

### §3.1-3.6

1. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και οι διχοτόμοι του  $B\Delta$  και  $\Gamma E$ . Αν  $E\text{H} \perp B\Gamma$  και  $\Delta Z \perp B\Gamma$ , να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα  $B\Gamma\Delta$  και  $\Gamma B E$  είναι ίσα. (Μονάδες 13)  
β)  $E\text{H} = \Delta Z$  (Μονάδες 12)

2. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και τα ύψη του  $B\Delta$  και  $\Gamma E$ . Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα  $B\Delta\Gamma$  και  $\Gamma E B$  είναι ίσα. (Μονάδες 15)  
β)  $A\Delta = A E$  (Μονάδες 10)

3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και το μέσο  $M$  της βάσης του  $B\Gamma$ . Φέρουμε τις αποστάσεις  $M\text{K}$  και  $M\Lambda$  του σημείου  $M$  από τις ίσες πλευρές του τριγώνου. Να αποδείξετε ότι:

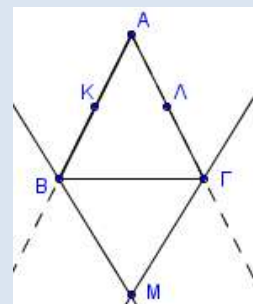
- α)  $M\text{K} = M\Lambda$  (Μονάδες 13)  
β) Η  $A M$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\text{K}M\Lambda$ . (Μονάδες 12)

4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ . Από το μέσο  $M$  της βάσης του  $B\Gamma$  φέρουμε κάθετα τμήματα  $M\Delta$  και  $M E$  στις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α)  $M\Delta = M E$  (Μονάδες 12)  
β) το τρίγωνο  $A\Delta E$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)

5. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ . Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών  $B$  και  $\Gamma$  τέμνονται στο σημείο  $M$  και  $\text{K}, \Lambda$  είναι αντίστοιχα τα μέσα των  $AB$  και  $A\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο  $B M \Gamma$  είναι ισοσκελές με  $M B = M \Gamma$ . (Μονάδες 12)  
β)  $M\text{K} = M\Lambda$  (Μονάδες 13)



6. Έστω δύο ισοσκελή τρίγωνα  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και  $A'B'\Gamma'$  ( $A'B' = A'\Gamma'$ ).

- α) Να αποδείξετε ότι αν ισχύει  $AB = A'B'$  και  $A = A'$ , τότε τα τρίγωνα είναι ίσα. (Μονάδες 13)  
β) Να αποδείξετε ότι αν ισχύει  $A\Gamma = A'\Gamma'$  και  $B = B'$ , τότε τα τρίγωνα είναι ίσα. (Μονάδες 12)

7. Θεωρούμε τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα ύψη του  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  που αντιστοιχούν στις πλευρές του  $A\Gamma$  και  $AB$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) Αν το τρίγωνο είναι ισοσκελές με  $AB = A\Gamma$ , τότε τα ύψη  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  είναι ίσα. (Μονάδες 12)  
β) Αν τα ύψη  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  είναι ίσα, τότε το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $AB = A\Gamma$ . (Μονάδες 13)

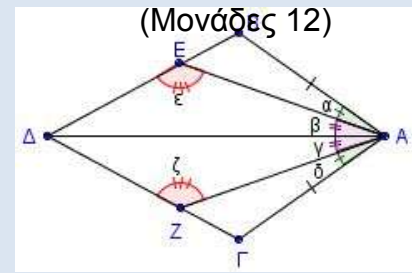
8. Σε οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  προεκτείνουμε τη διάμεσο  $A M$  (προς το  $M$ ) κατά ίσο τμήμα  $M\Delta$ . Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα  $A B M$  και  $M \Gamma \Delta$  είναι ίσα. (Μονάδες 12)  
β) Τα σημεία  $A$  και  $\Delta$  ισαπέχουν από την πλευρά  $B\Gamma$ . (Μονάδες 13)

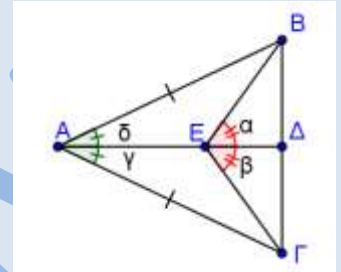
9. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $A = 90^\circ$ ) και  $B\Delta$  η διχοτόμος της γωνίας  $B$ . Από το  $\Delta$  φέρουμε  $\Delta E \perp B\Gamma$  και έστω  $Z$  το σημείο στο οποίο η ευθεία  $E\Delta$  τέμνει την προέκταση της  $B A$  (προς το  $A$ ). Να αποδείξετε ότι:

- α)  $A B = B E$  (Μονάδες 13)  
β) Τα τρίγωνα  $A B \Gamma$  και  $Z E B$  είναι ίσα.

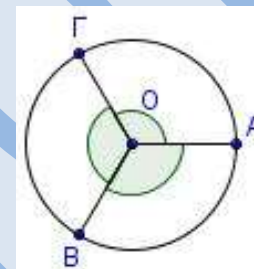
10. Στο διπλανό σχήμα είναι  $\alpha = \delta$ ,  $\beta = \gamma$  και  $AB = AG$ , να αποδείξετε ότι:  
 α) Τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $A\Gamma\Delta$  είναι ίσα. (Μονάδες 12)  
 β) Οι γωνίες  $\epsilon$  και  $\zeta$  είναι ίσες. (Μονάδες 13)



11. Αν για το ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) του σχήματος ισχύουν  $\alpha = \hat{\beta}$  και  $\gamma = \delta$ , να γράψετε μια απόδειξη για καθέναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς:  
 α) Τα τρίγωνα  $AEB$  και  $AEG$  είναι ίσα. (Μονάδες 8)  
 β) Το τρίγωνο  $\Gamma EB$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)  
 γ) Η ευθεία  $A\Delta$  είναι μεσοκάθετος του τμήματος  $B\Gamma$ . (Μονάδες 9)



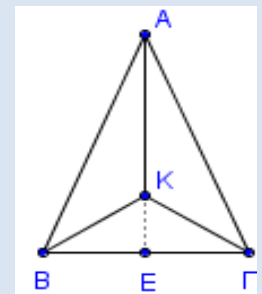
12. Σε κύκλο κέντρου  $O$  θεωρούμε τρεις ίσες διαδοχικές γωνίες  $AOB$ ,  $BO\Gamma$  και  $GOA$ .  
 α) Να αποδείξετε ότι η προέκταση της ακτίνας  $AO$  διχοτομεί τη  $BO\Gamma$ . (Μονάδες 10)  
 β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου  $AB\Gamma$  ως προς τις πλευρές του.  
 γ) Αν με κέντρο το  $O$  και ακτίνα  $OK$  όπου  $K$  το μέσο της ακτίνας γράψουμε έναν άλλο κύκλο που θα τέμνει τις  $OB$ ,  $O\Gamma$  στα σημεία αντίστοιχα, τότε τα τόξα  $KM$  και  $AB$  είναι ίσα; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



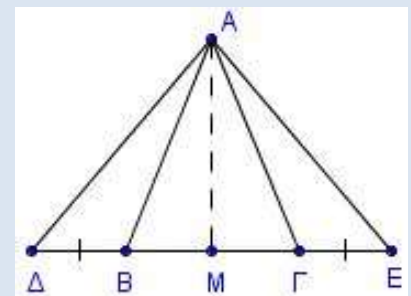
$AOB$ ,  
 γωνία  
 $OA$ ,  
 $\Lambda$  και  $M$

(Μονάδες 7)

13. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και  $K$  εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο, ώστε  $KB = K\Gamma$ .  
 α) Να αποδείξετε ότι: τα τρίγωνα  $BAK$  και  $KA\Gamma$  είναι ίσα. (Μονάδες 12)  
 β) Να αποδείξετε ότι η  $AK$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $BA\Gamma$ . (Μονάδες 6)  
 γ) Η προέκταση της  $AK$  τέμνει την  $B\Gamma$  στο  $E$ . Να αποδείξετε ότι η  $KE$  είναι διάμεσος του τριγώνου  $BK\Gamma$ . (Μονάδες 7)



14. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ . Στην προέκταση της πλευράς  $B\Gamma$  και προς τα δύο της άκρα, θεωρούμε σημεία  $\Delta$  και  $E$  αντίστοιχα έτσι ώστε  $B\Delta = \Gamma E$ . Να αποδείξετε ότι:  
 α)  $B_{\epsilon\zeta} = \Gamma_{\epsilon\zeta}$  (Μονάδες 6)  
 β) Τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $A\Gamma E$  είναι ίσα. (Μονάδες 12)  
 γ) Η διάμεσος  $AM$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι και διάμεσος του τριγώνου  $A\Delta E$ . (Μονάδες 7)



15. Στις προεκτάσεις των πλευρών  $BA$  και  $\Gamma A$  τριγώνου  $AB\Gamma$ , παίρνουμε τα τμήματα  $A\Delta = AB$  και  $A E = A\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:  
 α) Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A\Delta E$  είναι ίσα. (Μονάδες 12)  
 β) Αν  $AM$  είναι η διάμεσος του τριγώνου  $AB\Gamma$  και η προέκταση της  $AM$  τέμνει την  $E\Delta$  στο  $Z$ , να δείξετε ότι:  
 i. Τα τρίγωνα  $A\Delta Z$  και  $ABM$  είναι ίσα. (Μονάδες 7)  
 ii.  $Z\Delta = \frac{E\Delta}{2}$ . (Μονάδες 6)

**16.** Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και σημείο  $M$  εσωτερικό του τριγώνου τέτοιο, ώστε  $MB = M\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα  $BAM$  και  $MA\Gamma$  είναι ίσα.  
 β) Η  $AM$  είναι διχοτομεί τη γωνία  $BM\Gamma$ .

(Μονάδες 12)  
 (Μονάδες 13)

**17.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και στις ίσες πλευρές  $AB$ ,  $A\Gamma$  παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα  $AD = \frac{1}{3}AB$  και  $AE = \frac{1}{3}A\Gamma$ . Αν  $M$  είναι το μέσο της  $B\Gamma$ , να αποδείξετε ότι:

- α) τα τμήματα  $BD$  και  $GE$  είναι ίσα.  
 β) τα τρίγωνα  $BDM$  και  $ME\Gamma$  είναι ίσα.  
 γ) το τρίγωνο  $DEM$  είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 5)  
 (Μονάδες 10)  
 (Μονάδες 10)

**18.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $KAB$  ( $KA = KB$ ) και  $K\Gamma$  διχοτόμος της γωνίας  $\hat{K}$ . Στην προέκταση της  $BA$  (προς το  $A$ ) παίρνουμε σημείο  $\Lambda$  και στην προέκταση της  $AB$  (προς το  $B$ ) παίρνουμε σημείο  $M$ , έτσι ώστε  $\Lambda M = BM$ . Να αποδείξετε ότι:

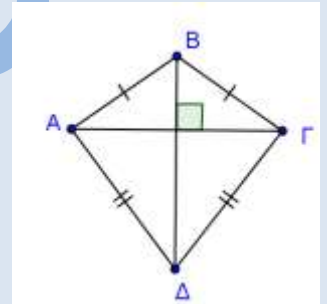
- α) το τρίγωνο  $K\Lambda M$  είναι ισοσκελές.  
 β) η  $K\Gamma$  είναι διάμεσος του τριγώνου  $K\Lambda M$

(Μονάδες 12)  
 (Μονάδες 13)

**19.** Δίνεται τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  με  $BA = B\Gamma$  και  $\Delta A = \Delta\Gamma$ . Οι διαγώνιοι  $A\Gamma$ ,  $B\Delta$  του τετράπλευρου είναι ίσες και τέμνονται κάθετα. Να αποδείξετε ότι:

- α) Η  $B\Delta$  είναι διχοτόμος των γωνιών  $B$  και  $\Delta$  του τετράπλευρου  $AB\Gamma\Delta$ .  
 β) Η  $B\Delta$  είναι μεσοκάθετος του τμήματος  $A\Gamma$ .

(Μονάδες 12)  
 (Μονάδες 13)



**20.** Δίνεται γωνία  $xOy$  και η διχοτόμος της  $O\delta$ . Θεωρούμε σημείο  $M$  της  $O\delta$  και σημεία  $A$  και  $B$  στις ημιευθείες  $Ox$  και  $Oy$  αντίστοιχα, τέτοια, ώστε  $OA = OB$ . Να αποδείξετε ότι:

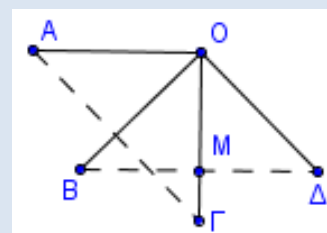
- α)  $MA = MB$   
 β) Η  $O\delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $AMB$ .

(Μονάδες 15)  
 (Μονάδες 10)

**21.** Αν  $\angle AOB = \angle BO\Gamma = \angle \Gamma O\Delta$  και  $OA = OB = O\Gamma = O\Delta$ , να αποδείξετε ότι:

- α)  $A\Gamma = B\Delta$   
 β) το  $M$  είναι μέσο του  $B\Delta$ , όπου  $M$  το σημείο τομής των τμημάτων  $O\Gamma$  και  $B\Delta$ .

(Μονάδες 10)  
 (Μονάδες 15)



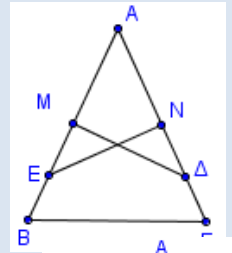
**22.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ . Στις προεκτάσεις των πλευρών  $BA$  και  $\Gamma A$  (προς το  $A$ ) θεωρούμε τα σημεία  $E$  και  $\Delta$  αντίστοιχα τέτοια, ώστε  $A\Delta = AE$ . Να αποδείξετε ότι:

- α)  $BE = \Gamma\Delta$   
 β)  $B\Delta = \Gamma E$   
 γ)  $\Delta B\Gamma = E\Gamma B$

(Μονάδες 6)  
 (Μονάδες 10)  
 (Μονάδες 9)

**23.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και  $M\Delta$ ,  $NE$  οι μεσοκάθετοι των πλευρών του  $AB$ ,  $A\Gamma$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

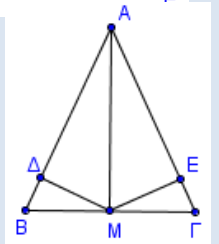
- α) Αν  $M\Delta = NE$  τότε το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)  
 β) Αν  $AB = A\Gamma$  τότε  $M\Delta = NE$ . (Μονάδες 13)



**24.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και από σημείο  $M$  της πλευράς  $B\Gamma$  φέρουμε τα κάθετα τμήματα  $M\Delta$  και  $ME$  στις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα.

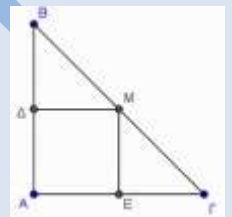
Να αποδείξετε ότι:

- α) Αν  $M\Delta = ME$ , τότε τα τρίγωνα  $AM\Delta$  και  $AME$  είναι ίσα. (Μονάδες 13)  
 β) Αν  $AB = A\Gamma$  και  $M$  το μέσο του  $B\Gamma$ , τότε  $M\Delta = ME$  (Μονάδες 12)



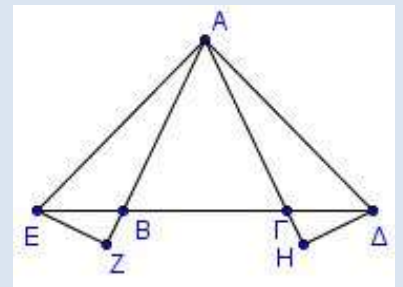
**25.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με τη γωνία  $A$  ορθή και από το μέσο  $M$  της πλευράς  $B\Gamma$  φέρουμε τα κάθετα τμήματα  $M\Delta$  και  $ME$  στις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) Αν  $M\Delta = ME$  τότε:  
 i. τα τρίγωνα  $B\Delta M$  και  $\Gamma E M$  είναι ίσα. (Μονάδες 8)  
 ii. το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)  
 β) Αν  $AB = A\Gamma$  τότε  $M\Delta = ME$ . (Μονάδες 8)



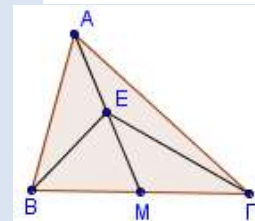
**26.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ . Στην προέκταση της  $B\Gamma$  (προς το  $\Gamma$ ) θεωρούμε σημείο  $\Delta$  και στην προέκταση της  $\Gamma B$  (προς το  $B$ ) θεωρούμε σημείο  $E$  έτσι ώστε  $\Gamma\Delta = BE$ . Από το  $\Delta$  φέρουμε  $\Delta H$  κάθετη στην ευθεία  $A\Gamma$  και από το  $E$  φέρουμε  $EZ$  κάθετη στην ευθεία  $AB$ . Να αποδείξετε ότι:

- α)  $A\Delta = AE$  (Μονάδες 12)  
 β)  $EZ = \Delta H$  (Μονάδες 13)



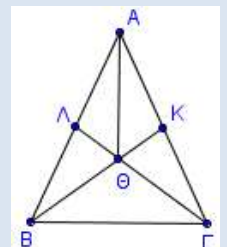
**27.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και  $E$  το μέσο της διαμέσου του  $AM$ . Αν  $B\Gamma = 2BE$ , να αποδείξετε ότι:

- α)  $\angle AEB = \angle EM\Gamma$  (Μονάδες 12)  
 β)  $AB = E\Gamma$ . (Μονάδες 13)



**28.** Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και τις διαμέσους του  $BK$  και  $\Gamma\Lambda$  οι οποίες τέμνονται στο  $\Theta$ . Να αποδείξετε ότι:

- α) Οι διάμεσοι  $BK$  και  $\Gamma\Lambda$  είναι ίσες. (Μονάδες 12)  
 β) Τα τρίγωνα  $AB\Theta$  και  $A\Gamma\Theta$  είναι ίσα. (Μονάδες 13)



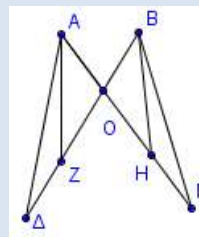
**29.** Δίνονται τα τμήματα  $ΑΓ = ΒΔ$  που τέμνονται στο σημείο  $Ο$  έτσι ώστε  $ΟΑ = ΟΒ$  και σημεία  $Η$  και  $Ζ$  στα τμήματα  $ΑΓ$  και  $ΒΔ$  αντίστοιχα, έτσι ώστε  $ΟΗ = ΟΖ$ . Να αποδείξετε ότι:

α)  $ΑΔΟ = ΒΓΟ$ .

(Μονάδες 12)

β)  $ΑΖ = ΒΗ$

(Μονάδες 13)



**30.** Έστω κύκλος με κέντρο  $Ο$  και ακτίνα  $ρ$ . Θεωρούμε διάμετρο  $ΑΒ$  και τυχαίο σημείο  $Γ$  του κύκλου. Αν  $ΑΕ$  κάθετο στην  $ΟΓ$  και  $ΓΔ$  κάθετο στην  $ΑΟ$  να αποδείξετε ότι:

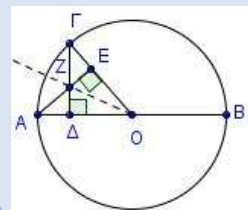
α) Το τρίγωνο  $ΔΟΕ$  είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 13)

β) Η  $ΟΖ$  διχοτομεί τη γωνία  $ΑΟΓ$  και προεκτεινόμενη

διέρχεται από το μέσο του τόξου  $ΑΓ$ .

(Μονάδες 12)



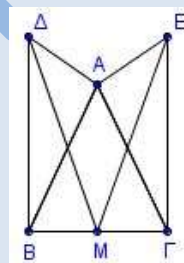
**31.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $ΑΒΓ$  ( $ΑΒ = ΑΓ$ ). Στα σημεία  $Β$  και  $Γ$  της  $ΒΓ$  φέρουμε προς το ίδιο μέρος της  $ΒΓ$  τα τμήματα  $ΒΔ \perp ΒΓ$  και  $ΓΕ \perp ΒΓ$  τέτοια, ώστε  $ΒΔ = ΓΕ$ . Αν  $Μ$  το μέσο της  $ΒΓ$ , να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα  $ΒΔΜ$  και  $ΓΕΜ$  είναι ίσα,

(Μονάδες 12)

β)  $ΑΔ = ΑΕ$ .

(Μονάδες 13)



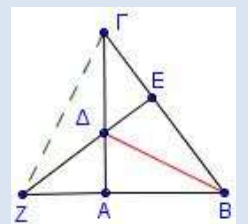
**32.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $ΑΒΓ$  ( $Α = 90^\circ$ ) και η διχοτόμος του  $ΒΔ$ . Από το  $Δ$  φέρουμε  $ΔΕ \perp ΒΓ$  που τέμνει την προέκταση της  $ΑΒ$  (προς το  $Α$ ) στο  $Ζ$ . Να αποδείξετε ότι:

α)  $ΒΕ = ΑΒ$

(Μονάδες 12)

β) το τρίγωνο  $ΒΓΖ$  είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 13)



**33.** Στο τρίγωνο  $ΑΒΓ$  του διπλανού σχήματος, η κάθετη από το μέσο  $Μ$  της  $ΒΓ$  τέμνει την προέκταση της διχοτόμου  $ΑΔ$  στο σημείο  $Ε$ . Αν  $Θ, Ζ$  είναι οι προβολές του  $Ε$  στις  $ΑΒ, ΑΓ$ , να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο  $ΕΒΓ$  είναι ισοσκελές.

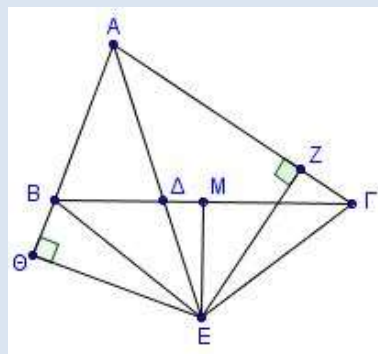
(Μονάδες 5)

β) Τα τρίγωνα  $ΘΒΕ$  και  $ΖΓΕ$  είναι ίσα.

(Μονάδες 8)

γ)  $ΑΓΕ + ΑΒΕ = 180^\circ$ .

(Μονάδες 12)



**34.** Έστω τρίγωνο  $ΑΒΓ$  και τα ύψη του  $ΒΕ$  και  $ΓΔ$  που αντιστοιχούν στις πλευρές  $ΑΓ$  και  $ΑΒ$  αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

Π: Αν το τρίγωνο  $ΑΒΓ$  είναι ισοσκελές με  $ΑΒ = ΑΓ$ , τότε τα ύψη  $ΒΕ$  και  $ΓΔ$  που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.

α) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση Π αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

β) Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της Π και να αποδείξετε ότι ισχύει.

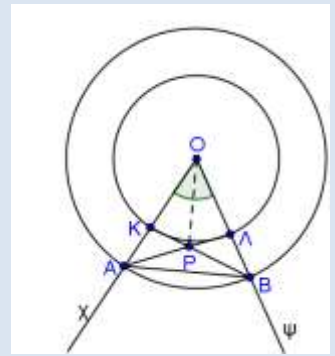
(Μονάδες 10)

γ) Να διατυπώσετε την πρόταση Π και την αντίστροφή της ως ενιαία πρόταση.

