές να έχουν εξασκηθεί στο να βρίσκουν τον τύπο μιας συνάρτησης από εξισώσεις που συνδέουν τη συνάρτηση με την παράγωγό της.

Το θεωρητικό υπόβαθρο της εργασίας μας είναι το ελάχιστο που χρειάζεται κάποιος διδάσκων ή μαθητής για να συμμετάσχει σε μία παρόμοια διαδικασία. Έτσι, μετά από σκέψη, αποφασίσαμε να παραμείνει απλό… όσο η χαρά της δημιουργίας.

Θεωρητικό υπόβαθρο

Όταν ένα σώμα θερμαίνεται και αποκτήσει θερμοκρασία υψηλότερη από το περιβάλλον του, αποβάλλει ενέργεια με τη μορφή θερμότητας. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τη μείωση της θερμοκρασίας του σώματος και τη σταδιακή εξίσωσή της με τη θερμοκρασία του περιβάλλοντος. Αν m η μάζα του σώματος και c η ειδική θερμότητα του υλικού, δηλαδή η θερμότητα που εκλύει ένα γραμμάριο του σώματος για να ψυχθεί κατά 1 ^{o}C, τότε η θερμότητα που εκλύει ένα σώμα κατά τη ψύξη δίνεται από τη σχέση

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta T$$

όπου ΔT η διαφορά θερμοκρασίας του σώματος ανάμεσα σε δύο χρονικές στιγμές.

Ακόμα είναι χρήσιμο να τονίσουμε ότι ο ρυθμός απώλειας θερμότητας κατά τη ψύξη, σε ένα σώμα, είναι ανάλογος με τη διαφορά θερμοκρασίας ανάμεσα στο σώμα και το περιβάλλον, πρόταση που αποτελεί και το νόμο του Newton για την ψύξη. Δηλαδή όσο μεγαλύτερη είναι η διαφορά της θερμοκρασίας του σώματος από το περιβάλλον του, τόσο πιο γρήγορα αυτό ψύχεται.

Από τα μαθηματικά μας εφόδια, δε θα μπορούσε να λείπει ο ορισμός της παραγώγου (αντιγραφή από το σχολικό βιβλίο ΟΕΔΒ Γ΄ Τάξης Ενιαίου

Λυκείου – Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης – Ανδρεαδάκης, Κατσαργύρης, Μέτης, Μπρουχούτας, Παπασταυρίδης, Πολύζος). Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

Ακόμα χρειαζόμαστε και παίρνουμε από την ίδια πηγή το θεώρημα: Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

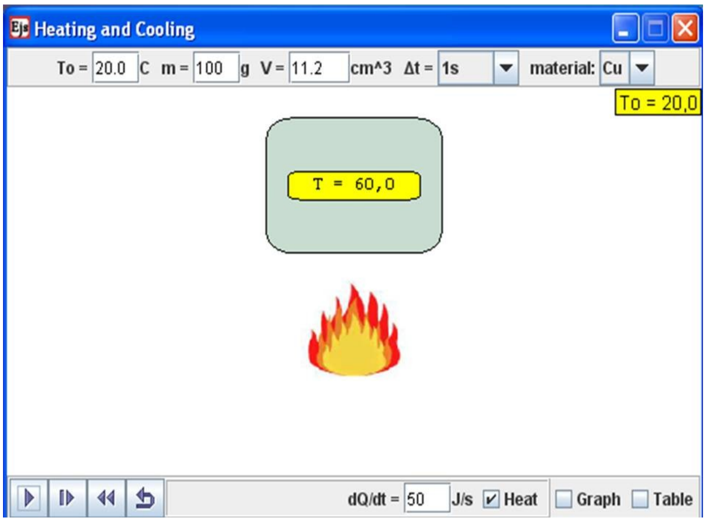
- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το Δ.

Το πείραμα

Χρησιμοποιήσαμε το EJS_4.3.4, ένα applet της Java που βρίσκεται ελεύθερο στο διαδίκτυο. Ανήκει στην κατηγορία των εικονικών εργαστηρίων, δίνει αξιόπιστα αποτελέσματα και περιέχει πειράματα που μπορούν να πραγματοποιηθούν εύκολα στην τάξη.