(Μονάδες 5)

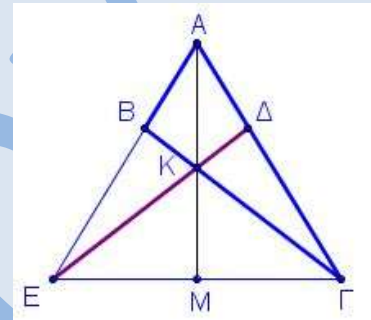
**35.** Δίνεται οξεία γωνία  $\chi O\psi$  και δύο ομόκεντροι κύκλοι  $(O, \rho_1)$  και  $(O, \rho_2)$  με  $\rho_1 < \rho_2$ , που τέμνουν την  $O\chi$  στα σημεία  $K, A$  και την  $O\psi$  στα  $\Lambda, B$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α)  $AL = BK$  (Μονάδες 8)  
 β) Το τρίγωνο  $APB$  είναι ισοσκελές, όπου  $P$  το σημείο τομής των  $AL, BK$ . (Μονάδες 8)  
 γ) Η  $OP$  διχοτομεί τη γωνία  $\chi O\psi$ . (Μονάδες 9)



**36.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$ . Στην προέκταση της  $AB$  (προς το  $B$ ) θεωρούμε σημείο  $E$  έτσι ώστε  $AE = A\Gamma$ . Στην πλευρά  $A\Gamma$  θεωρούμε σημείο  $\Delta$  έτσι ώστε  $A\Delta = AB$ . Αν τα τμήματα  $\Delta E$  και  $B\Gamma$  τέμνονται στο  $K$  και η προέκταση της  $AK$  τέμνει την  $E\Gamma$  στο  $M$ , να αποδείξετε ότι:

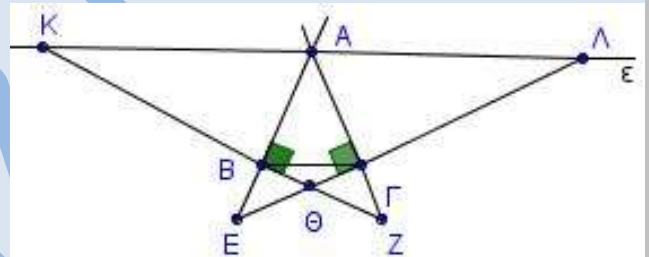
- α)  $B\Gamma = \Delta E$  (Μονάδες 6)  
 β)  $BK = K\Delta$  (Μονάδες 7)  
 γ) Η  $AK$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $A$ . (Μονάδες 6)  
 δ) Η  $AM$  είναι μεσοκάθετος της  $E\Gamma$ . (Μονάδες 6)



**37.** Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$ , και την ευθεία  $\epsilon$  της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας  $A$ . Η κάθετη στη πλευρά  $AB$  στο  $B$  τέμνει την  $\epsilon$  στο  $K$  και την ευθεία  $A\Gamma$  στο  $Z$ . Η κάθετη στη πλευρά  $A\Gamma$  στο  $\Gamma$  τέμνει την  $\epsilon$  στο  $\Lambda$  και την ευθεία  $AB$  στο  $E$ .

- α) Να αποδείξετε ότι:  
 i.  $AZ = AE$  (Μονάδες 8)  
 ii.  $AK = A\Lambda$  (Μονάδες 9)

β) Ένας μαθητής κοιτώντας το σχήμα, διατύπωσε την άποψη ότι η  $A\Theta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $A$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ , όπου  $\Theta$  το σημείο τομής των  $KZ, E\Lambda$ . Συμφωνείτε με την παραπάνω σκέψη του μαθητή ή όχι; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 8)



### §3.7

**38.** Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και  $I$  το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$ . Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο  $B\Gamma I$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)  
 β) Οι γωνίες  $\hat{A}B$  και  $\hat{A}\Gamma$  είναι ίσες. (Μονάδες 10)  
 γ) Η ευθεία  $AI$  είναι μεσοκάθετος του τμήματος  $B\Gamma$ . (Μονάδες 7)

**39.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $A = 90^\circ$ ) η διχοτόμος της γωνίας  $\Gamma$  τέμνει την πλευρά  $AB$  στο σημείο  $\Delta$ . Από το  $\Delta$  φέρουμε προς την πλευρά  $B\Gamma$  την κάθετο  $\Delta E$ , η οποία τέμνει τη  $B\Gamma$  στο σημείο  $E$ . Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα  $A\Gamma\Delta$  και  $\Delta\Gamma E$  είναι ίσα. (Μονάδες 13)  
 β) Η ευθεία  $\Gamma\Delta$  είναι μεσοκάθετος του τμήματος  $AE$ . (Μονάδες 12)

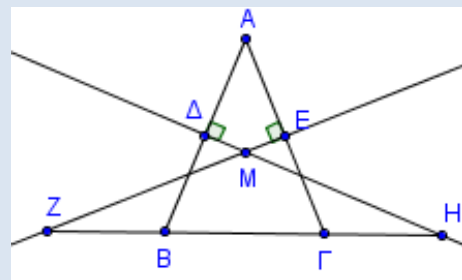
**40.** Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ . Οι μεσοκάθετοι των ίσων πλευρών του τέμνονται στο  $M$  και προεκτεινόμενες τέμνουν τη βάση  $B\Gamma$  στα  $Z$  και  $H$ .

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα  $\Delta BH$  και  $EZ\Gamma$ .

(Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $MZH$  είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 10)



**41.** Έστω κυρτό τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  με  $\angle A = \angle \Gamma$ .

Να αποδείξετε ότι:

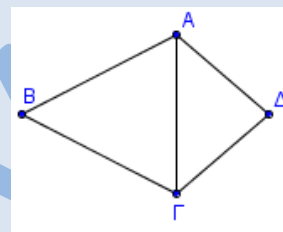
α)  $\angle B A \Gamma = \angle B \Gamma A$

(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο  $A\Delta\Gamma$  είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 10)

γ) Η ευθεία  $B\Delta$  είναι μεσοκάθετος του τμήματος  $A\Gamma$ . (Μονάδες 7)



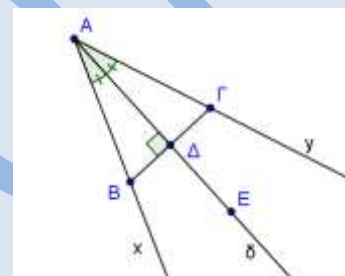
**42.** Δίνεται γωνία  $\alpha A \gamma$  και η διχοτόμος της  $A\delta$ . Από τυχαίο σημείο  $B$  της  $A\alpha$  φέρνουμε κάθετη στη διχοτόμο, η οποία τέμνει την  $A\delta$  στο  $\Delta$  και την  $A\gamma$  στο  $\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

α)  $AB = A\Gamma$

(Μονάδες 12)

β) Το τυχαίο σημείο  $E$  της  $A\delta$  ισαπέχει από τα  $B$  και  $\Gamma$ .

(Μονάδες 13)



**43.** Στο διπλανό σχήμα έχουμε το χάρτη μιας περιοχής όπου είναι κρυμμένος ένας θησαυρός. Οι ημιευθείες  $A\alpha$  και  $A\gamma$  παριστάνουν δύο ποτάμια και στα σημεία  $B$  και  $\Gamma$  βρίσκονται δύο πλατάνια.

Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τις δυνατές θέσεις του θησαυρού, αν είναι γνωστό ότι:

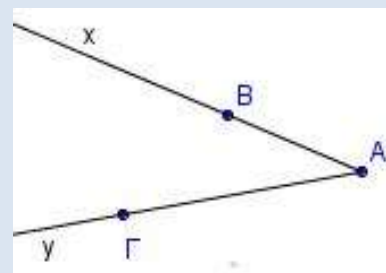
α) ισαπέχει από τα δύο πλατάνια.

(Μονάδες 9)

β) ισαπέχει από τα δύο ποτάμια.

(Μονάδες 9)

γ) ισαπέχει και από τα δύο πλατάνια και από τα δύο ποτάμια. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.



(Μονάδες 7)

### §3.10-3.13

**44.** Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\angle A = 90^\circ$ ) η διχοτόμος της γωνίας  $\Gamma$  τέμνει την πλευρά  $AB$  στο σημείο  $\Delta$ . Από το  $\Delta$  φέρουμε προς την πλευρά  $B\Gamma$  την κάθετο  $\Delta E$ , η οποία τέμνει τη  $B\Gamma$  στο σημείο  $E$ . Να αποδείξετε ότι:

α)  $A\Delta = \Delta E$

(Μονάδες 13)

β)  $A\Delta < \Delta B$

(Μονάδες 12)

**45.** Στο διπλανό σχήμα, η  $A\Delta$  είναι διάμεσος του τριγώνου  $AB\Gamma$  και το  $E$  είναι σημείο στην προέκταση της  $A\Delta$ , ώστε  $\Delta E = A\Delta$ .

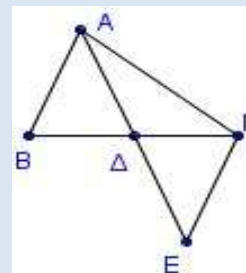
Να αποδείξετε ότι:

α)  $AB = \Gamma E$

(Μονάδες 12)

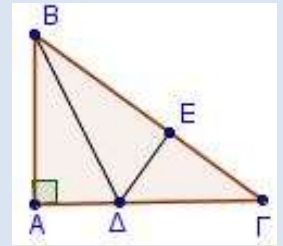
β)  $A\Delta < \frac{AB + A\Gamma}{2}$

(Μονάδες 13)



**46.** Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία  $A$ . Η  $B\Delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $B$ , η  $\Delta E$  είναι κάθετη στην  $B\Gamma$  και η γωνία  $\Gamma$  είναι μικρότερη της γωνίας  $B$ . Να αποδείξετε ότι:

- α)  $A\Delta = \Delta E$  (Μονάδες 8)  
 β)  $A\Delta < \Delta\Gamma$  (Μονάδες 9)  
 γ)  $A\Gamma > AB$  (Μονάδες 8)



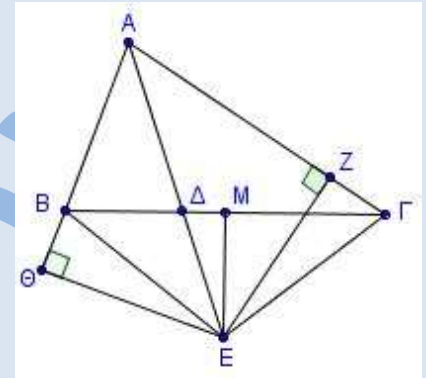
**47.** Θεωρούμε δύο σημεία  $A$  και  $B$  τα οποία βρίσκονται στο ίδιο μέρος ως προς μια ευθεία  $\epsilon$ , τέτοια ώστε η ευθεία  $AB$  δεν είναι κάθετη στην  $\epsilon$ . Έστω  $A'$  το συμμετρικό του  $A$  ως προς την ευθεία  $\epsilon$ .

α) Αν η  $BA'$  τέμνει την ευθεία  $\epsilon$  στο σημείο  $O$ , να αποδείξετε ότι:

- i. Η ευθεία  $\epsilon$  διχοτομεί τη γωνία  $AOA'$ . (Μονάδες 6)  
 ii. Οι ημιευθείες  $OA$  και  $OB$  σχηματίζουν ίσες οξείες γωνίες με την ευθεία  $\epsilon$ . (Μονάδες 6)

β) Αν  $K$  είναι ένα άλλο σημείο πάνω στην ευθεία  $\epsilon$ , να αποδείξετε ότι:

- i.  $KA = KA'$   
 ii.  $KA + KB > AO + OB$



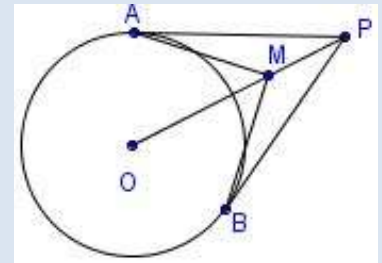
(Μονάδες 6)

(Μονάδες 7)

### §3.14-3.16

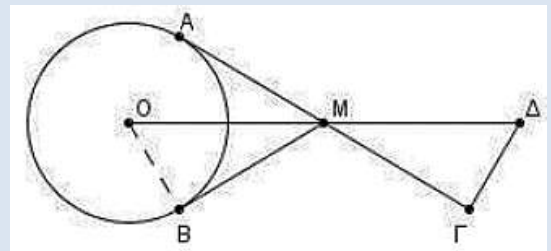
**48.** Από εξωτερικό σημείο  $P$  ενός κύκλου  $(O, \rho)$  φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα  $PA$  και  $PB$ . Αν  $M$  είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος  $OP$ , να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα  $PAM$  και  $PMB$  είναι ίσα. (Μονάδες 12)  
 β)  $MAO = MBO$ . (Μονάδες 13)



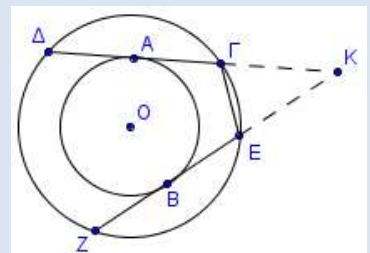
**49.** Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος  $(O, R)$  και τα εφαπτόμενα τμήματα  $MA$  και  $MB$ . Προεκτείνουμε την  $AM$  κατά τμήμα  $M\Gamma = MA$  και την  $OM$  κατά τμήμα  $M\Delta = OM$ .

- α) Να αποδείξετε ότι  $MB = M\Gamma$ . (Μονάδες 10)  
 β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $OMB$  και  $M\Gamma\Delta$  είναι ίσα. (Μονάδες 15)



**50.** Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο  $O$  και ακτίνες  $\rho$  και  $R$  ( $\rho < R$ ). Οι χορδές  $\Delta\Gamma$  και  $Z\epsilon$  του κύκλου  $(O, R)$  εφάπτονται στον κύκλο  $(O, \rho)$  στα σημεία  $A$  και  $B$  αντίστοιχα.

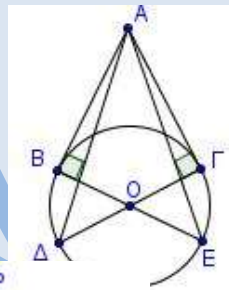
- α) Να αποδείξετε ότι  $\Delta\Gamma = Z\epsilon$  (Μονάδες 12)  
 β) Αν οι  $\Delta\Gamma$  και  $Z\epsilon$  προεκτείνόμενες τέμνονται στο σημείο  $K$ , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $KE\Gamma$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)



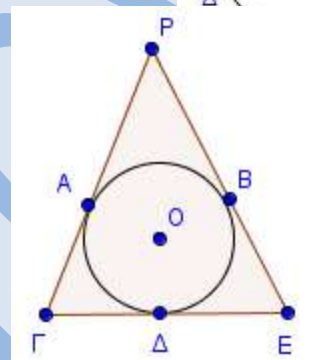


- 51.** Έστω κύκλος με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $\rho$ . Σε σημείο  $N$  του κύκλου φέρουμε την εφαπτόμενή του, και εκατέρωθεν του  $N$  θεωρούμε σημεία  $A$  και  $B$ , τέτοια ώστε  $NA=NB$ . Οι  $OA$  και  $OB$  τέμνουν τον κύκλο στα  $K$  και  $L$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
- α) Το τρίγωνο  $AOB$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)
- β) Το σημείο  $N$  είναι μέσο του τόξου  $KL$ . (Μονάδες 12)

- 52.** Έστω κύκλος με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $\rho$ . Από σημείο εκτός του κύκλου, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα  $AB$  και  $A\Gamma$ . Τα σημεία  $E$  και  $\Delta$  είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία των  $B$  και  $\Gamma$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
- α) Τα τρίγωνα  $ABE$  και  $A\Gamma\Delta$  είναι ίσα. (Μονάδες 13)
- β) Τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $A\Gamma E$  είναι ίσα. (Μονάδες 12)



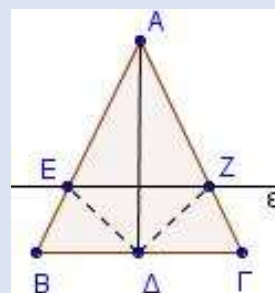
- 53.** Έστω ότι ο κύκλος  $(O,\rho)$  εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου  $P\Gamma E$  στα σημεία  $A,\Delta$  και  $B$ .
- α) Να αποδείξετε ότι:
- i.  $P\Gamma = P\Delta + AP$  (Μονάδες 6)
- ii.  $P\Gamma - P\Delta = PE - \Delta E$  (Μονάδες 8)
- β) Αν  $A\Gamma = BE$ , να αποδείξετε ότι
- i. Το τρίγωνο  $P\Gamma E$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)
- ii. Τα σημεία  $P, O$  και  $\Delta$  είναι συνευθειακά. (Μονάδες 5)



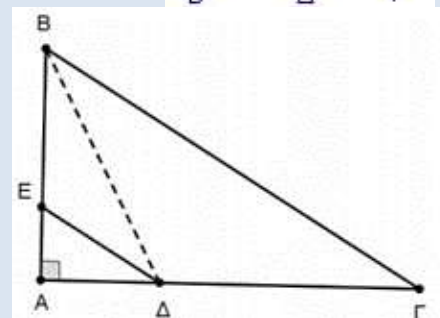
- 54.** Θεωρούμε κύκλο κέντρου  $O$  και εξωτερικό σημείο του  $P$ . Από το  $P$  φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα  $PA$  και  $PB$ . Η διακεντρική ευθεία  $PO$  τέμνει τον κύκλο στο σημείο  $L$ . Η εφαπτόμενη του κύκλου στο  $L$  τέμνει τα  $PA$  και  $PB$  στα σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
- α) το τρίγωνο  $P\Gamma\Delta$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)
- β)  $\Gamma A = \Delta B$ . (Μονάδες 8)
- γ) η περίμετρος του τριγώνου  $P\Gamma\Delta$  είναι ίση με  $PA + PB$ . (Μονάδες 7)

### §4.1-4.5

- 55.** Σε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) φέρουμε τη διχοτόμο  $A\Delta$  και μια ευθεία  $(\epsilon)$  παράλληλη προς τη  $B\Gamma$ , που τέμνει τις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$  στα σημεία  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
- α) Το τρίγωνο  $AEZ$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)
- β) Τα τρίγωνα  $AE\Delta$  και  $AZ\Delta$  είναι ίσα. (Μονάδες 15)

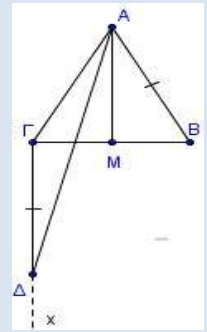


- 56.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $A = 90^\circ$ ). Έστω  $\Delta$  σημείο της πλευράς  $A\Gamma$  τέτοιο, ώστε η διχοτόμος  $\Delta E$  της γωνίας  $A\Delta B$  να είναι παράλληλη στην πλευρά  $B\Gamma$ .
- α) Να αποδείξετε ότι:
- i)  $\angle E\Delta B = \angle \Delta B\Gamma$  και  $\angle E\Delta A = \hat{\Gamma}$ . (Μονάδες 4 + 4)
- ii) Το τρίγωνο  $B\Delta\Gamma$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)



β) Αν  $\angle ADB = 60^\circ$  να υπολογίσετε τη γωνία  $\Gamma$ . (Μονάδες 9)

**57.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και η διάμεσός του  $AM$ . Φέρουμε ημιευθεία  $\Gamma x \perp B\Gamma$  προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το  $A$  και παίρνουμε σε αυτήν τμήμα  $\Gamma\Delta = AB$ .



α) Να αποδείξετε ότι η γωνία  $\Delta A\Gamma$  είναι ίση με τη  $\Gamma\Delta A$ . (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι:

i)  $\Gamma\Delta \parallel AM$

(Μονάδες 6)

ii) Η  $A\Delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $MA\Gamma$ .

(Μονάδες 7)

**58.** Στις προεκτάσεις των πλευρών  $BA$  (προς το  $A$ ) και  $\Gamma A$  (προς το  $A$ ) τριγώνου  $AB\Gamma$ , παίρνουμε τα τμήματα  $A\Delta = AB$  και  $A\epsilon = A\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A\Delta\epsilon$  είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β)  $\Delta\epsilon \parallel B\Gamma$

(Μονάδες 13)

**59.** Στο ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) φέρουμε τις διαμέσους  $B\Delta$  και  $\Gamma\epsilon$ . Μια ευθεία  $\epsilon$  παράλληλη στη βάση  $B\Gamma$  τέμνει τις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$  στα  $Z$  και  $H$  αντίστοιχα και τις διαμέσους  $B\Delta$  και  $\Gamma\epsilon$  στα σημεία  $\Theta$  και  $K$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α)  $BZ = \Gamma H$

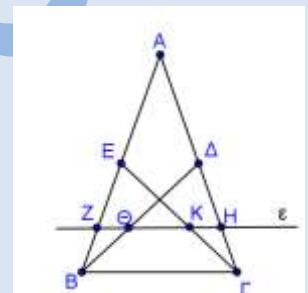
(Μονάδες 8)

β) τα τρίγωνα  $ZB\Theta$  και  $H\Gamma K$  είναι ίσα.

(Μονάδες 9)

γ)  $ZK = H\Theta$ .

(Μονάδες 8)



**60.** Δίνεται τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB = A\Delta$  και  $\Gamma B = \Gamma\Delta$ . Αν  $E$  το σημείο τομής των προεκτάσεων των  $BA$  και  $\Gamma\Delta$  και  $Z$  το σημείο τομής των προεκτάσεων των  $\Delta A$  και  $\Gamma B$ , να αποδείξετε ότι:

α) Η  $\Gamma A$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $B\Gamma\Delta$ .

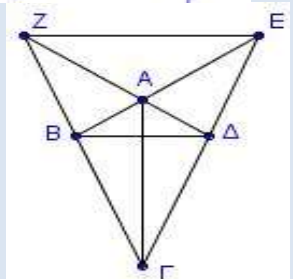
(Μονάδες 7)

β)  $\Gamma Z = \Gamma\epsilon$ .

(Μονάδες 9)

γ)  $EZ \parallel B\Delta$ .

(Μονάδες 8)



**61.** Θεωρούμε κύκλο κέντρου  $O$ , με διάμετρο  $B\Gamma$ . Από σημείο  $A$  του κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη ( $\epsilon$ ) του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $AB\Gamma$ . Από τα σημεία  $B$  και  $\Gamma$  φέρουμε τα τμήματα  $B\Delta$  και  $\Gamma\epsilon$  κάθετα στην ευθεία ( $\epsilon$ ).

α) Να αποδείξετε ότι οι  $BA$  και  $\Gamma A$  είναι διχοτόμοι των γωνιών  $\Delta B\Gamma$  και  $\epsilon\Gamma B$ .

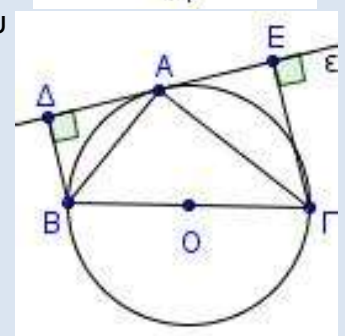
(Μονάδες 8)

β) Αν  $AZ$  είναι ύψος του τριγώνου  $AB\Gamma$ , να αποδείξετε ότι:  $A\Delta = A\epsilon = AZ$ .

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι:  $B\Delta + \Gamma\epsilon = B\Gamma$ .

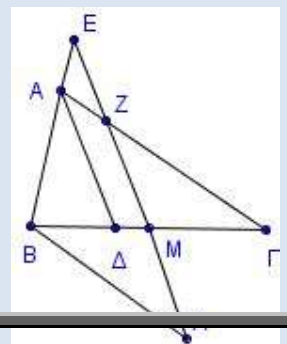
(Μονάδες 9)



**62.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$ , η διχοτόμος του  $A\Delta$  και ευθεία  $\epsilon$  παράλληλη από το  $B$  προς την  $A\Gamma$ .

Από το μέσο  $M$  της  $B\Gamma$  φέρουμε ευθεία παράλληλη στην  $A\Delta$  η οποία τέμνει την  $A\Gamma$  στο σημείο  $Z$ , την ευθεία  $\epsilon$  στο σημείο  $\Lambda$  και την προέκταση της  $BA$  στο σημείο  $E$ . Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα  $AEZ$  και  $B\Lambda E$  είναι ισοσκελή. (Μονάδες 8)



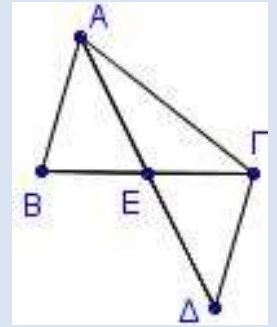
β)  $ΒΛ = ΓΖ$ .

(Μονάδες 9)

γ)  $ΑΕ = ΑΓ - ΒΛ$ .

(Μονάδες 8)

**63.** Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι θέσεις στο χάρτη πέντε χωριών Α, Β, Γ, Δ και Ε και οι δρόμοι που τα συνδέουν. Το χωριό Ε ισαπέχει από τα χωριά Β, Γ και επίσης από τα χωριά Α και Δ.



α) Να αποδείξετε ότι: i. η απόσταση των χωριών Α και Β είναι ίση με την απόσταση των χωριών Γ και Δ. (Μονάδες 5)

ii. αν οι δρόμοι ΑΒ και ΓΔ έχουν δυνατότητα να προεκταθούν, να αποδείξετε ότι αποκλείεται να συναντηθούν. (Μονάδες 5)

iii. τα χωριά Β και Γ ισαπέχουν από το δρόμο ΑΔ. (Μονάδες 8)

β) Να προσδιορίσετε γεωμετρικά το σημείο του δρόμου ΑΓ που ισαπέχει από τα χωριά Α και Δ. (Μονάδες 7)

### §4.6-4.8

**64.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ( $Α = 90^\circ$ ). Η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ. Φέρουμε τμήμα ΔΕ κάθετο στην πλευρά ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

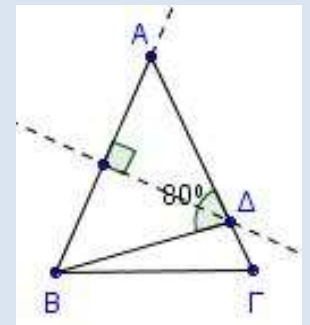
α)  $ΒΕ = ΑΒ$

(Μονάδες 12)

β) Αν επιπλέον  $ΒΔΑ = 55^\circ$ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΓΔΕ. (Μονάδες 13)

**65.** Ένας μαθητής της Α' Λυκείου βρήκε έναν τρόπο να κατασκευάζει παράλληλες ευθείες. Στην αρχή σχεδιάζει μια τυχαία γωνία  $χΟψ$ . Στη συνέχεια με κέντρο τη κορυφή Ο της γωνίας σχεδιάζει δύο ομόκεντρους διαφορετικούς κύκλους με τυχαίες ακτίνες. Ο μικρότερος κύκλος τέμνει τις πλευρές Οχ και Οψ της γωνίας στα σημεία Α και Β αντίστοιχα και ο μεγαλύτερος στα σημεία Γ, Δ. Ισχυρίζεται ότι οι ευθείες που ορίζονται από τις χορδές ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες. Μπορείτε να το δικαιολογήσετε; (Μονάδες 25)

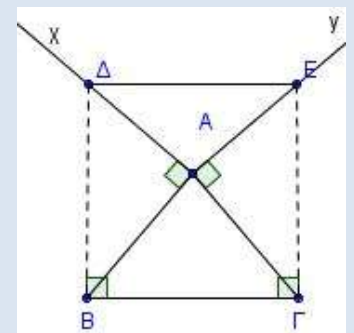
**66.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο  $Α_{εξ} = 2ΑΒΓ$ . Φέρουμε τη μεσοκάθετο της πλευράς ΑΒ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Δ και σχηματίζεται γωνία ΑΔΒ ίση με  $80^\circ$ .



α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με  $ΑΒ = ΑΓ$ . (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 15)

**67.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με  $ΑΒ = ΑΓ$ . Φέρουμε εκτός του τριγώνου τις ημιευθείες Αχ και Αγ τέτοιες ώστε  $Αχ \perp ΑΒ$  και  $Αγ \perp ΑΓ$ . Οι κάθετες στην πλευρά ΒΓ στα σημεία Β και Γ τέμνουν τις Αχ και Αγ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι  $ΒΔ = ΓΕ$ . (Μονάδες 12)

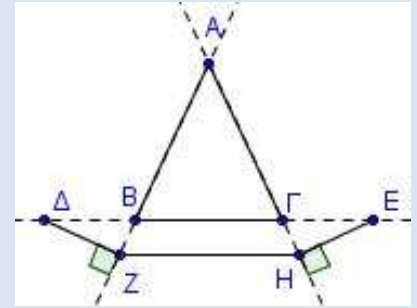
β) Αν η γωνία ΒΑΓ είναι ίση με  $80^\circ$ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΔΑΕ. (Μονάδες 13)

**68.** Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και σημεία  $\Delta$  και  $E$  στην ευθεία  $B\Gamma$  τέτοια, ώστε  $B\Delta = \Gamma E$ . Έστω  $\Delta Z \perp AB$  και  $E\text{H} \perp A\Gamma$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

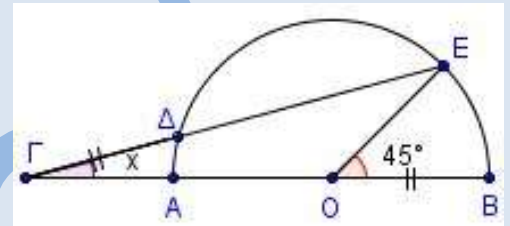
- i.  $BZ = \Gamma\text{H}$ . (Μονάδες 10)
- ii. Το τρίγωνο  $AZH$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) Αν  $A = 50^\circ$ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $AZH$ . (Μονάδες 8)



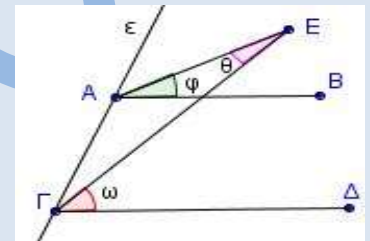
**69.** Σε ημικύκλιο διαμέτρου  $AB$  προεκτείνουμε την  $AB$  προς το μέρος του  $A$  και παίρνουμε ένα σημείο  $\Gamma$ . Θεωρούμε  $E$  ένα σημείο του ημικυκλίου και έστω  $\Delta$  το σημείο τομής του τμήματος  $\Gamma E$  με το ημικύκλιο. Αν το τμήμα  $\Gamma\Delta$  ισούται με το  $OB$  και  $\text{BOE} = 45^\circ$ , να υπολογίσετε τη γωνία  $\Delta\Gamma O = x$ .

(Μονάδες 25)

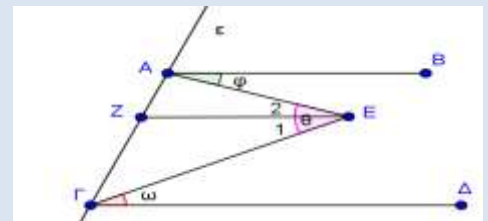


**70.** Δίνεται ευθεία  $\epsilon$  του επιπέδου. Τα παράλληλα τμήματα  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  καθώς και ένα τυχαίο σημείο  $E$  βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της  $\epsilon$ . Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το  $E$  είναι εκτός των τμημάτων  $AB$  και  $\Gamma\Delta$ , τότε:  $\omega = \varphi + \theta$ . (Μονάδες 10)

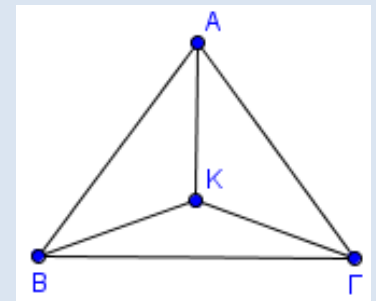


β) Αν το  $E$  είναι ανάμεσα στα τμήματα  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  και  $EZ \parallel AB$ , τότε να αποδείξετε ότι  $\theta = \varphi + \omega$ . (Μονάδες 15)



**71.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) με  $A = 80^\circ$ . Έστω  $K$  σημείο της διχοτόμου της γωνίας  $A$ , τέτοιο, ώστε  $KB = KA = K\Gamma$ .

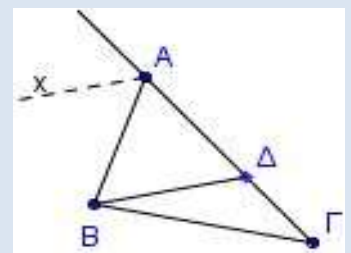
- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $BKA$  και  $\Gamma KA$  είναι ίσα. (Μονάδες 10)
- β) Να υπολογίσετε τις γωνίες  $ABK$  και  $A\Gamma K$ . (Μονάδες 8)
- γ) Να υπολογίσετε τη γωνία  $BK\Gamma$ . (Μονάδες 7)



**72.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$ . Έστω  $Ax$  η διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας  $A_{\epsilon\epsilon} = 120^\circ$ . Από την κορυφή  $B$  φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην  $Ax$ , η οποία τέμνει την  $A\Gamma$  στο σημείο  $\Delta$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

- i.  $AB\Delta = 60^\circ$  (Μονάδες 5)

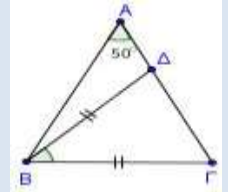


- ii. το τρίγωνο  $AB\Delta$  είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 5)
- iii.  $\Delta\Gamma = A\Gamma - AB$  (Μονάδες 5)

β) Αν η γωνία  $B\Delta A$  είναι διπλάσια της  $\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $B\Delta\Gamma$ . (Μονάδες 10)

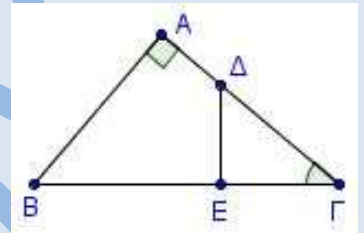
**73.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) με  $A = 50^\circ$ . Έστω  $\Delta$  σημείο της πλευράς  $A\Gamma$ , τέτοιο, ώστε  $B\Delta = B\Gamma$ .

- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες  $B$  και  $\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 12)
- β) Να αποδείξετε ότι  $\Delta B\Gamma = A$ . (Μονάδες 13)



**74.** Θεωρούμε ορθογώνιο  $AB\Gamma$  ( $A = 90^\circ$ ) με  $\Gamma = 40^\circ$ . Έστω  $\Delta$  τυχαίο σημείο της πλευράς  $A\Gamma$  και  $DE \perp B\Gamma$ . Να υπολογίσετε:

- α) τις γωνίες του τριγώνου  $\Delta E\Gamma$ . (Μονάδες 10)
- β) τις γωνίες του τετράπλευρου  $A\Delta E B$ . (Μονάδες 15)



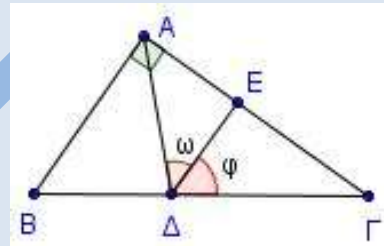
**75.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) με  $A = 40^\circ$ . Στην προέκταση της  $\Gamma B$  (προς το  $B$ ) παίρνουμε τμήμα  $B\Delta$  τέτοιο, ώστε  $B\Delta = AB$ . Να υπολογίσετε

- α) τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 10)
- β) τη γωνία  $\Delta A\Gamma$ . (Μονάδες 15)

**76.** Θεωρούμε ορθογώνιο  $AB\Gamma$  ( $A = 90^\circ$ ). Έστω  $A\Delta$  η διχοτόμος της γωνίας  $A$  και  $DE \parallel AB$ .

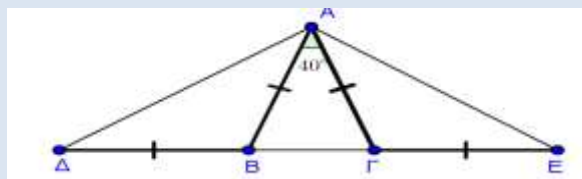
Αν  $B = \Gamma + 20^\circ$ ,

- α) Να υπολογίσετε:
  - i. τις γωνίες  $B$  και  $\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 8)
  - ii. τις γωνίες  $\omega$  και  $\varphi$ . (Μονάδες 10)
- β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $A\Delta E$  είναι ισοσκελές.



**77.** Στο διπλανό σχήμα ισχύουν  $\Delta B = BA = A\Gamma = \Gamma E$  και  $B A \Gamma = 40^\circ$ . Να αποδείξετε ότι:

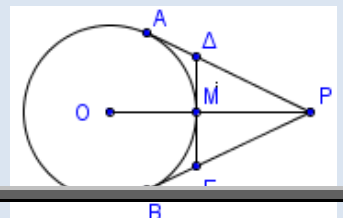
- α)  $\Delta B\Delta = A\Gamma E = 110^\circ$ . (Μονάδες 10)
- β) Τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $A\Gamma E$  είναι ίσα. (Μονάδες 10)
- γ) Το τρίγωνο  $\Delta A E$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)



**78.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A = 80^\circ$ ,  $B = 20^\circ + \Gamma$  και έστω  $A\Delta$  η διχοτόμος της γωνίας  $A$ .

- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες  $B$  και  $\Gamma$ . (Μονάδες 12)
- β) Φέρνουμε από το  $\Delta$  ευθεία παράλληλη στην  $AB$ , που τέμνει την  $A\Gamma$  στο  $E$ . Να υπολογίσετε τις γωνίες  $A\Delta E$  και  $E\Delta\Gamma$ . (Μονάδες 13)

**79.** Δίνεται κύκλος κέντρου  $O$  και από ένα σημείο  $P$  εκτός αυτού φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα  $PA$  και  $PB$ . Το τμήμα  $PO$  τέμνει τον



κύκλο στο M και η εφαπτομένη του κύκλου στο M τέμνει τα PA και PB στα σημεία Δ και Γ αντίστοιχα.

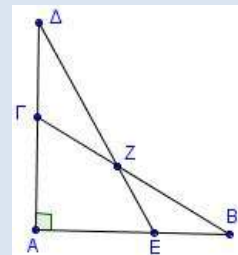
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΡΔΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)

β) Αν  $\angle APB = 40^\circ$ , να υπολογίσετε τη γωνία AOB. (Μονάδες 12)

**80.** Στα ορθογώνια τρίγωνα ABΓ και AΔE (γωνία A ορθή) του διπλανού σχήματος ισχύει  $B = \Delta = 30^\circ$ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετράπλευρου AEZΓ. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΓΖΔ και EBZ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 12)

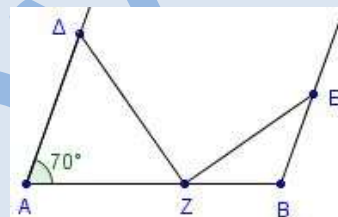


**81.** Στο διπλανό σχήμα, οι AΔ, BE είναι παράλληλες. Επιπλέον ισχύουν  $A\Delta = AZ$ ,  $BE = BZ$  και  $A = 70^\circ$ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων

AΔZ και BZE. (Μονάδες 16)

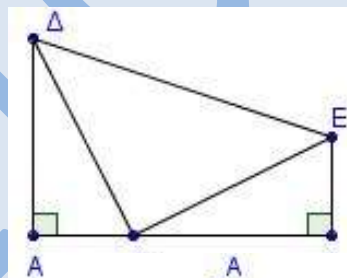
β) Να αποδείξετε ότι  $\Delta ZE = 90^\circ$ . (Μονάδες 9)



**82.** Στο διπλανό σχήμα οι γωνίες A,B είναι ορθές και επιπλέον  $A\Delta = B\Gamma$  και  $A\Gamma = BE$ . Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα AΓΔ και BΓE είναι ίσα. (Μονάδες 13)

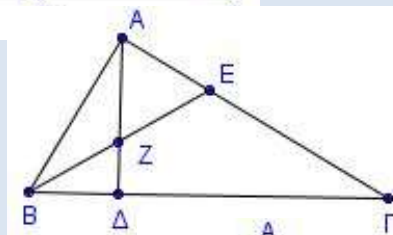
β) Αν  $\angle E\Gamma B = 40^\circ$ , τότε το τρίγωνο ΔΓE είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. (Μονάδες 12)



**83.** Σε τρίγωνο ABΓ ισχύουν  $A + \Gamma = 2B$  και  $A = 3\Gamma$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $B = 60^\circ$ . (Μονάδες 10)

β) Αν το ύψος AΔ και η διχοτόμος BE τέμνονται στο σημείο Z, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AZE είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 15)

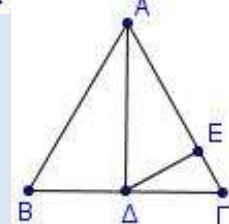


**84.** Δίνεται τρίγωνο ABΓ με  $AB = A\Gamma$  και η διάμεσός του AΔ τέτοια, ώστε  $B\Delta = 30^\circ$ . Θεωρούμε σημείο E στην AΓ τέτοιο, ώστε  $A\Delta = AE$ .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AΔE. (Μονάδες 9)

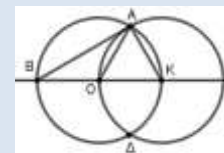
γ) Να υπολογίσετε τη γωνία EΔΓ. (Μονάδες 8)



**85.** Δίνονται δυο ίσοι κύκλοι (O,ρ) και (K,ρ) με  $OK = \rho$ , οι οποίοι τέμνονται στα σημεία A και Δ.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAK είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 10)

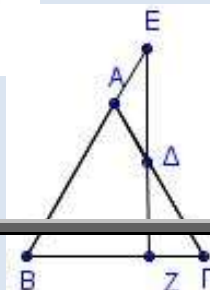
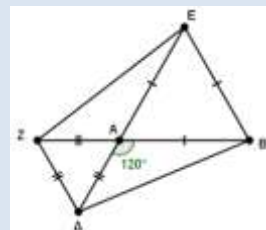
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου BAK. (Μονάδες 15)



**86.** Έστω τρίγωνο ABΔ με  $A = 120^\circ$ . Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα AEB και AZΔ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα AEZ και ABΔ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Το τμήμα ΔZ είναι παράλληλο στο BE. (Μονάδες 12)



**87.** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Θεωρούμε σημείο  $E$  στην προέκταση της  $BA$  (προς το  $A$ ) και σημείο  $\Delta$  στο εσωτερικό της πλευράς  $A\Gamma$ , ώστε  $AE = A\Delta$ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $A\Delta E$ . (Μονάδες 10)

β) Αν  $Z$  είναι το σημείο τομής της προέκτασης της  $E\Delta$  (προς το  $\Delta$ ) με την  $B\Gamma$ , να αποδείξετε ότι η  $EZ$  είναι κάθετη στην  $B\Gamma$ . (Μονάδες 15)

**88.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $A = 90^\circ$ ) και  $A\Delta$  η διχοτόμος της γωνίας  $A$ . Από το σημείο  $\Delta$  φέρουμε την παράλληλη προς την  $AB$  που τέμνει την  $A\Gamma$  στο  $E$ .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $E\Delta\Gamma$  είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία  $A\Delta E$ . (Μονάδες 9)

γ) Αν η γωνία  $B$  είναι  $20^\circ$  μεγαλύτερη από τη γωνία  $\Gamma$ , να υπολογίσετε τη γωνία  $E\Delta\Gamma$ . (Μονάδες 7)

**89.** Έστω ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ .

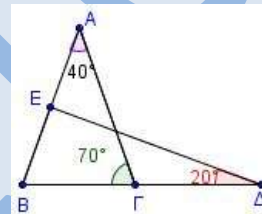
α) Να αποδείξετε ότι τα μέσα  $\Delta$  και  $E$  των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα, ισαπέχουν από τη βάση  $B\Gamma$ . (Μονάδες 13)

β) Αν  $A = 75^\circ + B$ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 12)

**90.** Στο διπλανό σχήμα να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

β) η γωνία  $A\Delta E$  είναι ορθή. (Μονάδες 13)



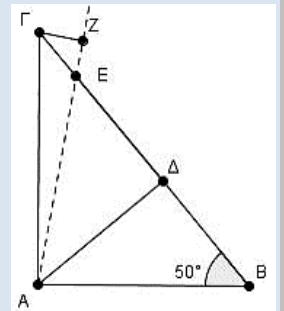
**91.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $A = 90^\circ$ ) με  $B = 50^\circ$ , το ύψος του  $A\Delta$  και σημείο  $E$  στην  $\Delta\Gamma$  ώστε  $\Delta E = B\Delta$ . Το σημείο  $Z$  είναι η προβολή του  $\Gamma$  στην  $AE$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο  $ABE$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

ii.  $\Gamma A E = 10^\circ$ . (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $Z\Gamma E$ . (Μονάδες 9)

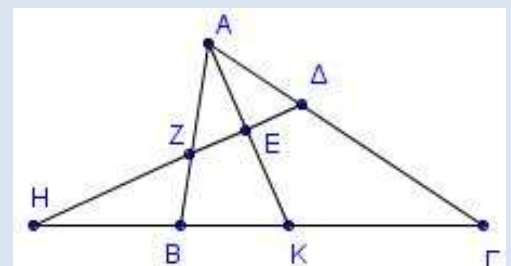


**92.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$ . Φέρουμε τη διχοτόμο του  $AK$  και σε τυχαίο σημείο της  $E$ .

φέρουμε ευθεία κάθετη στη διχοτόμο  $AK$ , η οποία τέμνει τις  $AB$  και  $A\Gamma$  στα σημεία  $Z$  και  $\Delta$  αντίστοιχα και την προέκταση της  $\Gamma B$  στο σημείο  $H$ . Να αποδείξετε ότι:

α)  $Z\Delta\Gamma = 90^\circ + \frac{A}{2}$  (Μονάδες 7)

β)  $ZK = K\Delta$

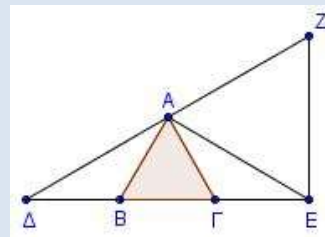


(Μονάδες 8)

$$\gamma) ZH\Gamma = \frac{B-\Gamma}{2}$$

(Μονάδες 10)

**93.** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  και στην προέκταση της  $GB$  (προς το  $B$ ) θεωρούμε σημείο  $\Delta$  τέτοιο, ώστε  $B\Delta = B\Gamma$ , ενώ στην προέκταση της  $B\Gamma$  (προς το  $\Gamma$ ) θεωρούμε σημείο  $E$  τέτοιο, ώστε  $GE = B\Gamma$ . Φέρουμε την κάθετη στην  $EA$  στο σημείο  $Z$ , η οποία τέμνει την προέκταση της  $DA$  στο  $Z$ .



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων  $\Gamma AE$  και  $B\Delta A$ . (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η  $\Gamma Z$  είναι μεσοκάθετος του  $AE$ . (Μονάδες 12)

γ) Να αποδείξετε ότι  $AB \parallel \Gamma Z$ . (Μονάδες 5)

**94.** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  και το ύψος του  $\Gamma E$ . Στην προέκταση της  $GB$  προς το  $B$ , θεωρούμε σημείο  $\Delta$  τέτοιο, ώστε

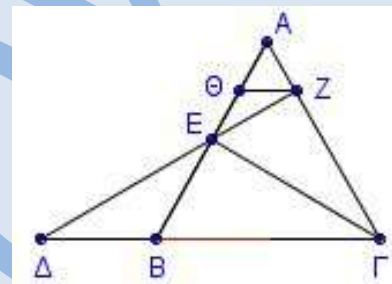
$$B\Delta = \frac{B\Gamma}{2}. \text{ Αν η ευθεία } \Delta E \text{ τέμνει την } A\Gamma \text{ στο } Z \text{ και } Z\Theta \parallel B\Gamma:$$

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $B\Delta E$  είναι ισοσκελές και το τρίγωνο  $A\Theta Z$  είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $\Theta EZ$ . (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι  $AE = 2\Theta Z$ .