Κατά το πείραμα αυτό, μία μεταλλική πλάκα χαλκού θερμαίνεται έως τη θερμοκρασία των 60 ^{o}C περίπου (σχήμα 1), ενώ η θερμοκρασία του περιβάλλοντος είναι σταθερή και ίση με 20 ^{o}C.



σχήμα 1

Κατόπιν το σώμα αφήνεται να ψυχθεί ελεύθερα και καταγράφονται οι τιμές της θερμοκρασίας του ανά 10 δευτερόλεπτα (σχήμα 2).

Temperature Table

#	T(t)
0	59,09
10	48,62
20	40,95
30	35,33
40	31,22
50	28,22
60	26,01
70	24,40
80	23,22
90	22,36
100	21,73
110	21,26
120	20,93
130	20,68
140	20,50
150	20,36
160	20,27
170	20,19
180	20,14

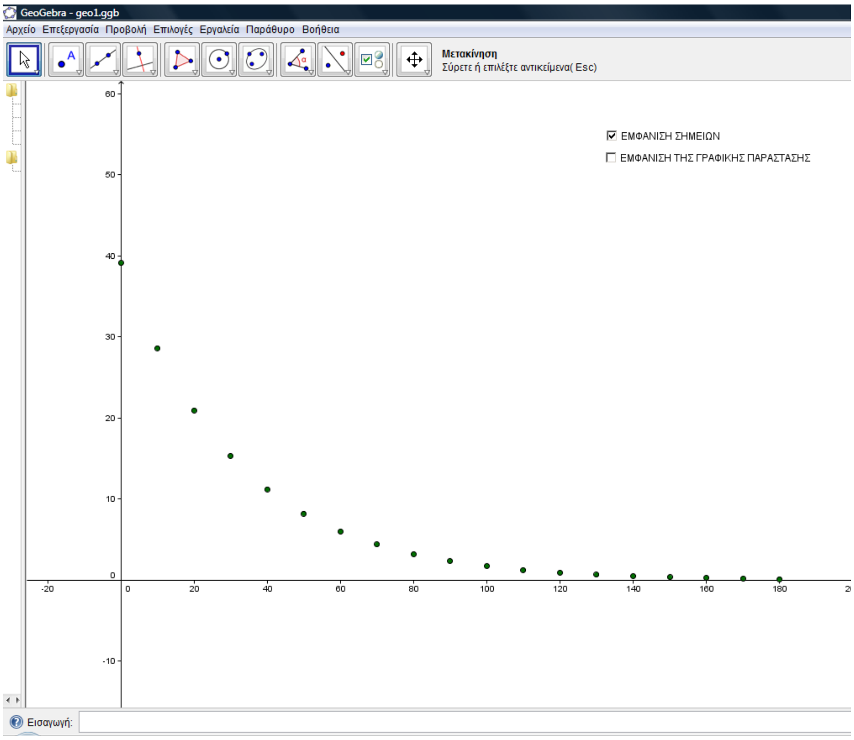
σχήμα 2

Από τον προηγούμενο πίνακα οι μαθητές παρατήρησαν εύκολα ότι η θερμοκρασία μειώνεται αρχικά με μεγαλύτερο ρυθμό από ότι στη συνέχεια. Όσο περνάει ο χρόνος η θερμοκρασία συνεχίζει να μειώνεται αλλά με μικρότερο ρυθμό. Τους ενθαρρύναμε να καταγράψουν τη διαφορά της θερμοκρασίας του σώματος από το περιβάλλον και να παρατηρήσουν ότι η συμπεριφορά της είναι η ίδια. Κατασκεύασαν έτσι τον πίνακα που ακολουθεί.

t	T(t)	f(t)=T(t)-Τπερ
0	59,09	39,09
10	48,62	28,62
20	40,95	20,95
30	35,33	15,33
40	31,22	11,22
50	28,22	8,22
60	26,01	6,01
70	24,4	4,4
80	23,22	3,22
90	22,36	2,36
100	21,73	1,73
110	21,26	1,26
120	20,93	0,93
130	20,68	0,68
140	20,5	0,5
150	20,36	0,36
160	20,27	0,27
170	20,19	0,19
180	20,14	0,14

σχήμα 3

Εδώ προτείναμε στους μαθητές να προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε τον τύπο της συνάρτησης f, της διαφοράς δηλαδή της θερμοκρασίας του σώματος από το περιβάλλον. Αν και θα ήταν ενδιαφέρων να βρίσκαμε τη συνάρτηση T της θερμοκρασίας του σώματος, συμφωνήσαμε πως είναι ουσιαστικά το ίδιο αφού οι δύο συναρτήσεις διαφέρουν κατά μία σταθερά, τη θερμοκρασία του περιβάλλοντος. Για την καλύτερη αντίληψη του φαινομένου χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό Geogebra και έγινε η γραφική παράσταση των αποτελεσμάτων του πειράματος όπως φαίνεται στο σχήμα 4.



σχήμα 4

Στο σημείο αυτό ζητήθηκε από τους μαθητές να εκτιμήσουν το είδος της συνάρτησης που θα μπορούσε να παρουσιάζει ανάλογη συμπεριφορά. Η εκθετική συνάρτηση ήταν η κύρια διαπίστωση με την υπερβολή να μειοψηφεί χωρίς να αναφερθεί κάποια, διαφορετική από αυτές, γνώμη.

Επειδή υπήρχε διάχυτη η εντύπωση στους μαθητές ότι ο ρυθμός μεταβολής της f είναι αρχικά μεγάλος ενώ με την πάροδο του χρόνου ελαττώνεται, τους θυμίσαμε ότι ο ρυθμός μεταβολής ενός μεγέθους, είναι η παράγωγος του μεγέθους και τους ρωτήσαμε αν θα μπορούσαμε προσεγγιστικά, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του πειράματος να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης f σε κάποιες χρονικές στιγμές. Η απάντησή τους ήταν μάλλον αρνητική κι εμείς αποφασίσαμε να επαναλάβουμε το πείραμα παίρνοντας τιμές της θερμοκρασίας του σώματος κατά τη ψύξη ανά 1 δευτερόλεπτο. Προέκυψε έτσι ο παρακάτω πίνακας:

Temperature

#	T(t)
0	59,16
1	57,96
2	56,80
3	55,67
4	54,57
5	53,51
6	52,48
7	51,48
8	50,51
9	49,58
10	48,67
11	47,79
12	46,94
13	46,11
14	45,31
15	44,53
16	43,78
17	43,05
18	42,34
19	41,65
20	40,99
21	40,34
22	39,72
23	39,11
24	38,52
25	37,96
26	37,40
27	36,87
28	36,35
29	35,85

σχήμα 5

Από τον πίνακα του σχήματος 5, προσπαθώντας να εκτιμήσουμε τη διαφορά των τιμών της f, σε μικρές μεταβολές των τιμών του χρόνου για να προσεγγίσουμε με τον λόγο τους την παράγωγο της f, αφού

$f'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f(t_0)}{\Delta t}$, επιλέξαμε τις τιμές

t	0	1	10	11	20	21	30	31	40	41
f(t)	39,16	37,96	28,67	27,79	20,99	20,34	15,36	14,89	11,25	10,90
f'(t)	-1,20		-0,88		-0,65		-0,47		-0,35	

σχήμα 6

υπολογίσαμε στη συνέχεια τους λόγους των τιμών της f' προς τις τιμές της f και έγινε φανερό ότι

$$\frac{f'(0)}{f(0)} \cong \frac{f'(10)}{f(10)} \cong \frac{f'(20)}{f(20)} \cong \frac{f'(30)}{f(30)} \cong \frac{f'(40)}{f(40)} \cong 0,031$$

Δηλαδή μάλλον επιβεβαιώνεται η υποψία μας ότι ο ρυθμός μεταβολής της διαφοράς της θερμοκρασίας του σώματος από το περιβάλλον f΄, είναι ανάλογος με τη διαφορά αυτή f. Οδηγούμαστε έτσι σε μία σχέση της μορφής $f'(t) = \kappa \cdot f(t)$, $\kappa \in \mathbb{R}$ από την οποία πολλοί μαθητές θα μπορούσαν να βρουν τη συνάρτηση f βοηθούμενοι και από τα δεδομένα.