δ) Να αποδείξετε ότι  $3AB = 4\Theta B$ .



(Μονάδες 5)

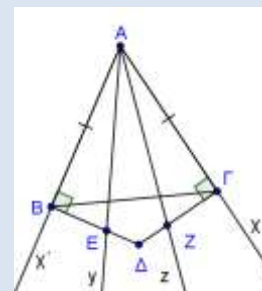
(Μονάδες 5)

**95.** Στις πλευρές  $Ax'$  και  $Ax$  γωνίας  $x'Ax$  θεωρούμε σημεία  $B$  και  $\Gamma$  ώστε  $AB = A\Gamma$ . Οι κάθετες στις  $Ax'$  και  $Ax$  στα σημεία  $B$  και  $\Gamma$  αντίστοιχα, τέμνονται στο  $\Delta$ . Αν οι ημιευθείες  $Ay$  και  $Az$  χωρίζουν τη γωνία  $x'Ax$  σε τρεις ίσες γωνίες και τέμνουν τις  $B\Delta$  και  $\Delta\Gamma$  στα σημεία  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο  $EAZ$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Το  $\Delta$  ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας  $x'Ax$ . (Μονάδες 8)

γ) Οι γωνίες  $\Gamma B\Delta$  και  $\Gamma A\Delta$  είναι ίσες. (Μονάδες 9)

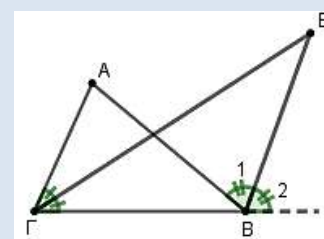


**96.** Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  η προέκταση της διχοτόμου της γωνίας  $\Gamma$  και της εξωτερικής γωνίας του  $B$ ,

τέμνονται στο  $E$ . Δίνεται ότι  $\angle ABE = 70^\circ = 2\angle \Gamma EB$ .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $\Gamma BE$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 13)



**97.** Έστω ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και  $M$  το μέσο της  $B\Gamma$ . Φέρνουμε  $\Gamma\Delta \perp B\Gamma$  με  $\Gamma\Delta = AB$  ( $A, \Delta$  εκατέρωθεν της  $B\Gamma$ ).

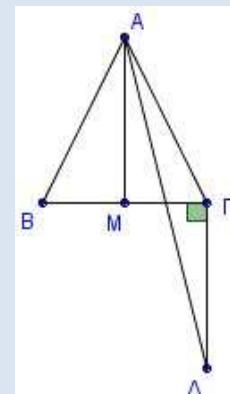
Να αποδείξετε ότι:

α)  $AM \parallel \Gamma\Delta$  (Μονάδες 6)

β) η  $A\Delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $MA\Gamma$ . (Μονάδες 7)

γ)  $\angle A\Gamma = 45^\circ - \frac{B}{2}$  (Μονάδες 7)

δ)  $A\Delta < 2AB$  (Μονάδες 5)





## §5.1-5.2

**98.** Δίνεται παραλληλόγραμμο  $ABΓΔ$  με  $AB = 2BΓ$ . Προεκτείνουμε την πλευρά  $AD$  (προς το μέρος του  $Δ$ ) κατά τμήμα  $ΔE = AD$  και φέρουμε την  $BE$  που τέμνει τη  $ΔΓ$  στο  $H$ . Να αποδείξετε ότι:

- α) το τρίγωνο  $BAE$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)  
β) το  $ΔEΓB$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)  
γ) η  $AH$  είναι διάμεσος του τριγώνου  $BAE$ . (Μονάδες 9)

**99.** Δίνεται τρίγωνο  $ABΓ$ , στο οποίο φέρουμε τις διαμέσους του  $BM$  και  $ΓN$ . Προεκτείνουμε την  $BM$  (προς το  $M$ ) κατά τμήμα  $MΔ = BM$  και την  $ΓN$  (προς το  $N$ ) κατά τμήμα  $NE = ΓN$ .

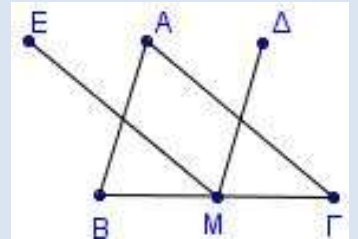
- α) Να αποδείξετε ότι  $AD \parallel BΓ$  και  $AE \parallel BΓ$ . (Μονάδες 13)  
β) Είναι τα σημεία  $E, A$  και  $Δ$  συνευθειακά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

**100.** Δίνεται παραλληλόγραμμο  $ABΓΔ$  και η διαγώνίός του  $BΔ$ . Από τις κορυφές  $A$  και  $Γ$  φέρουμε τις κάθετες  $AE$  και  $ΓZ$  στη  $BΔ$ , που την τέμνουν στα σημεία  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα  $ADE$  και  $ΓBZ$  είναι ίσα. (Μονάδες 10)  
β) Το τετράπλευρο  $AEGZ$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 15)

**101.** Δίνεται τρίγωνο  $ABΓ$ . Από το μέσο  $M$  της  $BΓ$  φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα  $MΔ$  ίσο και παράλληλο προς την πλευρά  $BA$  και ευθύγραμμο τμήμα  $ME$  ίσο και παράλληλο προς την πλευρά  $ΓA$ . Να αποδείξετε ότι:

- α)  $ΔA = AE$  (Μονάδες 8)  
β) Τα σημεία  $Δ, A$  και  $E$  είναι συνευθειακά. (Μονάδες 9)  
γ)  $ΔE = BΓ$ . (Μονάδες 8)



**102.** Δίνεται παραλληλόγραμμο  $ABΓΔ$  με  $AB = 2AD$ . Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας  $Δ$  του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την  $AB$  στο  $E$ .

- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AΔE$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)  
β) Είναι το σημείο  $E$  μέσο της πλευράς  $AB$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

**103.** Δίνεται παραλληλόγραμμο  $ABΓΔ$  και  $O$  το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε σημείο  $E$  του τμήματος  $AO$  και σημείο  $Z$  του τμήματος  $OG$ , ώστε  $OE = OZ$ .

Να αποδείξετε ότι:

- α)  $ΔE = BZ$  (Μονάδες 12)  
β) Το  $ΔEBZ$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

**104.** Δίνεται παραλληλόγραμμο  $ABΓΔ$  με  $AB = 2BΓ$  και  $E$  το μέσο της πλευράς  $AB$ . Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο  $EAD$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)  
β) Η  $ΔE$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $Δ$ . (Μονάδες 15)

**105.** Δίνεται τρίγωνο  $ABΓ$  και η διάμεσός του  $AM$ . Στην προέκταση της διαμέσου  $MΔ$  του τριγώνου  $AMΓ$  θεωρούμε σημείο  $E$  ώστε  $MΔ = ΔE$ . Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο  $AMΓE$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)  
β) Η  $BE$  διέρχεται από το μέσο της διαμέσου  $AM$ . (Μονάδες 13)

**106.** Θεωρούμε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  και  $A', \Gamma'$  οι προβολές των κορυφών  $A$  και  $\Gamma$  στη διαγώνιο  $B\Delta$ . Αν τα σημεία  $A'$  και  $\Gamma'$  δεν ταυτίζονται, να αποδείξετε ότι:

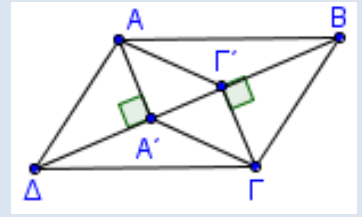
α)  $AA' \perp \Gamma\Gamma'$

(Μονάδες 8)

β)  $AA' = \Gamma\Gamma'$

(Μονάδες 10)

γ) Το τετράπλευρο  $A\Gamma'\Gamma A'$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)



**107.** Θεωρούμε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$ . Αν οι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών του  $\Delta$  και  $B$  τέμνουν τις πλευρές  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  στα σημεία  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα  $A\epsilon\Delta$  και  $B\Gamma Z$  είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) Το τετράπλευρο  $\Delta EBZ$  είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 13)

**108.** Στις πλευρές  $A\Delta$  και  $B\Gamma$  παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$  θεωρούμε σημεία  $E$  και  $Z$ , τέτοια, ώστε  $AE = \Gamma Z$ . Αν η ευθεία  $Z\epsilon$  τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  στα σημεία  $H$  και  $\Theta$ , να αποδείξετε ότι:

α)  $H\beta Z = \epsilon\Delta\Theta$

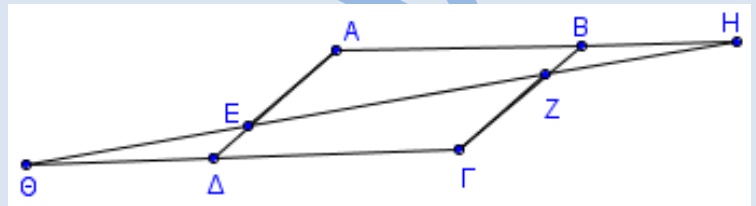
(Μονάδες 8)

β)  $\beta ZH = \Delta\epsilon\Theta$

(Μονάδες 8)

γ)  $\beta H = \Theta\Delta$

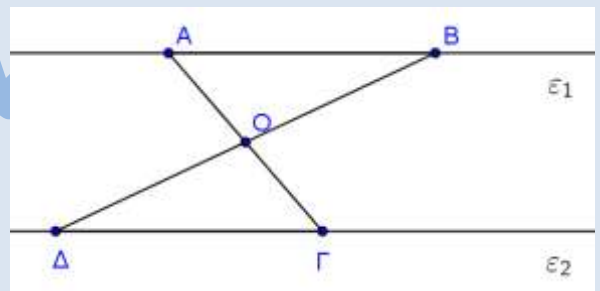
(Μονάδες 9)



**109.** Στο διπλανό σχήμα είναι  $\epsilon_1 \perp \epsilon_2$  και το σημείο  $O$  είναι το μέσο της  $B\Delta$ . Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα  $A\epsilon B$  και  $\Gamma\epsilon\Delta$  είναι ίσα και να αναφέρετε τα ίσα κύρια στοιχεία τους αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

β) το  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

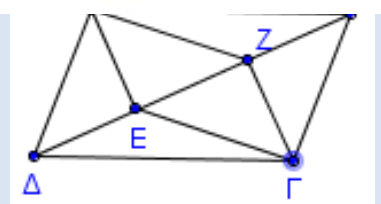


**110.** Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB > B\Gamma$ . Από τις κορυφές  $A$  και  $\Gamma$  φέρουμε τις κάθετες  $A\epsilon$  και  $\Gamma Z$  στη διαγώνιο  $B\Delta$ , που την τέμνουν στα σημεία  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α)  $A\epsilon = \Gamma Z$

(Μονάδες 15)

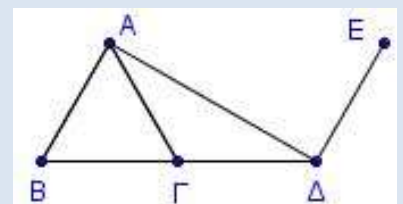
β) Το τετράπλευρο  $A\epsilon\Gamma Z$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)



**111.** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Στην προέκταση της  $B\Gamma$  (προς το  $\Gamma$ ) θεωρούμε τμήμα  $\Gamma\Delta = B\Gamma$ . Φέρουμε τμήμα  $\Delta\epsilon$  κάθετο στην  $A\Delta$  στο σημείο της  $\Delta$ , τέτοιο, ώστε  $\Delta\epsilon = B\Gamma$ . (Α και  $\epsilon$  στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς τη  $B\Delta$ ).

α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Delta$ . (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το  $AB\Delta\epsilon$  είναι παραλληλόγραμμο.

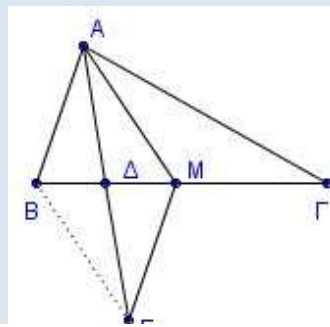


(Μονάδες 13)

**112.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  στο οποίο ισχύει  $B\Gamma = 2AB$  και έστω  $M$  το μέσο της  $B\Gamma$ . Αν η  $AD$  είναι διάμεσος του τριγώνου  $ABM$  και  $E$  σημείο στην προέκταση της  $AD$  ώστε  $AD = DE$ . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο  $ABEM$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)

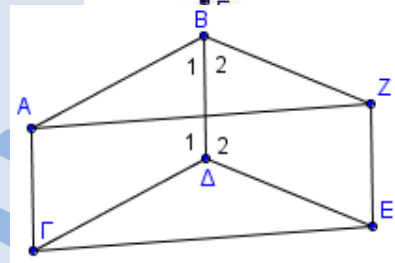
β)  $ME = M\Gamma$ . (Μονάδες 13)



**113.** Δίνονται τα παραλληλόγραμμο  $AB\Delta\Gamma$  και  $B\Delta EZ$ . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο  $A\Gamma EZ$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

β)  $ABZ = \Gamma \Delta E$  (Μονάδες 12)



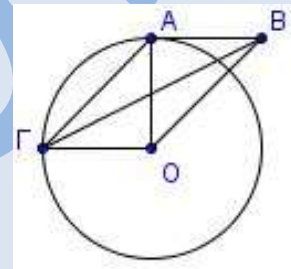
**114.** Έστω κύκλος με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $\rho$ . Θεωρούμε κάθετες ακτίνες  $OA, OG$  και εφαπτόμενο στο κύκλο τμήμα  $AB$  με  $AB = OG$ .

α) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα  $AO$  και  $B\Gamma$  διχοτομούνται.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου  $ABOG$ .

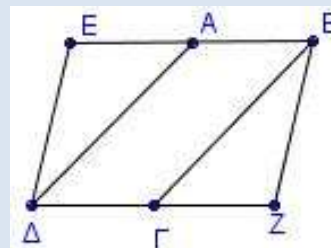
(Μονάδες 15)



**115.** Έστω παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$ . Προεκτείνουμε την πλευρά  $BA$  (προς το  $A$ ) και την πλευρά  $\Delta\Gamma$  (προς το  $\Gamma$ ) κατά τμήματα  $AE = AB$  και  $\Gamma Z = \Delta\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα  $A\Delta E$  και  $B\Gamma Z$  είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Το τετράπλευρο  $EBZ\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)



**116.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$  και  $M$  το μέσο της  $B\Gamma$ .

Προεκτείνουμε τη διάμεσο  $AM$  κατά τμήμα  $M\Delta = MA$ . Από το  $A$  φέρουμε παράλληλη προς τη  $B\Gamma$  η οποία τέμνει την προέκταση της  $\Delta\Gamma$  στο σημείο  $E$ . Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο  $AB\Delta\Gamma$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)

β)  $BM = \frac{AE}{2}$ . (Μονάδες 13)

**117.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ , στο οποίο η εξωτερική του γωνία  $\Gamma$  είναι διπλάσια της εσωτερικής του γωνίας  $A$ . Από την κορυφή  $A$  διέρχεται ημιευθεία  $Ax // B\Gamma$  στο ημιεπίπεδο  $(AB, \Gamma)$ . Στην ημιευθεία  $Ax$  θεωρούμε σημείο  $\Delta$  τέτοιο ώστε  $A\Delta = B\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

α) Η  $B\Delta$  διέρχεται από το μέσο του τμήματος  $A\Gamma$ . (Μονάδες 7)

β) Η  $\Gamma\Delta$  είναι διχοτόμος της  $\Gamma\epsilon\sigma$ . (Μονάδες 9)

γ) Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

**118.** Έστω ότι  $E$  και  $Z$  είναι τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο  $\Delta EBZ$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β)  $A\epsilon\Delta = BZ\Gamma$ . (Μονάδες 8)

γ) Οι  $\Delta E$  και  $BZ$  τριχοτομούν τη διαγώνιο  $A\Gamma$  του παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$ . (Μονάδες 9)

**119.** Έστω ότι  $E$  και  $Z$  είναι τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $ΓΔ$  παραλληλογράμμου  $ΑΒΓΔ$  αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο  $ΑΒΓΔ$  επιπλέον ισχύει  $ΑΒ > ΑΔ$ , να εξετάσετε αν είναι αληθείς οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

*Ισχυρισμός 1:* Το τετράπλευρο  $ΔΕΒΖ$  είναι παραλληλόγραμμο.

*Ισχυρισμός 2:*  $ΑΕΔ = ΒΖΓ$ .

*Ισχυρισμός 3:* Οι  $ΔΕ$  και  $ΒΖ$  είναι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών  $Δ$  και  $Β$ .

α) Στη περίπτωση που θεωρείται ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε. (Μονάδες 16)

β) Στη περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

**120.** Έστω ότι  $E$  και  $Z$  είναι τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $ΓΔ$  παραλληλογράμμου  $ΑΒΓΔ$  αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο  $ΑΒΓΔ$  επιπλέον ισχύουν  $ΑΒ > ΓΔ$  και η γωνία  $A$  είναι αμβλεία., να εξετάσετε αν είναι αληθείς οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

*Ισχυρισμός 1:* Το τετράπλευρο  $ΔΕΒΖ$  είναι παραλληλόγραμμο.

*Ισχυρισμός 2:* Τα τρίγωνα  $ΑΔΕ$  και  $ΒΓΖ$  είναι ίσα.

*Ισχυρισμός 3:* Τα τρίγωνα  $ΑΔΕ$  και  $ΒΓΖ$  είναι ισοσκελή.

α) Στη περίπτωση που θεωρείται ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε. (Μονάδες 16)

β) Στη περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

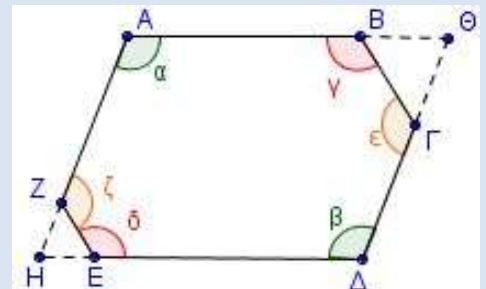
**121.** Στο κυρτό εξάγωνο  $ΑΒΓΔΕΖ$  ισχύουν τα εξής:  $α = β$ ,  $γ = δ$  και  $\hat{\epsilon} = \hat{\zeta}$ .

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα  $α + γ + \hat{\epsilon}$ . (Μονάδες 8)

β) Αν οι πλευρές  $AZ$  και  $ΔΕ$  προεκτεινόμενες τέμνονται στο  $H$  και οι πλευρές  $ΑΒ$  και  $ΔΓ$  προεκτεινόμενες τέμνονται στο  $Θ$ , να αποδείξετε ότι:

i. Οι γωνίες  $A$  και  $H$  είναι παραπληρωματικές.

ii. Το τετράπλευρο  $AΘΔH$  είναι παραλληλόγραμμο.



(Μονάδες 10)

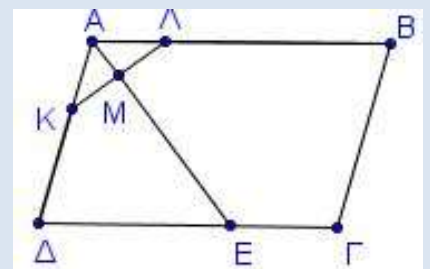
(Μονάδες 7)

**122.** Δίνεται παραλληλόγραμμο  $ΑΒΓΔ$  με  $ΑΒ > ΑΔ$ . Θεωρούμε σημεία  $K, Λ$  των  $ΑΔ$  και  $ΑΒ$  αντίστοιχα ώστε  $ΑΚ = ΑΛ$ . Έστω  $M$  το μέσο του  $ΚΛ$  και η προέκταση του  $ΑΜ$  (προς το  $M$ ) τέμνει τη  $ΔΓ$  στο σημείο  $E$ . Να αποδείξετε ότι:

α)  $ΑΔ = ΔΕ$ . (Μονάδες 8)

β)  $ΒΓ + ΓΕ = ΑΒ$ . (Μονάδες 10)

γ)  $Β = 2 \cdot ΑΛΚ$  (Μονάδες 7)



**123.** Δίνεται παραλληλόγραμμο  $ΑΒΓΔ$  και στην προέκταση της  $ΑΔ$  θεωρούμε σημείο  $E$  τέτοιο, ώστε  $ΔΕ = ΔΓ$  ενώ στη προέκταση της  $ΑΒ$  θεωρούμε σημείο  $Z$  τέτοιο, ώστε  $ΒΖ = ΒΓ$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $ΒΓΖ = ΔΓΕ$  (Μονάδες 10)

ii. Τα σημεία  $Z, Γ, Ε$  είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)

β) Ένας μαθητής για να αποδείξει ότι τα σημεία  $Z, Γ, Ε$  είναι συνευθειακά ανέπτυξε τον παρακάτω συλλογισμό. «Έχουμε:

$B\Gamma Z = \Delta E\Gamma$  (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων  $\Delta E$  και  $B\Gamma$  που τέμνονται από τη  $Z E$ ) και  $B\Gamma Z = \Delta E\Gamma$  (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων  $\Delta E$  και  $B\Gamma$  που τέμνονται από τη  $\Delta\Gamma$ ). Όμως  $\Delta\Gamma E + \Gamma\Delta E + \Delta E\Gamma = 180^\circ$  (ως άθροισμα των γωνιών του τριγώνου  $\Delta E\Gamma$ ). Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα:  $\Delta\Gamma E + B\Gamma\Delta + B\Gamma Z = 180^\circ$ . Οπότε τα σημεία  $Z, \Gamma, E$  είναι συνευθειακά.»

Όμως ο καθηγητής υπέδειξε ένα λάθος στο συλλογισμό αυτό. Να βρείτε το λάθος στο συγκεκριμένο συλλογισμό. (Μονάδες 5)

**124.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Από το μέσο  $M$  του  $B\Gamma$  φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα  $M\Delta$  ίσο και παράλληλο με το  $BA$  και ευθύγραμμο τμήμα  $ME$  ίσο και παράλληλο με το  $\Gamma A$  (τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  είναι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από το  $B\Gamma$  και το σημείο  $A$ ). Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία  $\Delta, A, E$  είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)

β) Η περίμετρος του τριγώνου  $M\Delta E$  είναι ίση με την περίμετρο του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 9)

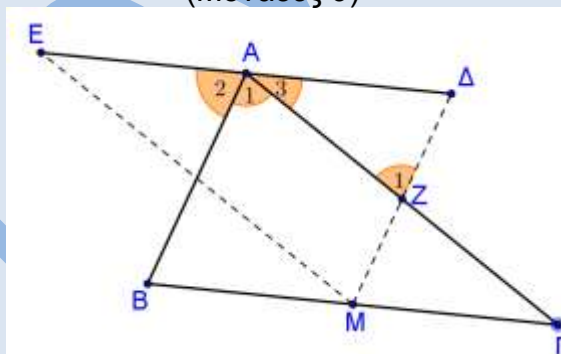
γ) Όταν ένας καθηγητής έθεσε στους μαθητές του το ερώτημα αν τα σημεία  $\Delta, A, E$  είναι συνευθειακά, ένας από αυτούς έκανε το παρακάτω σχήμα και απάντησε ως εξής :

$\hat{Z}_1 = \hat{A}_1$  (εντός εναλλάξ των  $AB//M\Delta$  που τέμνονται από  $AZ$ )

$A\hat{\Delta}Z = \hat{A}_2$  (εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των  $AB//M\Delta$  που τέμνονται από  $\Delta E$ )

Όμως  $Z_1 + A_3 + A\hat{\Delta}Z = 180^\circ$  (άθροισμα γωνιών του

τριγώνου  $A\Delta Z$ ). Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε:  $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180^\circ$ . Οπότε  $\Delta, A, E$  συνευθειακά. Όμως ο καθηγητής είπε ότι υπάρχει λάθος στο συλλογισμό. Μπορείτε να εντοπίσετε το λάθος του μαθητή; (Μονάδες 6)

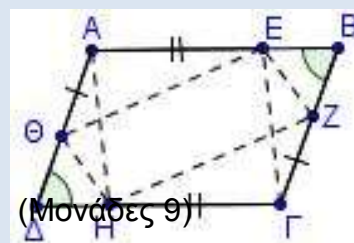


**125.** Σε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  θεωρούμε σημεία  $E, Z, H, \Theta$  στις πλευρές  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$  αντίστοιχα, με  $AE = \Gamma H$  και  $BZ = \Delta\Theta$ . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο  $A E \Gamma H$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)

β) Το τετράπλευρο  $E Z H \Theta$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

γ) Τα τμήματα  $A\Gamma, B\Delta, E H$  και  $Z\Theta$  διέρχονται από το ίδιο σημείο. (Μονάδες 9)

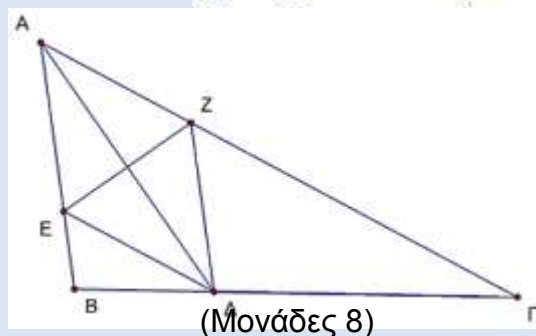


**126.** Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  και  $A\Delta$  η διχοτόμος της γωνίας  $A$ , για την οποία ισχύει ότι  $A\Delta = \Delta\Gamma$ . Η  $\Delta E$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $A\Delta B$  και η  $\Delta Z$  παράλληλη στην  $AB$ . Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα  $E\Delta$  και  $A\Gamma$  είναι παράλληλα. (Μονάδες 9)

β) Το τρίγωνο  $E\Delta A$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) Τα τμήματα  $A\Delta$  και  $E Z$  διχοτομούνται.