Πόσο ακριβή όμως είναι αυτά που παρατηρούμε; Πως μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι το φαινόμενο εξελίσσεται έτσι όπως νομίζουμε; Για να ισχυριζόμαστε αδιαμφισβήτητα όλα τα παραπάνω, είναι απαραίτητη η συνέχεια.

Μοντελοποίηση

Αν $T_{\pi\varepsilon\rho}$ η σταθερή θερμοκρασία του περιβάλλοντος και T(t) η θερμοκρασία του σώματος μία χρονική στιγμή t, η συνάρτηση που επιθυμούμε να προσδιορίσουμε, είναι η f που μας δίνει τη διαφορά της θερμοκρασίας του σώματος από το περιβάλλον μια χρονική στιγμή t. Δηλαδή:

$$f(t) = T(t) - T_{\pi\varepsilon\rho}, \ t \geq 0 \qquad (1)$$

Προσπαθούμε να βρούμε μία συνάρτηση με ομαλή συμπεριφορά ώστε να είναι εύκολο να μελετηθεί και να εξαχθούν από αυτή συμπεράσματα για την εξέλιξη του φαινομένου. Θεωρούμε κατά συνέπεια ότι η συνάρτηση f, άρα και η T, είναι παραγωγίσιμες.

Ένα σώμα κατά τη ψύξη, αποβάλλει θερμότητα Q. Γνωρίζουμε από τη φυσική ότι η θερμότητα που έχει εκλυθεί από το σώμα μέχρι μία χρονική στιγμή t δίνεται από τη σχέση:

$$Q(t) = m \cdot c \cdot \left(T(t) - T(0)\right),\ t \geq 0 \qquad (2)$$

όπου m η μάζα του σώματος και c η ειδική θερμότητα του υλικού (η θερμότητα που εκλύει ένα γραμμάριο του σώματος για να ψυχθεί κατά $1\,^{o}C$). Αυτά στο πείραμά μας είναι σταθερά, έτσι μπορούμε να γράψουμε:

$$Q(t) = \alpha \cdot \left(T(t) - T(0)\right),\ \alpha \in \mathbb{R}^*. \qquad (3)$$

Σύμφωνα με το νόμο της ψύξης του Newton, ο ρυθμός απώλειας θερμότητας σε ένα σώμα, είναι ανάλογος με τη διαφορά θερμοκρασίας ανάμεσα στο σώμα και το περιβάλλον. Στη γλώσσα των Μαθηματικών αυτό γράφεται:

$$Q'(t) = \beta \cdot \left(T(t) - T_{\pi\varepsilon\rho}\right) \Leftrightarrow Q'(t) = \beta \cdot f(t),\ \beta \in \mathbb{R}. \qquad (4)$$

Παραγωγίζοντας τα δύο μέλη της (3) παίρνουμε:

$$Q'(t) = \alpha \cdot T'(t) \qquad (5).$$

Ομοίως η (1) μας δίνει: $f'(t) = T'(t)$ οπότε η (5) γίνεται:

$$Q'(t) = \alpha \cdot f'(t) \qquad (6).$$

Από τις (4) και (6) προκύπτει:

$$\alpha \cdot f'(t) = \beta \cdot f(t) \Leftrightarrow f'(t) = \kappa \cdot f(t),\ \beta \in \mathbb{R} \qquad (7)$$

Η τελευταία σχέση μας δίνει αυτό που είχαμε παρατηρήσει και πειραματικά: ο ρυθμός μεταβολής της διαφοράς θερμοκρασίας είναι ανάλογος με αυτήν. Δηλαδή όσο πιο μεγάλη είναι η διαφορά θερμοκρασίας του σώματος από το περιβάλλον, τόσο πιο γρήγορα αυτή ελαττώνεται. Από τη σχέση (7), έχουμε:

$$f'(t)-\kappa\cdot f(t)=0 \Leftrightarrow e^{-\kappa t}\cdot f'(t)-\kappa e^{-\kappa t}\cdot f(t)=0 \Leftrightarrow \left(e^{-\kappa t}\cdot f(t)\right)'=0.$$