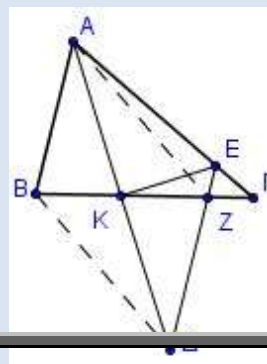


**127.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A K$  διχοτόμο της γωνίας  $A$ . Στην προέκταση της  $A K$  θεωρούμε σημείο  $\Delta$  ώστε  $A K = K\Delta$ . Η παράλληλη από το  $\Delta$  προς την  $AB$  τέμνει τις  $A\Gamma$  και  $B\Gamma$  στα  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο  $A E \Delta$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

β) Η  $E K$  είναι μεσοκάθετος του  $A\Delta$ . (Μονάδες 6)

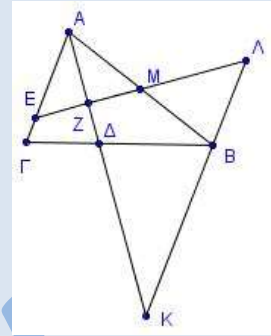
γ) Τα τρίγωνα  $A K B$  και  $K\Delta Z$  είναι ίσα. (Μονάδες 7)



δ) Το τετράπλευρο ΑΖΔΒ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)

**128.** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ, ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α και Μ το μέσον της ΑΒ. Η κάθετη από το Μ στην ΑΔ τέμνει το ΑΓ στο Ε. Η παράλληλη από το Β στο ΑΓ τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Κ και την προέκταση της ΕΜ στο Λ. Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα ΑΕΜ, ΜΒΛ και ΑΒΚ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 15)  
 β) Το τετράπλευρο ΑΛΒΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

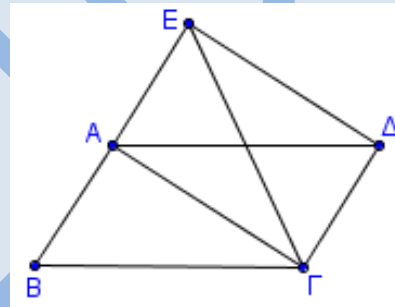


### §5.3

**129.** Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ, αν Μ και Ν είναι τα μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:  
 α)  $ΜΔ = ΜΓ$  (Μονάδες 12)  
 β) Η ευθεία ΜΝ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΓΔ. (Μονάδες 13)

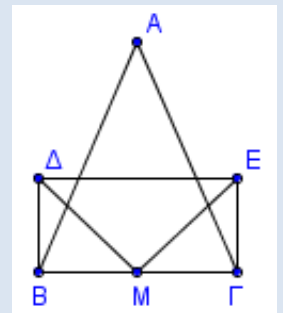
**130.** Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και το ΑΓΔΕ είναι ορθογώνιο. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το σημείο Α είναι μέσο του ΒΕ. (Μονάδες 8)  
 β) Το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)  
 γ)  $ΒΓ Α = Α Δ Ε$  (Μονάδες 8)



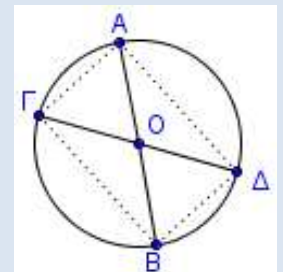
**131.** Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με  $ΑΒ = ΑΓ$  και Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ. Στα σημεία Β και Γ φέρουμε κάθετες στη ΒΓ προς το ίδιο μέρος και θεωρούμε σε αυτές σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, τέτοια, ώστε  $ΜΔ = ΜΕ$ . Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 13)  
 β) Το τετράπλευρο ΒΔΕΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 13)



**132.** Σε κύκλο κέντρου Ο φέρουμε δύο διαμέτρους ΑΒ και ΓΔ. Να αποδείξετε ότι:

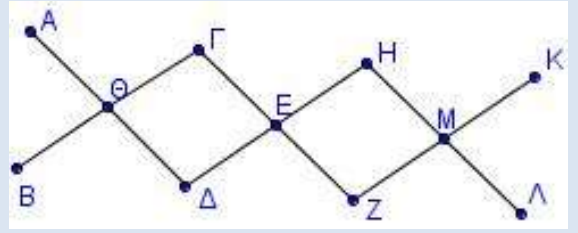
- α) Οι χορδές ΑΓ και ΒΔ του κύκλου είναι ίσες. (Μονάδες 13)  
 β) Το τετράπλευρο ΑΓΒΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 12)



**133.** Έστω ορθογώνιο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ν και Κ των ΑΒ και ΔΓ αντίστοιχα, τέτοια ώστε  $ΑΝ = ΚΓ$ . Να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα ΑΝΔ και ΒΓΚ είναι ίσα. (Μονάδες 12)  
 β) το τετράπλευρο ΝΒΚΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

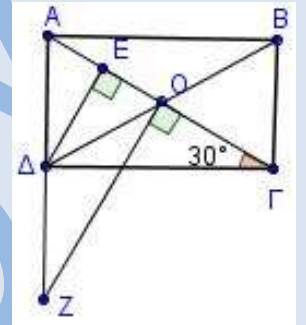
**134.** Στην διπλανή εικόνα φαίνεται μια κρεμάστρα τοίχου η οποία αποτελείται από έξι ίσα ευθύγραμμα κομμάτια ξύλου (ΑΔ, ΒΓ, ΓΖ, ΔΗ, ΖΚ, ΗΛ) που είναι στερεωμένα με έντεκα καρφιά (Α, Β, Γ, Δ, Θ, Ε, Μ, Η, Κ, Λ, Ζ). Αν το σημείο Θ, είναι μέσο των τμημάτων ΑΔ και ΒΓ ενώ το σημείο Ε είναι μέσο των τμημάτων ΓΖ και ΔΗ, να αποδείξετε ότι:



- Το τετράπλευρο ΓΗΖΔ είναι ορθογώνιο.
- Τα σημεία Β, Δ, Ζ είναι συνευθειακά.
- Το τετράπλευρο ΑΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 10)  
(Μονάδες 9)  
(Μονάδες 6)

**135.** Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι  $\Delta \Gamma A = 30^\circ$  και Ο το κέντρο του. Φέρουμε  $\Delta E \perp A\Gamma$ .

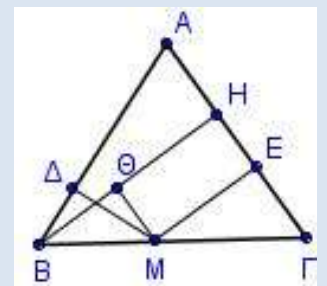


- Να αποδείξετε ότι η γωνία ΑΔΓ χωρίζεται από τη ΔΕ και τη διαγώνιο ΔΒ σε τρεις ίσες γωνίες. (Μονάδες 13)
- Φέρουμε κάθετη στην ΑΓ στο σημείο Ο η οποία τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Ζ. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΖΟ και ΑΒΓ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

**136.** Έστω  $\epsilon_1, \epsilon_2$  δύο κάθετες ευθείες που τέμνονται στο Ο και τυχαίο σημείο Μ του επιπέδου που δεν ανήκει στις ευθείες.

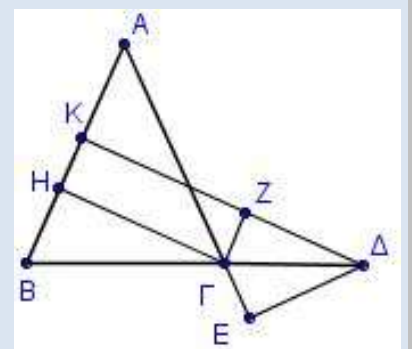
- Αν  $M_1$  είναι το συμμετρικό του Μ ως προς την  $\epsilon_1$  και  $M_2$  το συμμετρικό του  $M_1$  ως προς την  $\epsilon_2$ , να αποδείξετε ότι:
  - $OM = OM_1$ . (Μονάδες 6)
  - Τα σημεία Μ, Ο και  $M_2$  είναι συνευθειακά. (Μονάδες 8)
  - Το τρίγωνο  $MM_1M_2$  είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)
- Αν  $M_3$  είναι το συμμετρικό του  $M_2$  ως προς την  $\epsilon_1$ , τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το  $MM_1M_2M_3$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

**137.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με  $AB = AG$ , τυχαίο σημείο Μ της βάσης του ΒΓ και το ύψος του ΒΗ. Από το Μ φέρουμε κάθετες ΜΔ, ΜΕ και ΜΘ στις ΑΒ, ΑΓ και ΒΗ αντίστοιχα.



- Να αποδείξετε ότι:
- Το τετράπλευρο ΜΕΗΘ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)
  - $B\Theta = \Delta M$ . (Μονάδες 9)
  - $M\Delta + ME = BH$ . (Μονάδες 7)

**138.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με  $AB = AG$  και σημείο Δ στην προέκταση της ΒΓ. Από το Δ φέρουμε ΔΚ κάθετη στην ΑΒ και ΔΕ κάθετη στην προέκταση της ΑΓ. Από το σημείο Γ φέρουμε ΓΗ κάθετη στην ΑΒ και ΓΖ κάθετη στην ΚΔ. Να αποδείξετε ότι:

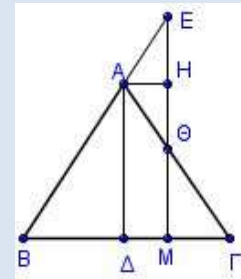


- Η γωνία ΖΓΔ είναι ίση με τη Β. (Μονάδες 4)
- Η ΓΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΖΓΕ. (Μονάδες 4)
- Το τρίγωνο ΔΖΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

δ)  $\Delta K - \Delta E = H\Gamma$

(Μονάδες 8)

**139.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και τυχαίο σημείο  $M$  της πλευράς  $B\Gamma$ . Από το  $M$  φέρουμε ευθεία κάθετη στην πλευρά  $B\Gamma$  που τέμνει τις ευθείες  $AB$  και  $A\Gamma$  στα σημεία  $E$  και  $\Theta$  αντίστοιχα. Αν  $\Delta\Delta$  και  $AH$  τα ύψη των τριγώνων  $AB\Gamma$  και  $A\Theta E$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



α)  $\Delta A\Theta = 90^\circ$  (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο  $A\Theta E$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ)  $M\Theta + ME = 2\Delta\Delta$ . (Μονάδες 9)

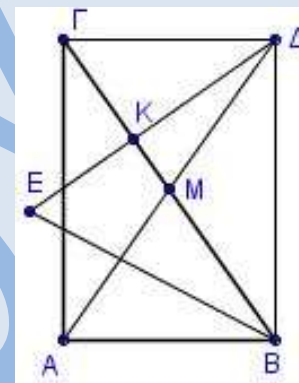
**140.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A = 90^\circ$ . Φέρουμε τη διάμεσό του  $AM$  την οποία προεκτείνουμε, προς το μέρος του  $M$ , κατά τμήμα  $M\Delta = AM$ . Θεωρούμε ευθεία  $\Delta K$  κάθετη στη  $B\Gamma$ , η οποία τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας  $B$  στο  $E$ .

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο  $AB\Delta\Gamma$  είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

β)  $\angle KEB = 90^\circ - \frac{B}{2}$  (Μονάδες 8)

γ)  $\Delta E = B\Delta$ . (Μονάδες 9)

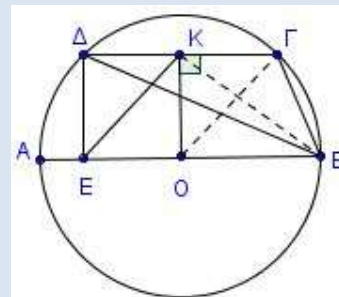


**141.** Έστω κύκλος με κέντρο  $O$  και διάμετρο  $AB$ . Φέρνουμε χορδή  $\Gamma\Delta \perp AB$  και  $K$  το μέσο της. Από το  $\Delta$  φέρνουμε το τμήμα  $\Delta E$  κάθετο στη  $\Delta\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο  $K\Gamma O E$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β)  $\Delta EK = \frac{\Delta O\Gamma}{2}$  (Μονάδες 12)

γ)  $KE < KB$  (Μονάδες 5)



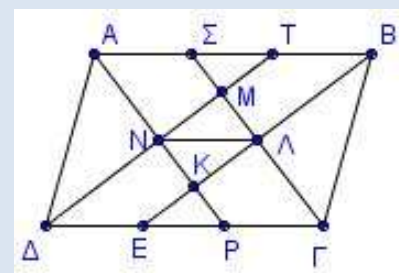
**142.** Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB > A\Delta$  και οι διχοτόμοι των γωνιών του  $AP$ ,  $BE$ ,  $\Gamma\Sigma$  και  $\Delta T$  (όπου  $P, E$  στην  $\Delta\Gamma$  και  $\Sigma, T$  στην  $AB$ ) τέμνονται στα σημεία  $K, \Lambda, M$  και  $N$  όπως στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο  $\Delta EBT$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

β) το τετράπλευρο  $K\Lambda MN$  είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

γ)  $\Lambda N \perp AB$  (Μονάδες 5)

δ)  $\Lambda N = AB - A\Delta$  (Μονάδες 5)



**143.** Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$  και το ύψος του  $A\Delta$ . Προεκτείνουμε το  $A\Delta$  (προς το  $\Delta$ ) κατά τμήμα  $\Delta E = A\Delta$ . Έστω  $K$  το συμμετρικό του  $B$  ως προς το  $\Delta$ .

Να αποδείξετε ότι:

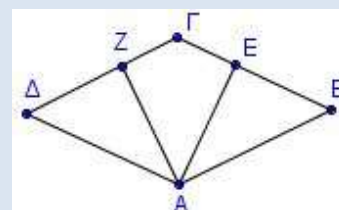
α) Το τρίγωνο  $ABK$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

β) Το τετράπλευρο  $ABEK$  είναι ρόμβος. (Μονάδες 13)

**144.** Το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  του διπλανού σχήματος είναι παραλληλόγραμμο. Έστω ότι  $AE \perp B\Gamma$  και  $AZ \perp \Delta\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  είναι ρόμβος, τότε  $AZ = AE$ .

β) Αν για το παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  ισχύει  $AZ = AE$ , τότε αυτό είναι ρόμβος. (Μονάδες 13)





**145.** Σε κύκλο κέντρου  $O$ , έστω  $OA$  μια ακτίνα του. Φέρουμε τη μεσοκάθετη της  $OA$  που τέμνει τον κύκλο στα σημεία  $B$  και  $\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο  $OBA$  είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 13)

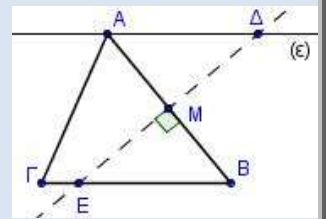
β) Το τετράπλευρο  $OBA\Gamma$  είναι ρόμβος. (Μονάδες 12)

**146.** Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Φέρουμε από την κορυφή  $A$  ευθεία  $(\epsilon)$  παράλληλη στη  $B\Gamma$ . Η μεσοκάθετος της πλευράς  $AB$  τέμνει την  $(\epsilon)$  στο  $\Delta$  και την  $B\Gamma$  στο  $E$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $\Delta A = \Delta B$  και  $EA = EB$ . (Μονάδες 6)

β) Αν  $M$  το μέσο του  $AB$ , να συγκρίνετε τα τρίγωνα  $AM\Delta$  και  $EMB$ . (Μονάδες 10)

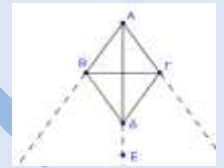
γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $A\Delta B E$  είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)



**147.** Δίνεται ρόμβος  $AB\Delta\Gamma$ . Στην προέκταση της διαγωνίου  $A\Delta$  (προς το  $\Delta$ ) παίρνουμε τυχαίο σημείο  $E$ . Να αποδείξετε ότι:

α) Το  $E$  ισαπέχει από τις προεκτάσεις των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  (προς το μέρος των  $B$  και  $\Gamma$  αντίστοιχα). (Μονάδες 10)

β) Το σημείο  $E$  ισαπέχει από τα σημεία  $B$  και  $\Gamma$ . (Μονάδες 15)



**148.** Δίνονται οι ακόλουθες προτάσεις  $\Pi 1$  και  $\Pi 2$ :

$\Pi 1$ : Αν ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, τότε οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.

$\Pi 2$ : Αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες, τότε το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος.

α) Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προτάσεις  $\Pi 1$  και  $\Pi 2$  αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 20)

β) Στην περίπτωση που οι δύο προτάσεις ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως μια ενιαία πρόταση. (Μονάδες 5)

**149.** Δίνεται κύκλος κέντρου  $O$  και δυο μη αντιδιαμετρικά σημεία του  $A$  και  $B$ . Φέρουμε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία  $A$  και  $B$  οι οποίες τέμνονται στο σημείο  $\Gamma$ . Φέρουμε επίσης και τα ύψη  $A\Delta$  και  $BE$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  τα οποία τέμνονται στο σημείο  $H$ . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο  $BHA$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο  $OBHA$  είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)

γ) Τα σημεία  $O, H, \Gamma$  είναι συνευθειακά. (Μονάδες 8)

**150.** Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  και σημεία  $K, \Lambda$  της διαγωνίου του  $B\Delta$ , τέτοια, ώστε να ισχύει  $BK = K\Lambda = \Lambda\Delta$ .

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $AK\Gamma\Lambda$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

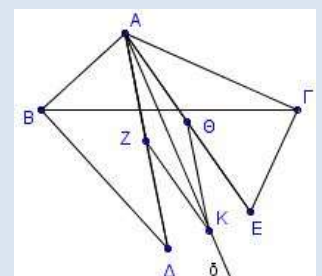
β) Να αποδείξετε ότι, αν το αρχικό παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  είναι ρόμβος, τότε και το  $AK\Gamma\Lambda$  είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

γ) Ποια πρέπει να είναι η σχέση των διαγωνίων του αρχικού παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$ , ώστε το  $AK\Gamma\Lambda$  να είναι ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

**151.** Δίνεται αμβλυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$  και  $A > 90^\circ$ . Φέρνουμε τμήμα  $B\Delta$  κάθετο στην  $AB$  και με  $B\Delta = A\Gamma$  και τμήμα  $\Gamma E$  κάθετο στην  $A\Gamma$  με  $\Gamma E = AB$ . Θεωρούμε τα μέσα  $Z$  και  $\Theta$  των  $A\Delta$  και  $A E$  καθώς και τη διχοτόμο  $A\delta$  της γωνίας  $\Delta A E$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $A\Delta = A E$ . (Μονάδες 9)

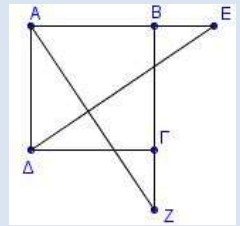
β) Αν  $K$  τυχαίο σημείο της διχοτόμου  $A\delta$ , να αποδείξετε ότι το  $K$  ισαπέχει από τα μέσα  $Z$  και  $\Theta$ . (Μονάδες 9)



γ) Αν το Κ είναι σημείο της διχοτόμου Αδ τέτοιο, ώστε  $KZ = AZ$ , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΖΚΘ είναι ρόμβος. (Μονάδες 7)

**152.** Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ και σημεία Ε και Ζ στις προεκτάσεις των ΑΒ (προς το Β) και ΒΓ (προς το Γ) αντίστοιχα, ώστε  $BE = ΓΖ$ . Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΕΔ είναι ίσα. (Μονάδες 12)  
 β) Οι γωνίες ΕΔΓ και ΑΖΒ είναι ίσες. (Μονάδες 13)

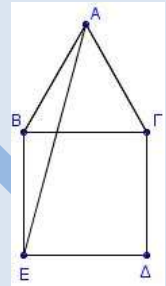


**153.** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και εκτός αυτού κατασκευάζουμε τετράγωνο ΒΓΔΕ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες

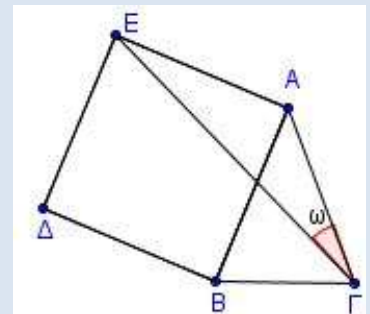
- i. ΑΒΕ (Μονάδες 8)  
 ii. ΒΕΑ (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)



**154.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με  $AB = ΑΓ$ . Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου το τετράγωνο ΑΒΔΕ. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)  
 β)  $2\epsilon Γ Α = 90^\circ - ΒΑΓ$ . (Μονάδες 15)



**155.** Σε κύκλο κέντρου Ο φέρουμε τις διαμέτρους του ΑΓ και ΒΔ.

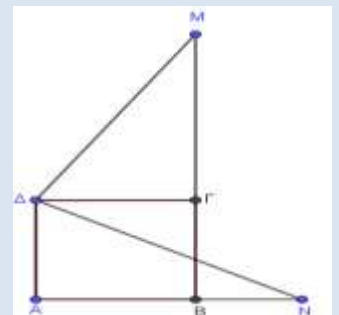
- α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 13)  
 β) Ποια σχέση πρέπει να έχουν οι διάμετροι ΑΓ και ΒΔ ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να είναι τετράγωνο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

**156.** Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και έξω από αυτό, κατασκευάζουμε τέσσερα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΕ, ΒΓΖ, ΓΔΗ, ΔΑΘ.

- α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι ρόμβος. (Μονάδες 15)  
 β) Αν το αρχικό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, τότε το ΕΖΗΘ τι είδους παραλληλόγραμμο είναι; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

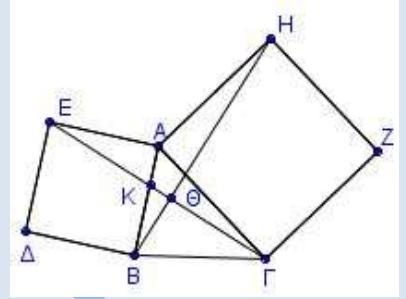
**157.** Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ κατά τμήμα ΒΝ και την πλευρά ΒΓ κατά τμήμα ΓΜ = ΑΝ. Να αποδείξετε ότι:

- α)  $\Delta N = \Delta M$  (Μονάδες 12)  
 β)  $\Delta N \perp \Delta M$  (Μονάδες 13)



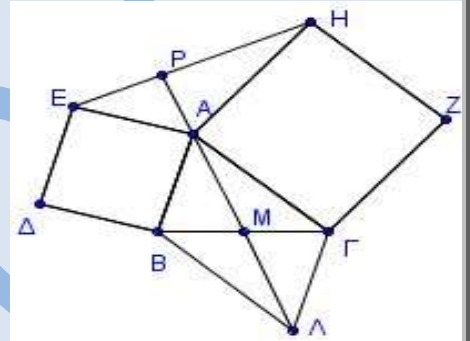
**158.** Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  και στο εξωτερικό του σχηματίζονται τα τετράγωνα  $AB\Delta E$  και  $A\Gamma ZH$ . Να αποδείξετε ότι:

- α)  $EAH = AB\Gamma + A\Gamma B$  (Μονάδες 8)  
 β)  $EG = BH$  (Μονάδες 9)  
 γ) Η  $EG$  είναι κάθετη στη  $BH$ . (Μονάδες 8)



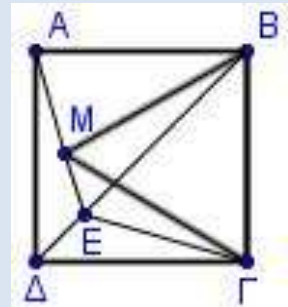
**159.** Εκτός τριγώνου  $AB\Gamma$  κατασκευάζουμε τετράγωνα  $AB\Delta E$  και  $A\Gamma ZH$ . Αν  $M$  το μέσο του  $B\Gamma$  και  $\Lambda$  σημείο στην προέκταση της  $AM$  τέτοιο, ώστε  $AM = M\Lambda$ , να αποδείξετε ότι:

- α)  $\Gamma\Lambda = AE$ . (Μονάδες 10)  
 β)  $A\Gamma\Lambda = EAH$ . (Μονάδες 10)  
 γ) Η προέκταση της  $MA$  (προς το  $A$ ) τέμνει κάθετα την  $EH$ . (Μονάδες 5)



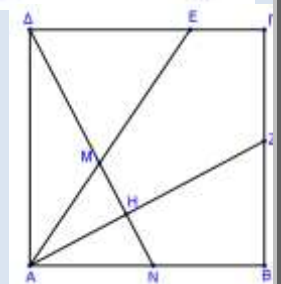
**160.** Δίνεται τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  και εντός αυτού ισόπλευρο τρίγωνο  $MB\Gamma$ . Αν η προέκταση της  $AM$  τέμνει τη  $B\Delta$  στο σημείο  $E$ , να αποδείξετε ότι:

- α)  $\Delta AE = 15^\circ$ . (Μονάδες 8)  
 β) Τα τρίγωνα  $\Delta AE$  και  $\Delta E\Gamma$  είναι ίσα. (Μονάδες 8)  
 γ) Η  $\Gamma E$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\Delta\Gamma M$ . (Μονάδες 9)



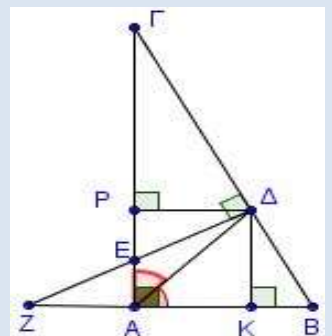
**161.** Δίνεται τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  και τυχαίο σημείο  $E$  στην πλευρά  $\Delta\Gamma$ . Φέρουμε τη διχοτόμο  $AZ$  της γωνίας  $EAB$  και τη  $\Delta H$  κάθετη από το  $\Delta$  προς την  $AZ$ , η οποία τέμνει την  $AE$  στο  $M$  και την  $AB$  στο  $N$ . Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα  $A\Delta N$  και  $ABZ$  είναι ίσα. (Μονάδες 8)  
 β)  $AM = AN$  και  $\Delta E = EM$ . (Μονάδες 10)  
 γ)  $AE = \Delta E + BZ$  (Μονάδες 7)



**162.** Σε ορθογώνιο  $AB\Gamma$  ( $A = 90^\circ$ ) φέρουμε τη διχοτόμο του  $\Delta$ . Έστω  $K$  και  $P$  οι προβολές του  $\Delta$  στις  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα. Η κάθετη της  $B\Gamma$  στο σημείο  $\Delta$  τέμνει την πλευρά  $A\Gamma$  στο  $E$  και την προέκταση της πλευράς  $AB$  (προς το  $A$ ) στο σημείο  $Z$ .

- α) Να αποδείξετε ότι:  
 i.  $B = \Delta E\Gamma$  (Μονάδες 8)  
 ii.  $\Delta E = \Delta B$  (Μονάδες 8)  
 β) Να υπολογίσετε τη γωνία  $\Delta\Gamma Z$ . (Μονάδες 9)



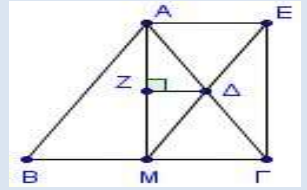
### §5.6-5.8

**163.** Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $A = 90^\circ$ ) και  $AD$  η

διχοτόμος της γωνίας  $A$ . Από το σημείο  $D$  φέρουμε παράλληλη προς την  $AB$  που τέμνει την πλευρά  $AG$  στο σημείο  $E$ . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο  $\Delta E\Gamma$  είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 13)

β)  $\Delta E = \frac{A\Gamma}{2}$  (Μονάδες 12)



**164.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και η διάμεσός του  $AM$ . Στην προέκταση της διαμέσου  $MD$  του τριγώνου  $AM\Gamma$  θεωρούμε σημείο  $E$  ώστε  $MD = DE$ . Αν το σημείο  $Z$  είναι η προβολή του  $D$  στην  $AM$ , να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο  $AM\Gamma E$  είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 12)

β)  $\Delta Z = \frac{B\Gamma}{4}$ . (Μονάδες 13)

**165.** Θεωρούμε τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα μέσα  $\Delta$ ,  $E$  και  $Z$  των πλευρών του  $AB$ ,  $B\Gamma$  και  $\Gamma A$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

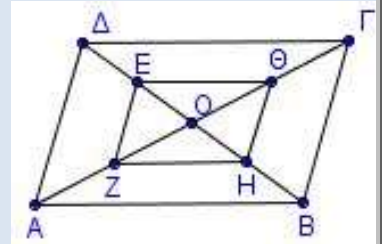
α) Το τετράπλευρο  $\Delta BEZ$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

β) Η ευθεία  $\Delta Z$  διχοτομεί το τμήμα  $AE$ . (Μονάδες 12)

**166.** Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  και  $O$  είναι το κέντρο του. Έστω  $E$ ,  $Z$ ,  $H$ ,  $\Theta$  τα μέσα των  $OD$ ,  $OA$ ,  $OB$  και  $OG$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο  $EZH\Theta$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

β) Αν η περίμετρος του παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$  είναι 40, να βρείτε τη περίμετρο του  $EZH\Theta$ . (Μονάδες 15)

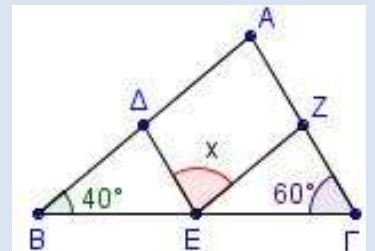


**167.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $B = 40^\circ$  και  $\Gamma = 60^\circ$ . Επιπλέον τα σημεία  $\Delta$ ,  $E$  και  $Z$  είναι τα μέσα των πλευρών  $AB$ ,  $B\Gamma$  και  $\Gamma A$  αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία  $A$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι  $\Delta E \parallel A\Gamma$  και  $Z E \parallel AB$ . (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $B\Delta E$ . (Μονάδες 8)

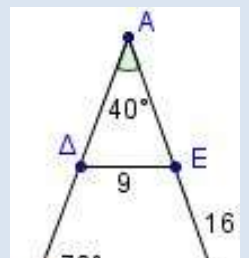


**168.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A = 40^\circ$  και  $B = 70^\circ$ . Τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  είναι τα μέσα των  $AB$  και  $A\Gamma$  με  $\Delta E = 9$  και  $E\Gamma = 16$ .

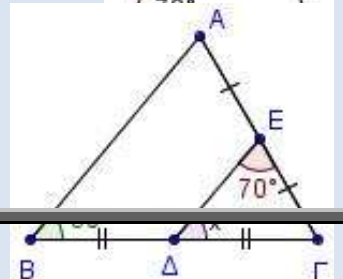
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές και να βρείτε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι  $B\Gamma = 18$ . (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε τη περίμετρο του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 9)



**169.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $B = 50^\circ$ . Έστω ότι τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  είναι



τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα, τέτοια, ώστε  $\Delta E\Gamma = 70^\circ$ .

α) Να δικαιολογήσετε γιατί  $\Delta E \square AB$ . (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε

i. τη γωνία  $x$ . (Μονάδες 8)

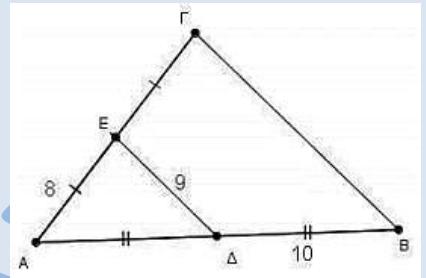
ii. τις γωνίες Α και Γ του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 9)

**170.** Στο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος τα σημεία Δ και τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα,  $AE = 8$ ,  $E\Delta = 9$  και  $\Delta B = 10$ .

α) Να αποδείξετε ότι οι ΒΓ και ΔΕ είναι παράλληλες. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ. (Μονάδες 8)

γ) Να συγκρίνετε τις περιμέτρους του τριγώνου ΑΒΓ και του τετραπλεύρου ΔΕΓΒ. (Μονάδες 9)

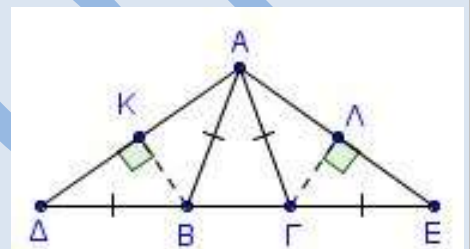


**171.** Στο διπλανό σχήμα ισχύουν  $AB = BD = AG = GE = 5$ ,  $BK \perp AD$  και  $GL \perp AE$ .

α) Να προσδιορίσετε ως προς τις πλευρές, το είδος των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΕ. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα. (Μονάδες 10)

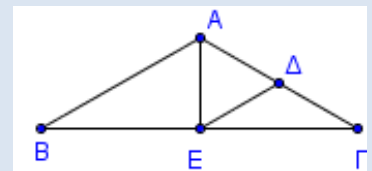
γ) Αν η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι 12, να υπολογίσετε το τμήμα ΚΛ. (Μονάδες 9)



**172.** Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με  $AB = AG$  και  $B = 30^\circ$ . Θεωρούμε Δ και Ε τα μέσα των ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ισοσκελές και να υπολογίσετε τις γωνίες του. (Μονάδες 16)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 9)



**173.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ( $AB < AG$ ) και η διχοτόμος του ΑΔ. Φέρουμε από το Β κάθετη στην ΑΔ που τέμνει την ΑΔ στο Ε και την πλευρά ΑΓ στο Η. Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΒΗ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

β)  $EM \square HG$  (Μονάδες 8)

γ)  $EM = \frac{AG - AB}{2}$  (Μονάδες 8)

**174.** α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα των πλευρών ισοσκελούς τριγώνου είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε ανάλογη πρόταση για

i. ισόπλευρο τρίγωνο. (Μονάδες 8)

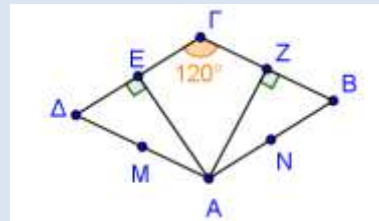
ii. ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο. (Μονάδες 9)

**175.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Κ,Λ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Θεωρούμε τυχαίο σημείο Μ στο εσωτερικό του τριγώνου και Δ,Ε τα συμμετρικά του Μ ως προς Κ και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι  $\Delta E \square B\Gamma$ . (Μονάδες 15)

β) Στη περίπτωση που το σημείο M είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, και Δ,Ε τα συμμετρικά του M ως προς Κ και Λ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ,Α και Ε είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)

**176.** Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με  $\Gamma = 120^\circ$ . Έστω ΑΕ και ΑΖ οι αποστάσεις του σημείου Α από τις πλευρές ΓΔ και ΓΒ αντίστοιχα.



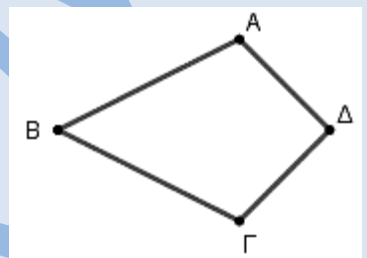
α) Να αποδείξετε ότι:

- i. Τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΓΔ και ΓΒ αντίστοιχα. (Μονάδες 8)  
 ii.  $ΑΓ \perp ΕΖ$  (Μονάδες 8)

β) Αν Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΜΝΖ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

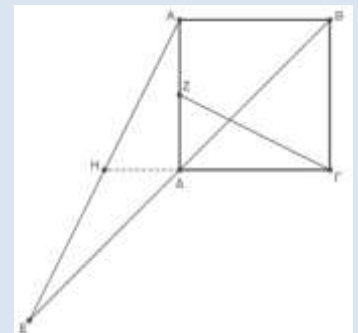
**177.** Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με  $ΒΑ=ΒΓ$  και  $Α=Γ$ . Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)  
 β) Οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέμνονται κάθετα. (Μονάδες 6)  
 γ) Το τετράπλευρο που έχει για κορυφές τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 10)



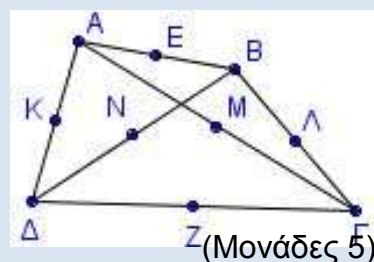
**178.** Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Έστω Ε το συμμετρικό σημείο του Β ως προς το Δ και Ζ είναι το μέσο της ΑΔ. Η προέκταση της ΓΔ τέμνει την ΑΕ στο Η. Να αποδείξετε ότι:

- α)  $\Delta Η = \frac{ΑΒ}{2}$  (Μονάδες 8)  
 β) Τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΖΔΓ είναι ίσα. (Μονάδες 9)  
 γ) Η ΓΖ είναι κάθετη στην ΑΕ. (Μονάδες 8)



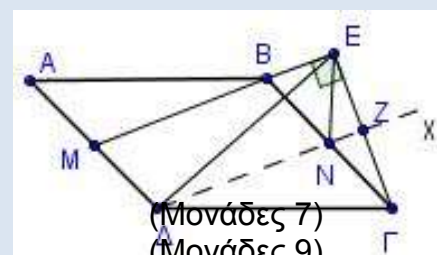
**179.** Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με  $ΑΔ=ΒΓ$ . Αν Ε,Λ,Ζ,Κ,Ν,Μ είναι τα μέσα των ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,ΔΑ,ΔΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο ΕΜΖΝ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)  
 β) Η ΕΖ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΜΝ.  
 γ)  $ΚΕ = ΖΛ$  (Μονάδες 5)  
 δ) Τα τμήματα ΚΛ,ΜΝ,ΕΖ διέρχονται από το ίδιο σημείο. (Μονάδες 5)



**180.** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Θεωρούμε το μέσο Μ της πλευράς ΑΔ και ΓΕ κάθετος από τη κορυφή Γ στην ευθεία ΜΒ ( $ΓΕ \perp ΜΒ$ ). Η παράλληλη από την κορυφή Δ στην ευθεία ΜΒ ( $\Delta x \parallel ΜΒ$ ) τέμνει τις ΒΓ και ΓΕ στα σημεία Ν,Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

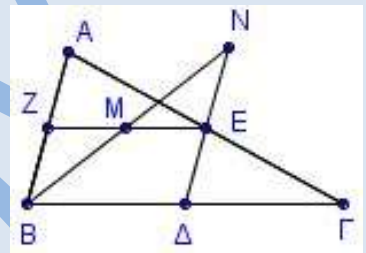
- α) Το τετράπλευρο ΜΒΝΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)  
 β) Το σημείο Ζ είναι μέσον του ευθυγράμμου τμήματος ΓΕ. (Μονάδες 9)  
 γ)  $\Delta Ε = \Delta Γ$ . (Μονάδες 9)



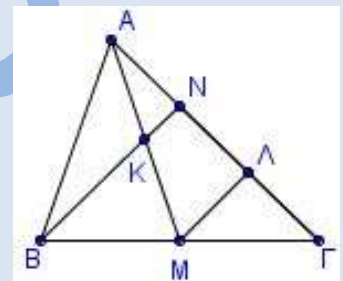
- 181.** α) Σε ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  θεωρούμε  $K, \Lambda, M, N$  τα μέσα των πλευρών του  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $K\Lambda M N$  είναι ρόμβος. (Μονάδες 15)  
 β) Σε ένα τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  τα μέσα  $K, \Lambda, M, N$  των πλευρών του  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$  αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  πρέπει απαραίτητα να είναι ορθογώνιο; Να τεκμηριώσετε τη θετική ή αρνητική σας απάντηση. (Μονάδες 10)

- 182.** α) Σε ρόμβο  $AB\Gamma\Delta$  θεωρούμε  $K, \Lambda, M, N$  τα μέσα των πλευρών του  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $K\Lambda M N$  είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 13)  
 β) Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός ορθογωνίου είναι κορυφές ρόμβου. (Μονάδες 12)

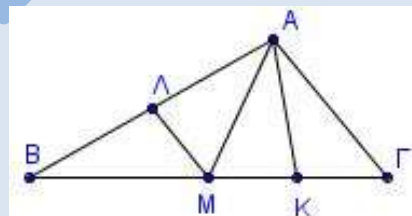
- 183.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$  και  $\Delta, E, Z$  τα μέσα των πλευρών του  $B\Gamma, A\Gamma, AB$  αντίστοιχα. Αν η διχοτόμος της γωνίας  $B$  τέμνει τη  $ZE$  στο σημείο  $M$  και την προέκταση της  $\Delta E$  στο σημείο  $N$ , να αποδείξετε ότι:  
 α) Το τετράπλευρο  $ZE\Delta B$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)  
 β) Τα τρίγωνα  $BZM$  και  $MEN$  είναι ισοσκελή. (Μονάδες 10)  
 γ)  $BZ + NE = \Delta\Gamma$  (Μονάδες 8)



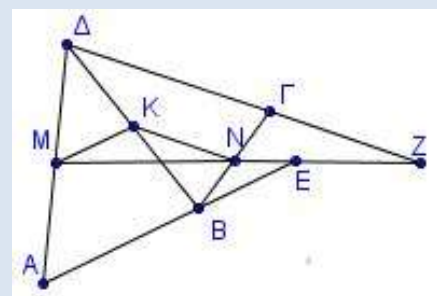
- 184.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ ,  $AM$  διάμεσός του και  $K$  το μέσο του  $AM$ . Αν η προέκταση της  $BK$  τέμνει την  $A\Gamma$  στο σημείο  $N$ , και  $\Lambda$  είναι το μέσο του  $\Gamma N$ , να αποδείξετε ότι:  
 α) Το σημείο  $N$  είναι μέσο του  $A\Lambda$ . (Μονάδες 9)  
 β)  $KM\Gamma = MBK + AKN$  (Μονάδες 9)  
 γ)  $BK = 3KN$  (Μονάδες 7)



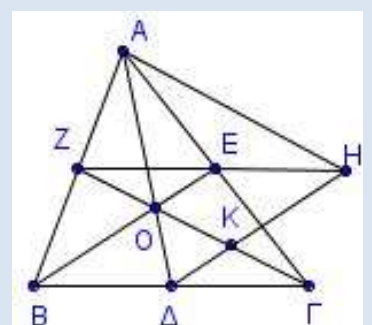
- 185.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $B\Gamma = 2A\Gamma$ . Έστω  $AM$  διάμεσος του  $AB\Gamma$  και  $K, \Lambda$  τα μέσα των  $M\Gamma$  και  $AB$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:  
 α)  $MA\Gamma = AM\Gamma$ . (Μονάδες 7)  
 β)  $M\Lambda = MK$ . (Μονάδες 9)  
 γ) Η  $AM$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\Lambda AK$ . (Μονάδες 9)



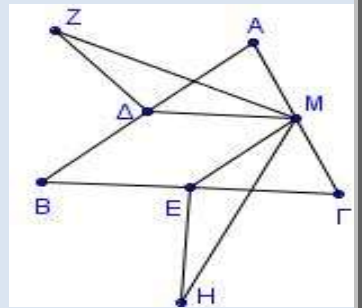
- 186.** Δίνεται τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB = \Gamma\Delta$  και  $M, N, K$  τα μέσα των  $A\Delta, B\Gamma, B\Delta$  αντίστοιχα. Αν οι προεκτάσεις των  $AB, \Delta\Gamma$  τέμνουν την προέκταση της  $MN$  στα σημεία  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:  
 α)  $MK = KN$  (Μονάδες 13)  
 β)  $ME A = MZ\Delta$  (Μονάδες 12)



- 187.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και οι διάμεσοί του  $A\Delta, BE$  και  $\Gamma Z$ . Προεκτείνουμε το τμήμα  $ZE$  (προς το  $E$ ) κατά τμήμα  $EH = ZE$ . Να αποδείξετε ότι:  
 α) Το τετράπλευρο  $E\Delta B$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)  
 β) Η περίμετρος του τριγώνου  $A\Delta H$  είναι ίση με το άθροισμα των διαμέσων του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 9)  
 γ) Οι ευθείες  $BE$  και  $\Delta H$  τριχοτομούν το τμήμα  $Z\Gamma$ . (Μονάδες 8)



**188.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με τις γωνίες  $B$  και  $\Gamma$  οξείες και  $\Delta, M$  και  $E$  τα μέσα των πλευρών του  $AB$ ,  $A\Gamma$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα. Στις μεσοκάθετες των  $AB$  και  $B\Gamma$  και εκτός του τριγώνου  $AB\Gamma$  θεωρούμε σημεία  $Z$  και  $H$  αντίστοιχα, τέτοια, ώστε  $\Delta Z = \frac{AB}{2}$  και  $EH = \frac{B\Gamma}{2}$ .



α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο  $B\Delta M E$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 5)

ii. Τα τρίγωνα  $Z\Delta M$  και  $EMH$  είναι ίσα. (Μονάδες 10)

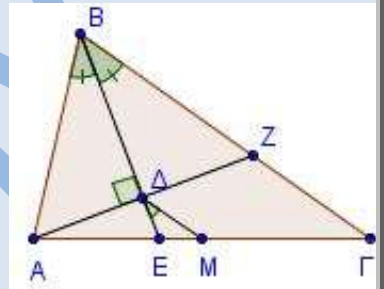
β) Αν τα σημεία  $Z, \Delta, E$  είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι  $A = 90^\circ$ . (Μονάδες 10)

**189.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < B\Gamma$  και η διχοτόμος  $BE$  της γωνίας  $B$ . Αν  $AZ \perp BE$ , όπου  $Z$  σημείο της  $B\Gamma$  και  $M$  το μέσον της  $A\Gamma$ , να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο  $ABZ$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β)  $\Delta M \perp B\Gamma$  και  $\Delta M = \frac{B\Gamma - AB}{2}$ . (Μονάδες 10)

γ)  $\angle \Delta M = \frac{B}{2}$ , όπου  $B$  η γωνία του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 8)



**190.** Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  με διάμεσο  $AM$  τέτοια, ώστε  $AM = AB$ . Φέρνουμε το ύψος του  $AK$  και το προεκτείνουμε (προς το  $K$ ) κατά τμήμα  $K\Delta = AK$ . Προεκτείνουμε τη διάμεσο  $AM$  (προς το  $M$ ) κατά τμήμα  $ME = MD$ .