Οπότε, από γνωστό θεώρημα:

$$e^{-\kappa t}\cdot f(t)=\lambda \Leftrightarrow f(t)=\lambda\cdot e^{\kappa t},\ \lambda\in\mathbb{R}. \qquad (8)$$

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα του σχήματος 3, έχουμε:

$$f(0)=39,09 \text{ οπότε } \lambda=39,09.$$

Ακόμα:

$$f(10)=28,62 \Leftrightarrow 39,09\cdot e^{10\kappa}=28,62 \Leftrightarrow e^{10\kappa}=\frac{28,62}{39,09} \Leftrightarrow 10\kappa=\ell n0,732$$

έτσι

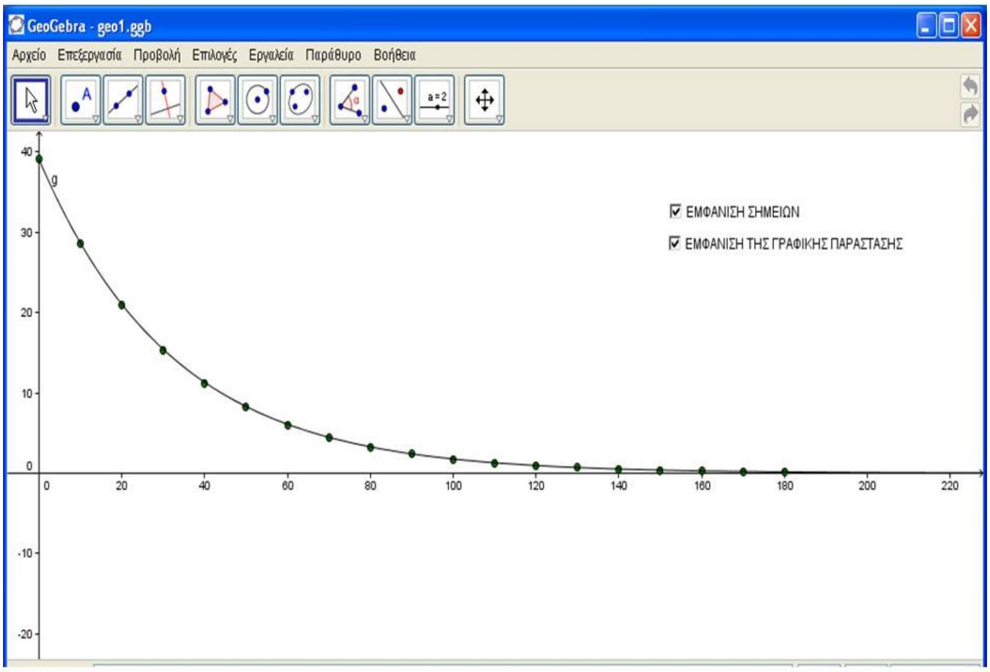
$$\kappa=-0,031.$$

Η συνάρτηση λοιπόν που ζητούσαμε είναι η

$$f(t)=39,09\cdot e^{-0,031\cdot t},\ t\geq 0 \qquad (9)$$

Η σύγκριση

Ακόμα και αν δεν ήταν απαραίτητο από τις βασικές αρχές της μοντελοποίησης, η περιέργεια όλων μας – διδασκόντων και μαθητών – επέβαλε τη σύγκριση των αποτελεσμάτων του πειράματος με τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τη «δική μας» συνάρτηση.