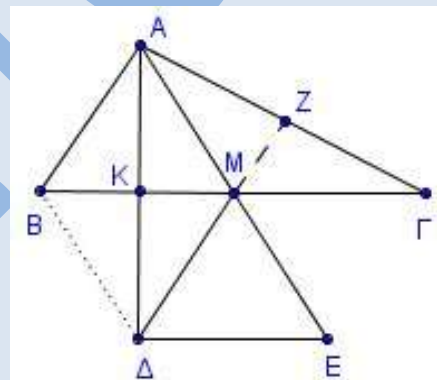
Να αποδείξετε ότι:

α)  $\Delta E \perp A\Delta$  και  $\Delta E = 2KM$ . (Μονάδες 7)

β) Το τετράπλευρο  $ABE\Gamma$  είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Το τετράπλευρο  $AB\Delta M$  είναι ρόμβος. (Μονάδες 6)

δ) Η προέκταση της  $\Delta M$  τέμνει το  $A\Gamma$  στο μέσον του  $Z$ . (Μονάδες 6)

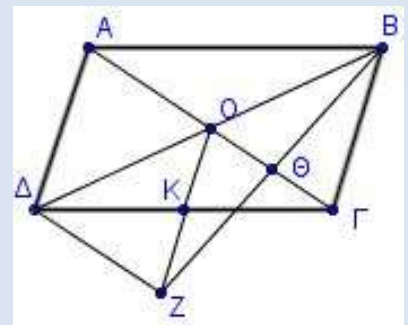


**191.** Έστω παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $O$  το σημείο τομής των διαγωνίων του και  $K$  το μέσο του  $\Gamma\Delta$ . Προεκτείνουμε το τμήμα  $OK$  κατά τμήμα  $KZ = KO$ . Η  $BZ$  τέμνει τη διάγωνιο  $A\Gamma$  στο  $\Theta$ . Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα  $O\Gamma$  και  $BZ$  διχοτομούνται. (Μονάδες 8)

β)  $AO = \Delta Z$  (Μονάδες 9)

γ) Τα τρίγωνα  $AOB$  και  $\Delta Z\Gamma$  είναι ίσα. (Μονάδες 6)

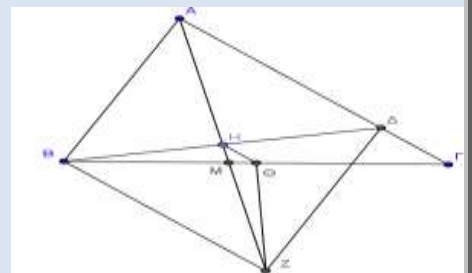


**192.** Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$ . Από το  $B$  φέρουμε κάθετη στην διχοτόμο  $AM$  της γωνίας  $A$ , η οποία τέμνει την  $AM$  στο  $H$  και την  $A\Gamma$  στο  $\Delta$ . Στην προέκταση της  $AH$  θεωρούμε σημείο  $Z$  τέτοιο ώστε  $AH = HZ$  και έστω  $\Theta$  το μέσο της πλευράς  $B\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι

α) το τετράπλευρο  $ABZ\Delta$  είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)

β)  $H\Theta \parallel BZ$ . (Μονάδες 9)

γ)  $H\Theta = \frac{A\Gamma - AB}{2}$  (Μονάδες 7)





**193.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και η διάμεσός του  $AD$ . Έστω  $E, Z$  και  $H$  τα μέσα των  $BD$ ,  $AD$  και  $AG$  αντίστοιχα.

- α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $\Delta EZH$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)  
 β) Να βρείτε τη σχέση των πλευρών  $AB$  και  $B\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ , ώστε το παραλληλόγραμμο  $\Delta EZH$  να είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)  
 γ) Στην περίπτωση που το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο ( η γωνία  $B$  ορθή), να βρείτε το είδος του παραλληλογράμμου  $\Delta EZH$ . (Μονάδες 5)

### §5.7-5.8

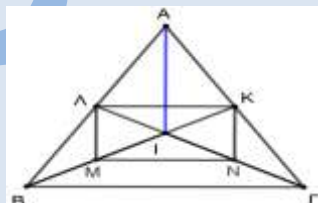
**194.** Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  και  $\mu_\beta, \mu_\gamma$  οι διάμεσοι του τριγώνου που αντιστοιχούν στις πλευρές  $\beta$  και  $\gamma$  αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

$\Pi$ : Αν το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $\beta = \gamma$ , τότε οι διάμεσοι  $\mu_\beta, \mu_\gamma$  είναι ίσες.

- α) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση  $\Pi$ , αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 10)  
 β) Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της  $\Pi$  και να εξετάσετε αν ισχύει αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 10)  
 γ) Στην περίπτωση που οι δυο προτάσεις, η  $\Pi$  και η αντίστροφή της ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως ενιαία πρόταση. (Μονάδες 5)

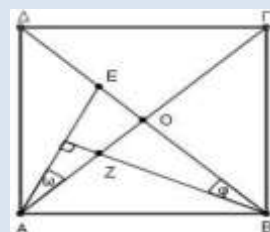
**195.** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα ύψη του  $BK$  και  $\Gamma\Lambda$ , τα οποία τέμνονται στο  $I$ . Αν  $M$  και  $N$  είναι τα μέσα των  $IB$  και  $I\Gamma$  αντίστοιχα, να αποδείξετε:

- α) Το  $AI$  προεκτεινόμενο διέρχεται από το μέσο της πλευράς  $B\Gamma$ . (Μονάδες 10)  
 β) Το τετράπλευρο  $MLKN$  είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 15)



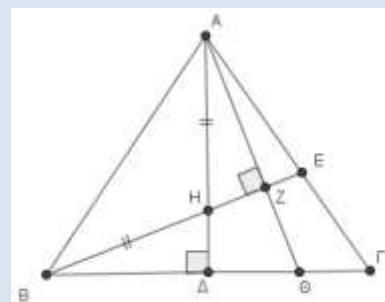
**196.** Στο τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  ονομάζουμε  $O$  το κέντρο του και θεωρούμε τυχαίο σημείο  $E$  του τμήματος  $OD$ . Φέρνουμε την κάθετη από το  $B$  στην  $AE$ , που τέμνει το τμήμα  $AO$  στο  $Z$ . Να αποδείξετε ότι:

- α) Οι γωνίες  $\omega$  και  $\phi$  του διπλανού σχήματος είναι ίσες. (Μονάδες 6)  
 β)  $BZ = AE$  και  $\Gamma Z = BE$  (Μονάδες 12)  
 γ) Το τμήμα  $EZ$  είναι κάθετο στο  $AB$ . (Μονάδες 7)



**197.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  και το ύψος του  $AD$ . Στο  $AD$  θεωρούμε σημείο  $H$  τέτοιο ώστε  $HA = HB$ . Έστω ότι  $E$  είναι το σημείο τομής της  $BH$  με την  $AG$ . Φέρνουμε την  $AZ$  κάθετη στην  $BE$ , η οποία τέμνει την πλευρά  $B\Gamma$  στο  $\Theta$ .

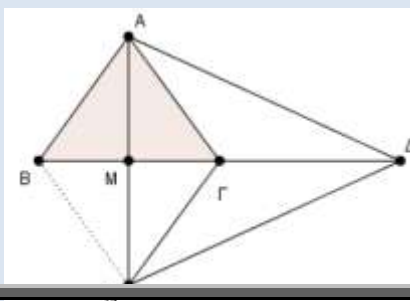
- α) Να αποδείξετε ότι:  
 i. Τα τρίγωνα  $H\Delta B$  και  $HZA$  είναι ίσα. (Μονάδες 6)  
 ii.  $\Delta\Theta = \Theta Z$ . (Μονάδες 6)  
 iii. Η ευθεία  $\Theta H$  είναι μεσοκάθετος του τμήματος  $AB$ . (Μονάδες 6)



β) Ποιο από τα σημεία του σχήματος είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου  $AHB$ ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

**198.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και  $AM$  το ύψος του στην πλευρά  $B\Gamma$ . Στην προέκταση του  $AM$  θεωρούμε τμήμα  $MN = AM$ . Στην προέκταση του  $B\Gamma$  προς το μέρος του  $\Gamma$  θεωρούμε τμήμα  $\Gamma\Delta = B\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο  $ABN\Gamma$  ρόμβος. (Μονάδες 8)



β) Το τρίγωνο ΑΔΝ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

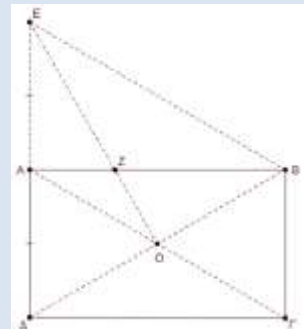
γ) Το σημείο Γ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΔΝ. (Μονάδες 9)

**199.** Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και  $ΑΓ = 2ΒΓ$ . Στην προέκταση της πλευράς ΔΑ, προς το Α, παίρνουμε σημείο Ε ώστε  $ΔΑ = ΑΕ$ . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΕΒΓ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΕΒΔ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 9)

γ) Αν η ΕΟ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι  $ΔΖ \perp ΕΒ$ . (Μονάδες 8)



**200.** Δίνονται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, ΒΕ, ΓΖ τα ύψη από τις κορυφές Β, Γ αντίστοιχα και Η το ορθόκεντρο του τριγώνου. Επίσης δίνονται τα Μ, Ν, Κ, Λ μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ, ΑΓ, ΓΗ, ΒΗ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

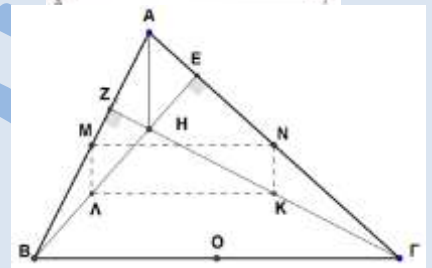
i.  $MN = ΛΚ$  (Μονάδες 6)

ii.  $NK = MΛ = \frac{ΑΗ}{2}$  (Μονάδες 6)

iii. Το τετράπλευρο ΜΝΚΛ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

β) Αν το Ο είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι το  $\hat{ΜΟΚ} = 90^\circ$ .

(Μονάδες 7)



**201.** Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε τη διαγώνιο ΒΔ (προς το Δ) κατά τμήμα ΔΕ=ΔΒ. Έστω Μ το μέσο της ΑΔ και Ν το σημείο τομής των ευθειών ΑΕ και ΓΔ.

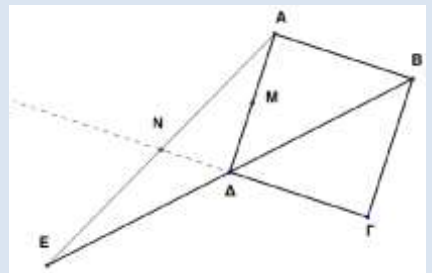
α) Να αποδείξετε ότι  $ΔΝ = ΔΜ$ . (Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΝΜΔ. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι:

i.  $MN \perp ΑΓ$  (Μονάδες 7)

ii.  $ΓΜ \perp ΑΝ$  (Μονάδες 7)

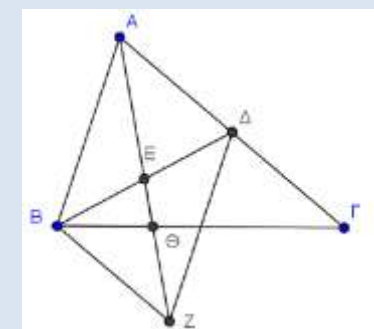


**202.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Ε το μέσο της διαμέσου ΒΔ. Στην προέκταση της ΑΕ θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε  $ΕΖ = ΑΕ$  και έστω Θ το σημείο τομής της ΑΖ με την πλευρά ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο ΒΔΓΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

γ) Το σημείο Θ είναι βαρύκεντρο του τριγώνου ΒΔΖ. (Μονάδες 9)

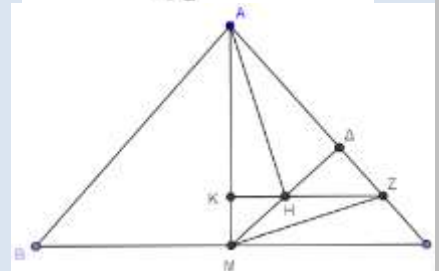


**203.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με  $ΑΒ = ΑΓ$  και το ύψος του ΑΜ. Φέρουμε ΜΔ κάθετη στην ΑΓ και θεωρούμε Η το μέσο του τμήματος ΜΔ. Από το Η φέρουμε παράλληλη στη ΒΓ η οποία τέμνει τις ΑΜ και ΑΓ στα σημεία Κ και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α)  $ΗΖ = \frac{ΒΓ}{4}$  (Μονάδες 9)

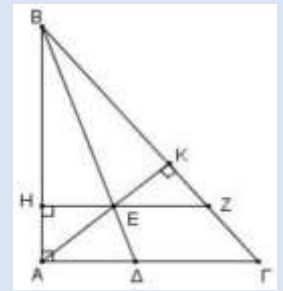
β)  $ΜΖ \parallel ΒΔ$  (Μονάδες 8)

γ) Η ευθεία ΑΗ είναι κάθετη στη ΒΔ.



(Μονάδες 8)

**204.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) με  $B\Delta$  διχοτόμο και  $AK$  ύψος, που τέμνονται στο  $E$ . Η κάθετη από το  $E$  στην  $AB$  τέμνει τις  $AB$  και  $B\Gamma$  στα  $H$  και  $Z$  αντίστοιχα.

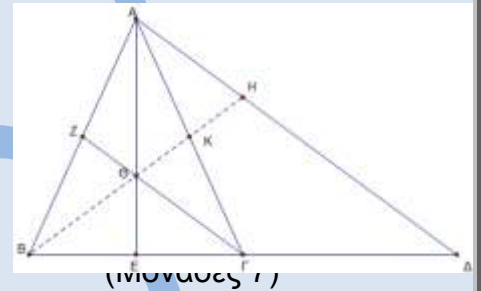


α) Να αποδείξετε ότι:

- i. Τα τρίγωνα  $EHA$  και  $EKZ$  είναι ίσα. (Μονάδες 6)
- ii. Το τρίγωνο  $BKH$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)
- iii. Η  $B\Delta$  είναι κάθετη στην  $AZ$  (Μονάδες 7)

β) Αν επιπλέον το ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι και ισοσκελές, να αποδείξετε ότι η  $\Gamma E$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\Gamma$ . (Μονάδες 6)

**205.** Έστω ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB=AG$ . Προεκτείνουμε το  $B\Gamma$  (προς το  $\Gamma$ ) κατά τμήμα  $\Gamma\Delta=B\Gamma$ . Φέρουμε τις διαμέσους  $AE$  και  $\Gamma Z$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  που τέμνονται στο  $\Theta$ . Το  $B\Theta$  προεκτεινόμενο, τέμνει το  $A\Gamma$  στο  $K$  και το  $A\Delta$  στο  $H$ . Να αποδείξετε ότι:



- α) Το  $ZK\Gamma E$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)
- β)  $AH=\Theta\Gamma$ .
- γ)  $AH=2Z\Theta$ .

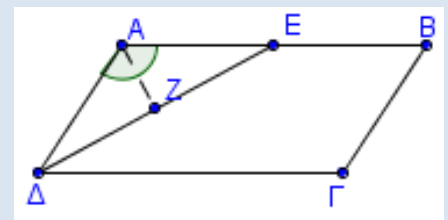
**206.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < AG$  και η διχοτόμος του  $A\Delta$ . Στην πλευρά  $AG$  θεωρούμε σημείο  $E$  τέτοιο ώστε  $AE = AB$ . Να αποδείξετε ότι :

- α) τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $A\Delta E$  είναι ίσα. (Μονάδες 7)
- β) η ευθεία  $A\Delta$  είναι μεσοκάθετος του τμήματος  $BE$ . (Μονάδες 9)
- γ) αν το ύψος από την κορυφή  $B$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  τέμνει την  $A\Delta$  στο  $H$  τότε η ευθεία  $EH$  είναι κάθετη στην  $AB$ . (Μονάδες 9)

## §5.9

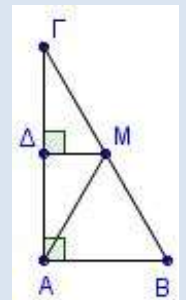
**207.** Σε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  προεκτείνουμε την πλευρά  $\Delta A$  (προς το  $A$ ) κατά τμήμα  $AH=\Delta A$ . Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας  $\Delta$  η οποία τέμνει την  $AB$  στο σημείο  $Z$ . Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο  $A\Delta Z$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)
- β) Το τρίγωνο  $\Delta ZH$  είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία  $Z$ . (Μονάδες 13)



**208.** Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $\hat{A} = 120^\circ$  και  $AB = 2A\Delta$ . Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας  $\Delta$  του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την  $AB$  στο  $E$  και στη συνέχεια το κάθετο τμήμα  $AZ$  στη  $\Delta E$ . Να αποδείξετε ότι:

- α)  $\hat{A}\Delta E = 30^\circ$  (Μονάδες 10)
- β)  $AZ = \frac{AB}{4}$  (Μονάδες 15)



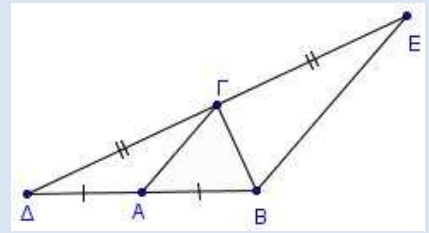
**209.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) με  $B\Gamma = 8\text{cm}$ . Έστω  $AM$  η διάμεσος του τριγώνου και  $M\Delta \perp AG$ . Αν  $\hat{AM}\Gamma = 120^\circ$ , τότε:

- α) Να δείξετε ότι  $AB = 4\text{cm}$ . (Μονάδες 12)
- β) Να βρείτε το μήκος της  $M\Delta$ . (Μονάδες 13)

**210.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ). Στην προέκταση της  $BA$  (προς το  $A$ ) παίρνουμε σημείο  $\Delta$  ώστε  $AB = A\Delta$  και στη προέκταση της  $\Delta\Gamma$  (προς το  $\Gamma$ ) παίρνουμε σημείο  $E$  ώστε  $\Delta\Gamma = \Gamma E$ . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο  $\Delta\Gamma B$  είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 12)

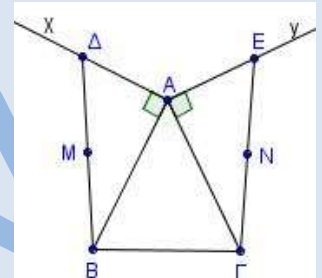
β)  $BE \parallel A\Gamma$  και  $A\Gamma = \frac{BE}{2}$  (Μονάδες 13)



**211.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ). Φέρουμε εκτός του τριγώνου τις ημιευθείες  $Ax$  και  $Ay$  τέτοιες ώστε  $Ax \perp AB$  και  $Ay \perp A\Gamma$ . Στις  $Ax$  και  $Ay$  θεωρούμε τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  αντίστοιχα, ώστε  $A\Delta = AE$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $B\Delta = \Gamma E$ . (Μονάδες 12)

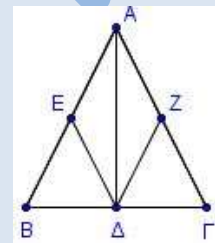
β) Αν  $M$  και  $N$  τα μέσα των τμημάτων  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AMN$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)



**212.** Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ), το ύψος του  $A\Delta$  και τα μέσα  $E$  και  $Z$  των πλευρών του  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα  $B\Delta E$  και  $\Gamma\Delta Z$  είναι ίσα. (Μονάδες 15)

β) Το τετράπλευρο  $AZ\Delta E$  είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)



**213.** Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$  και  $\Gamma = 30^\circ$ . Θεωρούμε το ύψος του  $A\Delta$  και το μέσο  $Z$  της πλευράς  $A\Gamma$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2}$ . (Μονάδες 12)

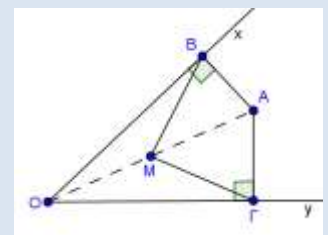
β) Προεκτείνουμε το ύψος  $A\Delta$  (προς το  $\Delta$ ) κατά ίσο τμήμα  $\Delta E$ . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $A\Gamma E$  είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 13)

**214.** Δίνεται γωνία  $\alpha$  και σημείο  $A$  στο εσωτερικό της. Από το  $A$  φέρνουμε τις κάθετες  $AB$ ,  $A\Gamma$  προς τις πλευρές  $Ox$ ,  $Oy$  της γωνίας αντίστοιχα και ονομάζουμε  $M$  το μέσο του  $OA$ . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο  $BMA$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο  $BM\Gamma$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ)  $\angle BMA = 2\alpha$ . (Μονάδες 9)

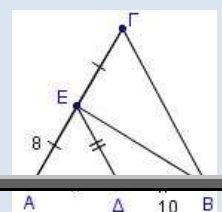
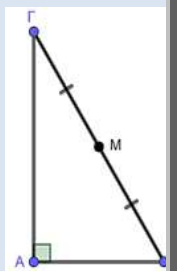


**215.** Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $A = 90^\circ$ ) με  $B = 2\Gamma$  και  $M$  το μέσο της  $B\Gamma$ .