σχήμα 7

Το αποτέλεσμα, όπως φαίνεται στο σχήμα 7, ήταν αρχικά εντυπωσιακό. Μόνο με τη χρήση της μεγέθυνσης, δυνατότητα που προσφέρει το πρόγραμμα που χρησιμοποιήσαμε, έγινε αντιληπτό ότι η καμπύλη δε διέρχεται από όλα τα σημεία που πήραμε από το εικονικό πείραμα. Οι μικρές διαφορές που παρατηρήθηκαν, αποδόθηκαν σε στρογγυλοποιήσεις κατά τη χρήση των δεδομένων. Η ικανοποιητική πιστότητα του μοντέλου μας θεωρήσαμε ότι οφείλεται κατά μεγάλο μέρος στο ότι το πείραμά μας ήταν εικονικό και αποφεύχθηκαν έτσι λάθη κατά τη μέτρηση και άλλοι απρόβλεπτοι παράγοντες.

Επίκληση στην αυθεντία

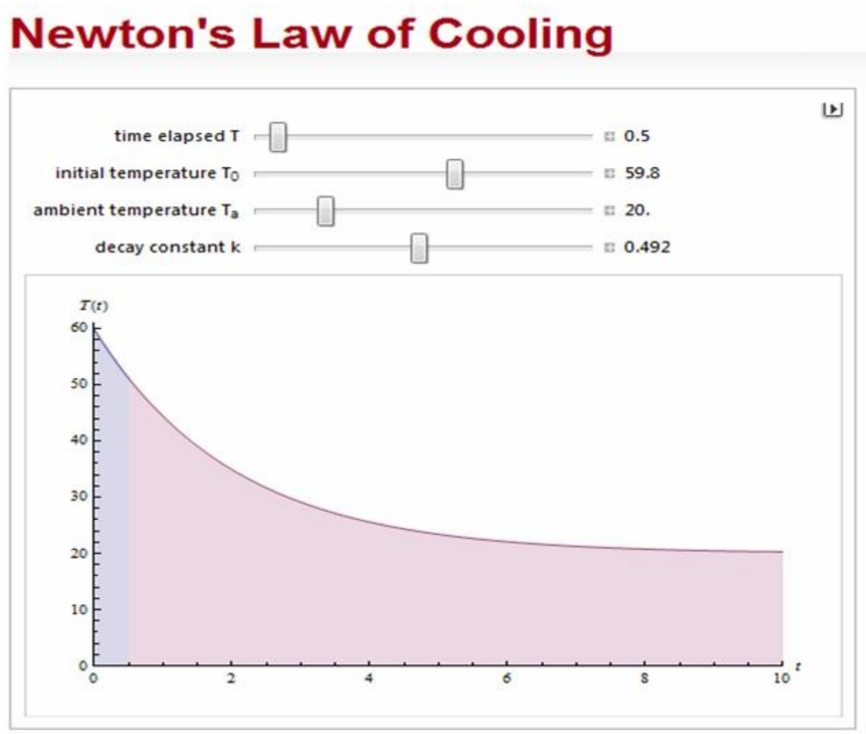
Όπως έχουμε αναφέρει, η θερμοκρασία του σώματος είναι εύκολο πια να υπολογιστεί και δίνεται από τη σχέση

$$T(t) = 20 + 39,09 \cdot e^{-0,031 \cdot t},\ t \geq 0 \qquad (10)$$

Στο σημείο αυτό παρουσιάσαμε από τη διεύθυνση

http://demonstrations.wolfram.com/NewtonsLawOfCooling/

που είναι επίσημη ιστοσελίδα του έγκυρου και διεθνώς αναγνωρισμένου προγράμματος Mathematica, μια περιγραφή του φαινομένου της ελεύθερης ψύξης και γραφική παράσταση της θερμοκρασίας, στοιχεία που ενίσχυαν την πεποίθηση για την ορθότητα του μοντέλου που κατασκευάσαμε.



σχήμα 8

Τα συμπεράσματα

Ερευνητικά δε μπορούμε να μην παρατηρήσουμε ότι οι μαθητές δυσκολεύτηκαν λίγο να μεταφράσουν την έκφραση «ρυθμός μεταβολής» ως τη παράγωγο της συνάρτησης. Δεν κατάφεραν να διατυπώσουν την έκφραση «ο ρυθμός μεταβολής είναι ανάλογος με το μέγεθος» με τη σχέση $f'(t) = \kappa \cdot f(t)$, παρόλο που όταν την χρησιμοποιούσαν φαινόταν να καταλαβαίνουν τι λένε. Ακόμα παρουσιάστηκε αδυναμία στην προσέγγιση της παραγώγου με τον λόγο $\frac{\Delta f(t)}{\Delta t}$, για μικρές τιμές του Δt, ενώ όλοι γνώριζαν τον ορισμό της παραγώγου. Όλα τα παραπάνω θέματα θα μπορούσαν να αποτελέσουν την αρχή μιας νέας εργασίας.

Από μαθηματική άποψη, έγινε αντιληπτό ότι η σχέση $f'(t) = \kappa \cdot f(t)$, στην οποία καταλήξαμε χρησιμοποιώντας τα πειραματικά δεδομένα αλλά και ανεξάρτητα χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις γνώσεις φυσικής, ήταν καθοριστική για την εύρεση του τύπου της συνάρτησης που ζητούσαμε. Ήταν επόμενο λοιπόν να διατυπώσουμε το συμπέρασμα ότι όταν ο ρυθμός μεταβολής ενός μεγέθους, είναι ανάλογος με το μέγεθος, τότε το μέγεθος αυτό μεταβάλλεται εκθετικά κάτι που ήταν άλλωστε και η κοινή αίσθηση ανάμεσα στους συμμετέχοντες.

Εκπαιδευτικά κρίνοντας, ο ενθουσιασμός των μαθητών και το δεδηλωμένο εθελοντικό ενδιαφέρον τους, έκαναν τη διαδικασία της μοντελοποίησης στην τάξη που περιγράψαμε να μοιάζει περισσότερο με εκδρομή παρά με μάθημα.

Abstract

The interest of the students increases every time the teacher refers to an application of the theory. Thus we decide to help them familiarize with the procedure of mathematical modeling, supported by their own knowledge.

The present project attends to describe students' reactions, their abilities and their possible misapprehensions. Our effort focuses to stir their interest about Mathematics and to examine the usefulness of repetition of similar processes.

Βιβλιογραφία

- Logan D. J., Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1999.
- Malkevitch J. και άλλοι, επιμέλεια ελληνικής έκδοσης: Παπασταυρίδης Σ., Τα Σύγχρονα Μαθηματικά στη ζωή μας, τόμος 1, 2, W. H. Freeman & Co – Γιαλλέλης Μανωλάκης, 1990.
- Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Μέτης Σ., Μπρουχούτας Κ., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ., Μαθηματικά Γ΄ Τάξης Ενιαίου Λυκείου Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνσης, έκδοση γ΄, Ο.Ε.Δ.Β., Αθήνα 2001.
- Δάσιος Γ., Κυριάκη Κ., Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις, Αθήνα 1994.
- Δάσιος Γ., Δέκα Διαλέξεις Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2001.
- Πατρώνης Τ., Ρίζος Γ., Η «φύση» γεννάει γρήγορα – Εκθετικές συναρτήσεις, εκθετικοί νόμοι μεταβολής και οι εικόνες τους σε μαθητές και φοιτητές, πρακτικά 26ου Πανελληνίου συνεδρίου Ε.Μ.Ε., 2009.

- Τραχανάς Σ., Mathematica και Εφαρμογές, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2004.
- Τραχανάς Σ., Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2004.
- Τραχανάς Σ., Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2004.
- Χουστουλάκης Μ., Κρητικός Μ., Αξιοποιώντας μοντέλα προσομοίωσης στη διδασκαλία των οικονομικών μαθημάτων στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, πρακτικά 26ου Πανελληνίου συνεδρίου Ε.Μ.Ε., 2009.

Χρήσιμες διευθύνσεις

- http://amrita.vlab.co.in/?sub=1&brch=194&sim=354&cnt=4
- http://demonstrations.wolfram.com/NewtonsLawOfCooling/
- www.eng.ucy.ac.cy/aprodromou/courses/mmk312/.../**MMK312_L1**.pdf
- www.**met**al.ntua.gr/uploads/3277/248/**Ph-Met-II-1**.pdf
- http://users.auth.gr/users/8/9/019898/GENIKHS %20EPILOGHS/EDUTECH/html/psiksi_ygrou.htm