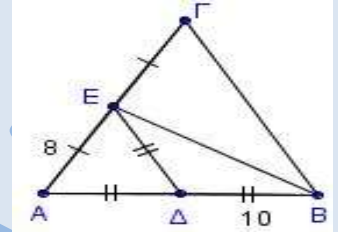
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες  $B$  και  $\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο  $AM\Gamma$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τη γωνία  $AM\Gamma$ . (Μονάδες 9)

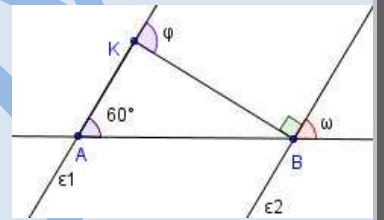


- 216.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  είναι τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν  $A\Delta = \Delta E = \Delta B$  με  $AE = 8$  και  $\Delta B = 10$ .
- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AEB$  είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)  
 β) Να αποδείξετε ότι  $B\Gamma = 20$ . (Μονάδες 8)  
 γ) Να υπολογίσετε τη περίμετρο του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 9)

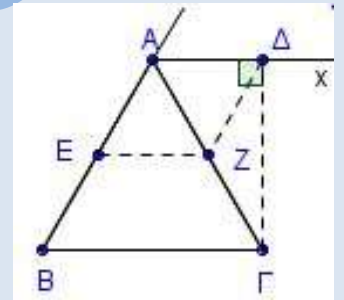


- 217.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  είναι τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν  $A\Delta = \Delta E = \Delta B$  με  $AE = 8$  και  $\Delta B = 10$ .
- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AEB$  είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)  
 β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)  
 γ) Να υπολογίσετε τη περίμετρο του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 9)

- 218.** Στο διπλανό σχήμα είναι  $\epsilon_1 // \epsilon_2$  και  $AB = 6$ .
- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\omega$  και  $\varphi$ . (Μονάδες 10)  
 β) Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου  $ABK$  ως προς τις γωνίες του. (Μονάδες 7)  
 γ) Να υπολογίσετε το μήκος της  $AK$ , αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

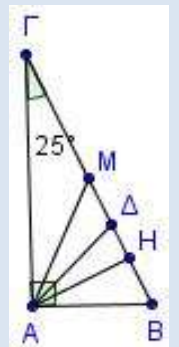


- 219.** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Φέρουμε την εξωτερική διχοτόμο  $Ax$  της γωνίας  $A$  και από το σημείο  $\Gamma$  την κάθετο  $\Gamma\Delta$  στην  $Ax$ . Τα σημεία  $E$  και  $Z$  είναι τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
- α) το τρίγωνο  $AZ\Delta$  είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 13)  
 β) το τετράπλευρο  $A\Delta ZE$  είναι ρόμβος. (Μονάδες 12)

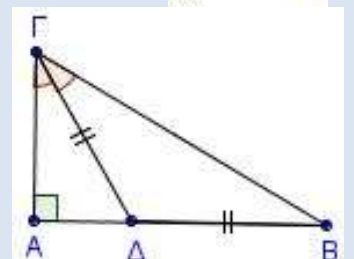


- 220.** Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύει  $A + \Gamma = 120^\circ$  και  $A = 3\Gamma$ .
- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του. (Μονάδες 15)  
 β) Αν η πλευρά  $B\Gamma = 2\text{cm}$ , να βρείτε το μήκος της  $AB$ . (Μονάδες 10)

- 221.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A = 90^\circ$  και  $\Gamma = 25^\circ$ . Δίνονται επίσης η διάμεσος  $AM$ , το ύψος  $AH$  από την κορυφή  $A$  και η διχοτόμος  $A\Delta$  της γωνίας  $A$ .
- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες  $AMB$ ,  $HAB$ ,  $A\Delta B$ . (Μονάδες 15)  
 β) Να αποδείξετε ότι  $MA\Delta = \Delta AH = 20^\circ$ . (Μονάδες 10)



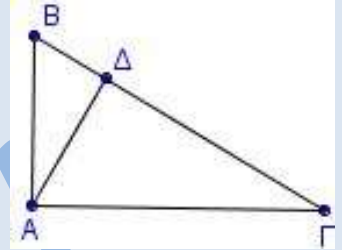
- 222.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A = 90^\circ$  και η διχοτόμος της γωνίας  $\Gamma$  τέμνει την πλευρά  $AB$  στο σημείο  $\Delta$ , έτσι ώστε  $\Gamma\Delta = \Delta B = 2\text{cm}$ . Να αποδείξετε ότι:
- α)  $B = 30^\circ$ . (Μονάδες 12)  
 β)  $AB = 3\text{cm}$  (Μονάδες 13)



- 223.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A = 90^\circ$ ,  $B = 35^\circ$  και  $M$  το μέσο της  $B\Gamma$ .  
 α) Να υπολογίσετε τη γωνία  $\Gamma$ . (Μονάδες 10)  
 β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $AMB$ . (Μονάδες 15)

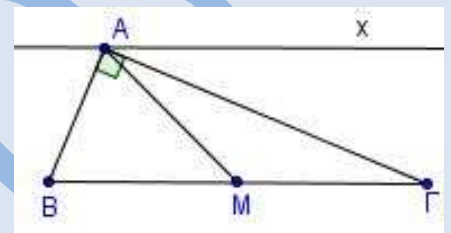
- 224.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A = 90^\circ$ ,  $2\Gamma = B$  και  $AD$  το ύψος του.

- α) Να υπολογιστούν οι οξείες γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 9)  
 β) Να υπολογιστεί η γωνία  $BA\Delta$ . (Μονάδες 7)  
 γ) Να αποδείξετε ότι:  $B\Delta = \frac{AB}{2}$ . (Μονάδες 9)



- 225.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A = 90^\circ$  και  $M$  το μέσο της  $B\Gamma$ . Φέρουμε ημιευθεία  $Ax$  παράλληλη στη  $B\Gamma$  (στο ημιεπίπεδο που ορίζει η  $AM$  με το σημείο  $\Gamma$ ). Να αποδείξετε ότι:

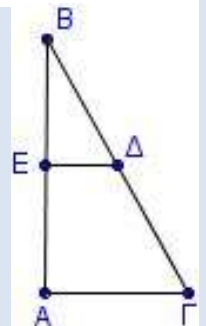
- α)  $MA\Gamma = M\Gamma A$  (Μονάδες 12)  
 β) η  $A\Gamma$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $MAx$ . (Μονάδες 13)



- 226.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A = 90^\circ$  και  $B = 30^\circ$ . Αν τα σημεία  $E$  και  $\Delta$  είναι τα μέσα των  $AB$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα με  $E\Delta = 1$ , να υπολογίσετε τα τμήματα:

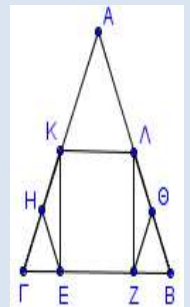
- α)  $A\Gamma$ ..... (Μονάδες 8)  
 β)  $B\Gamma$ ..... (Μονάδες 9)  
 γ)  $A\Delta$ ..... (Μονάδες 8)

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



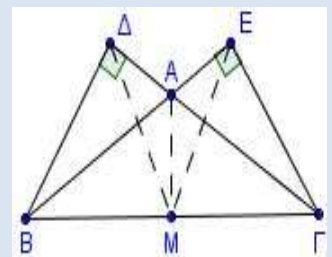
- 227.** Έστω ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ . Από τα μέσα  $K$  και  $\Lambda$  των πλευρών  $A\Gamma$  και  $AB$  αντίστοιχα, φέρουμε τα κάθετα τμήματα  $KE$  και  $\Lambda Z$  στην πλευρά  $B\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα  $KE\Gamma$  και  $\Lambda ZB$  είναι ίσα. (Μονάδες 15)  
 β)  $E\Lambda = Z\Theta$ , όπου  $H, \Theta$  τα μέσα των τμημάτων  $K\Gamma, \Lambda B$  αντίστοιχα. (Μονάδες 10)



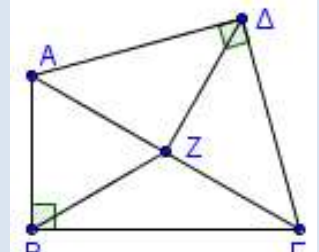
- 228.** Έστω ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ . Στις προεκτάσεις των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  προς το  $A$  φέρουμε τμήματα  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  κάθετα στις  $A\Gamma$  και  $AB$  αντίστοιχα.

- α) Να αποδείξετε ότι  $B\Delta = \Gamma E$ . (Μονάδες 10)  
 β) Αν  $M$  το μέσο της  $B\Gamma$ , τότε:  
 i. Να αποδείξετε ότι  $M\Delta = ME$  (Μονάδες 8)  
 ii. Να αποδείξετε ότι η  $AM$  διχοτομεί τη γωνία  $\Delta ME$ . (Μονάδες 7)



- 229.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $B = 90^\circ$  και  $Z$  το μέσο του  $A\Gamma$ . Με υποτείνουσα το  $A\Gamma$  κατασκευάζουμε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο  $A\Delta\Gamma$  με  $\Delta = 90^\circ$ .

- α) Να αποδείξετε ότι  $BZ = \Delta Z$ . (Μονάδες 13)



β) Αν  $\angle \Gamma B = 30^\circ$ , να υπολογίσετε τις γωνίες  $\angle B A \Delta$  και  $\angle B \Gamma \Delta$ . (Μονάδες 12)

**230.** Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\angle A = 90^\circ$  και  $B > \Gamma$  φέρουμε το ύψος του  $A\Delta$  και την διάμεσό του  $AM$  στην πλευρά  $B\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

α)  $B = \Gamma A \Delta$  (Μονάδες 12)

β)  $AM\Delta = 2\Gamma$ . (Μονάδες 13)

**231.** Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $B = 60^\circ$ . Φέρουμε τα ύψη  $AE$  και  $BZ$  του παραλληλογράμμου που αντιστοιχούν στην ευθεία  $\Delta\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

α)  $\Gamma Z = \frac{A\Delta}{2}$  (Μονάδες 8)

β) το τρίγωνο  $A\Delta E$  είναι ίσο με το τρίγωνο  $B\Gamma Z$ , (Μονάδες 9)

γ) το τετράπλευρο  $ABZE$  είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

**232.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  τέτοιο, ώστε  $A\Gamma < AB$ . Στην πλευρά  $AB$  θεωρούμε σημείο  $\Delta$  τέτοιο, ώστε  $A\Delta = A\Gamma$  και στην προέκταση της  $BA$  (προς το  $A$ ) θεωρούμε σημείο  $E$  τέτοιο, ώστε  $AE = A\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

α)  $\Delta\Gamma \perp E\Gamma$  (Μονάδες 12)

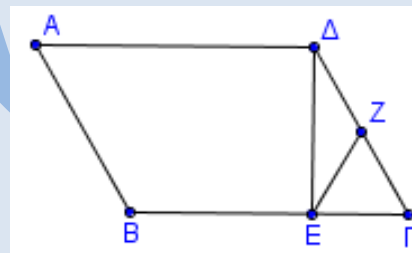
β) η γωνία  $\angle EA\Gamma$  είναι διπλάσια της γωνίας  $\angle A\Delta\Gamma$ . (Μονάδες 13)

**233.** Σε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  είναι  $B = 120^\circ$  και  $\Delta E \perp B\Gamma$ . Έστω  $EZ$  η διάμεσος του τριγώνου  $\Delta E\Gamma$ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\angle A$  και  $\angle \Gamma$  του παραλληλογράμμου. (Μονάδες 8)

β) Αν  $K$  είναι το μέσο της  $AB$ , να αποδείξετε ότι  $EZ = AK$ . (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία  $\angle EZ\Gamma$ . (Μονάδες 8)



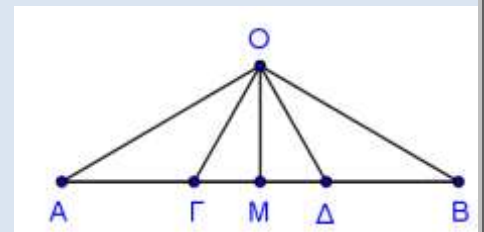
**234.** Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  και στο εσωτερικό του θεωρούμε τα σημεία  $\Gamma, \Delta$  ώστε να ισχύει  $A\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta B$ . Επίσης θεωρούμε σημείο  $O$  εκτός του ευθύγραμμου τμήματος  $AB$  έτσι ώστε να ισχύουν  $O\Gamma = O\Delta$  και  $OA = OB$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

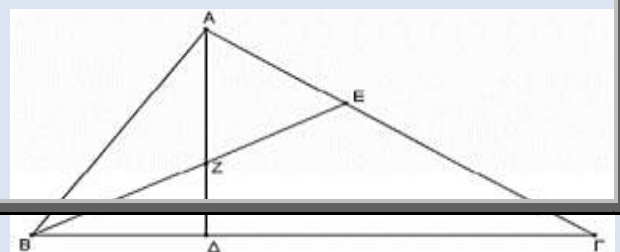
i.  $\angle O\Delta = 60^\circ$  (Μονάδες 9)

ii.  $\angle O\Delta\Gamma = \angle O\Delta B = 30^\circ$  (Μονάδες 9)

β) Αν  $M$  το μέσον του τμήματος  $AB$ , να αποδείξετε ότι  $2OM = OA$ . (Μονάδες 7)



**235.** Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύει  $\angle A + \angle \Gamma = 2\angle B$  και έστω  $A\Delta$  ύψος και  $BE$  διχοτόμος του τριγώνου που τέμνονται στο  $Z$ .



α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $B = 60^\circ$  και  $AZ = BZ$  (Μονάδες 10)

ii.  $A\Delta = \frac{3}{2}BZ$  (Μονάδες 8)

β) Αν είναι γνωστό ότι το τρίγωνο AZE είναι ισόπλευρο, να υπολογίσετε τις άλλες γωνίες του τριγώνου. (Μονάδες 7)

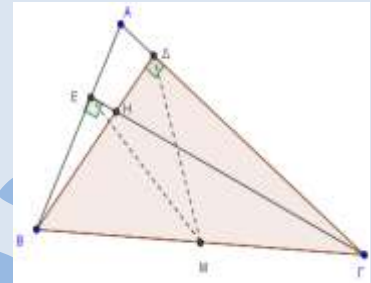
**236.** Στο παρακάτω σχήμα δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABΓ, τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ που τέμνονται στο σημείο Η και το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ.

α) Να αποδείξετε ότι

i.  $M\Delta = ME$  (Μονάδες 10)

ii. Η ευθεία ΑΗ τέμνει κάθετα τη ΒΓ και ότι  $\hat{A}H\Delta = \hat{\Gamma}$ , όπου  $\hat{\Gamma}$  η γωνία του τριγώνου ABΓ. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το ορθόκεντρο του τριγώνου ABH. (Μονάδες 10)



**237.** Οι κύκλοι (Κ,ρ) και (Λ,3ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο Α.

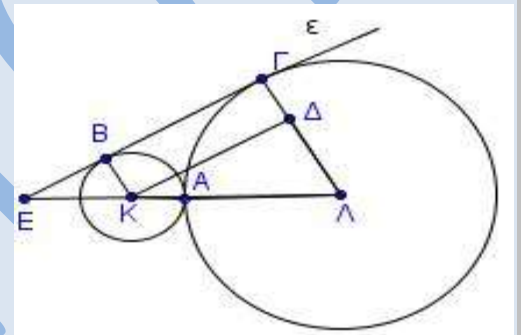
Μια ευθεία εφάπτεται εξωτερικά και στους δύο κύκλους στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα και τέμνει την προέκταση της διακέντρου ΚΛ στο σημείο Ε. Φέρουμε από το σημείο Κ παράλληλο τμήμα στην ε που τέμνει το τμήμα ΛΓ στο Δ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΔΚ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι  $\Delta K\Lambda = 30^\circ$  (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι  $E\Lambda = 6\rho$ . (Μονάδες 8)



**238.** Θεωρούμε ορθογώνιο ABΓ ( $A = 90^\circ$ ) και το ύψος του ΑΗ. Έστω Δ και Ε τα συμμετρικά σημεία του Η ως προς τις ευθείες AB και ΑΓ αντίστοιχα και Μ, Ν οι προβολές των Δ,Ε στις AB και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α)  $AH = A\Delta = AE$

(Μονάδες 10)

β) Η γωνία ΕΗΔ είναι ορθή.

(Μονάδες 8)

γ) Τα σημεία Ε,Α και Δ είναι συνευθειακά και  $MN = \Delta E/2$ .

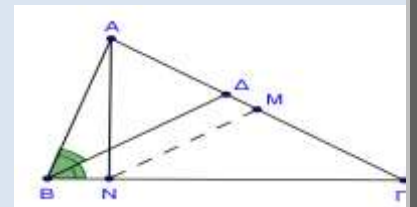
(Μονάδες 7)

**239.** Δίνεται τρίγωνο ABΓ με  $B = 2\Gamma$  και η διχοτόμος ΒΔ της γωνίας Β. Από το μέσο Μ της ΑΓ φέρουμε παράλληλη στη διχοτόμο ΒΔ που τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Ν. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)

β) Το τρίγωνο ΜΝΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

γ)  $AN \perp BG$  (Μονάδες 10)



**240.** Σε παραλληλόγραμμο ABΓΔ με γωνία Α αμβλεία, ισχύει ότι  $AB = 2A\Delta$ . Τα σημεία Ε και Ζ, είναι μέσα των πλευρών του AB και ΓΔ αντίστοιχα. Από το Δ φέρουμε τη ΔΗ κάθετη στην προέκταση της ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

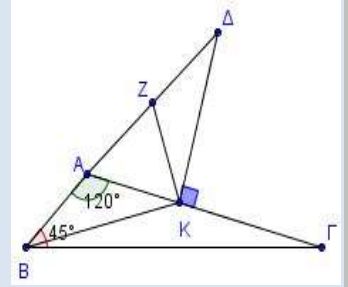
α) Το τετράπλευρο ΑΕΖΔ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΕΖΗ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

γ) Το τμήμα ΗΕ, είναι διχοτόμος της γωνίας ΖΗΓ. (Μονάδες 8)

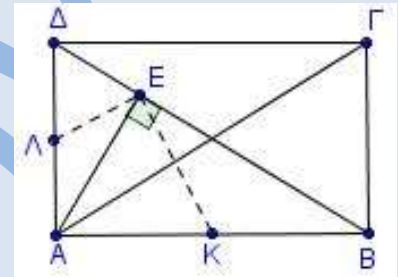


**241.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με γωνία  $A$  ίση με  $120^\circ$  και γωνία  $B$  ίση με  $45^\circ$ . Στην προέκταση της  $BA$  προς το  $A$ , παίρνουμε τμήμα  $AD = 2AB$ . Από το  $\Delta$  φέρνουμε την κάθετη στην  $A\Gamma$  που την τέμνει στο σημείο  $K$ . Να αποδείξετε ότι:



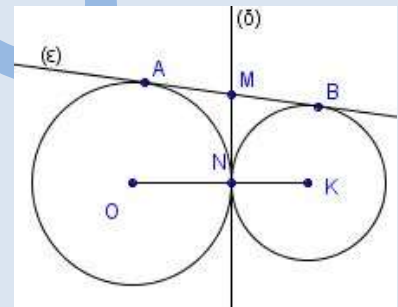
- α)  $\angle AK = 30^\circ$  (Μονάδες 6)  
 β) Το τρίγωνο  $KAB$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)  
 γ) Αν  $Z$  το μέσο της  $DA$ , τότε  $\angle ZKB = 90^\circ$  (Μονάδες 6)  
 δ) Το σημείο  $K$  ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος  $B\Delta$ . (Μονάδες 7)

**242.** Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$ . Από την κορυφή  $A$  φέρουμε  $AE \perp B\Delta$ . Έστω  $K, \Lambda$  τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $AD$  αντιστοίχως, τότε:



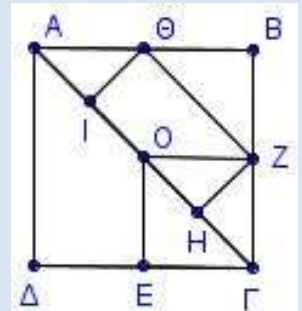
- α) i. Να αποδείξετε ότι:  $\angle K\Lambda = 90^\circ$  (Μονάδες 8)  
 ii.  $K\Lambda = \frac{A\Gamma}{2}$  (Μονάδες 8)  
 β) Αν  $\angle BA\Gamma = 30^\circ$ , να αποδείξετε ότι  $K\Lambda = B\Gamma$ . (Μονάδες 9)

**243.** Δύο κύκλοι  $(O, \rho_1), (K, \rho_2)$  εφάπτονται εξωτερικά στο  $N$ . Μια ευθεία  $\epsilon$  εφάπτεται στους δύο κύκλους στα σημεία  $A, B$  αντίστοιχα. Η κοινή εφαπτομένη των κύκλων στο  $N$  τέμνει την  $\epsilon$  στο  $M$ . Να αποδείξετε ότι:



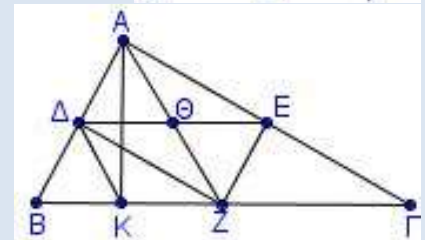
- α) Το  $M$  είναι μέσο του  $AB$ . (Μονάδες 7)  
 β)  $\angle OMK = 90^\circ$  (Μονάδες 9)  
 γ)  $\angle ANB = 90^\circ$  (Μονάδες 9)

**244.** Δίνεται τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$ . Στη διαγώνιο  $A\Gamma$  θεωρούμε σημεία  $I, O, H$  ώστε  $AI = IO = OH = H\Gamma$ . Αν  $E, \Theta$  και  $Z$  τα μέσα των πλευρών  $\Delta\Gamma, AB$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:



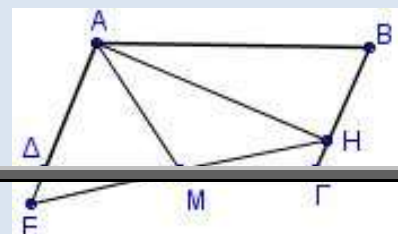
- α) Το τετράπλευρο  $OZ\Gamma E$  είναι τετράγωνο. (Μονάδες 7)  
 β)  $ZH = \frac{A\Gamma}{4}$  (Μονάδες 8)  
 γ) Το τετράπλευρο  $IOZH$  είναι ορθογώνιο με  $\Theta Z = 2\Theta I$ . (Μονάδες 10)

**245.** Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $A = 90^\circ$ ), τα μέσα  $\Delta, E, Z$  των πλευρών του και το ύψος του  $AK$ . Έστω  $\Theta$  το σημείο τομής των  $AZ, \Delta E$ .



- α) Να αποδείξετε ότι:  
 i. Το τετράπλευρο  $A\Delta ZE$  είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)  
 ii.  $A\Theta = \Theta E = \frac{B\Gamma}{4}$  (Μονάδες 7)  
 β) Αν επιπλέον είναι  $\angle \Gamma = 30^\circ$ , i. να βρείτε τη γωνία  $\angle AZB$ . (Μονάδες 5)  
 ii. να αποδείξετε ότι  $BK = \frac{B\Gamma}{4}$ . (Μονάδες 5)

**246.** Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB = 2B\Gamma$ , τη γωνία  $A$  αμβλεία και  $M$  το μέσο της  $\Gamma\Delta$ . Φέρνουμε κάθετη στην  $A\Delta$  στο σημείο

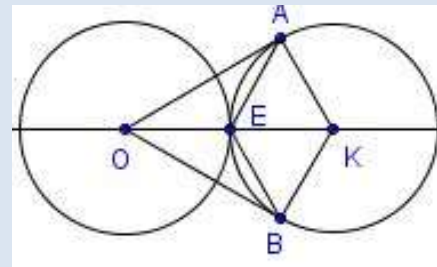


A, η οποία τέμνει την ΒΓ στο Η. Αν η προέκταση της ΗΜ τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Ε, να αποδείξετε ότι:

- α) Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΔΑΒ. (Μονάδες 9)
- β) Τα τμήματα ΕΗ, ΔΓ διχοτομούνται. (Μονάδες 8)
- γ)  $E = \Delta MA$  (Μονάδες 8)

**247.** Δύο ίσοι κύκλοι (Ο,ρ) και (Κ,ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Ε. Αν ΟΑ και ΟΒ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα από το σημείο Ο στον κύκλο (Κ,ρ), να αποδείξετε ότι:

- α)  $AE = BE$  (Μονάδες 9) β)  $\angle AOK = 30^\circ$  (Μονάδες 8)
- γ) Το τετράπλευρο ΑΚΒΕ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)



**248.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή. Φέρουμε τη διάμεσο του ΑΜ και σε τυχαίο σημείο Κ αυτής φέρουμε κάθετη στην ΑΜ η οποία τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Αν Η είναι το μέσο του ΔΕ να αποδείξετε ότι:

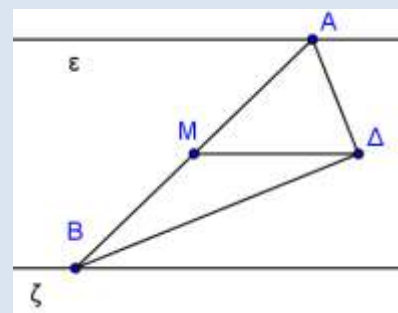
- α)  $B = BAM$  (Μονάδες 8)
- β)  $\angle A\Delta H = \angle \Delta AH$ . (Μονάδες 9)
- γ) Η ευθεία ΑΗ τέμνει κάθετα τη ΒΓ. (Μονάδες 8)

**249.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με  $AB = AG$  και Δ, Ε τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Στην προέκταση της ΔΕ (προς το Ε) θεωρούμε σημείο Λ ώστε  $EL = AE$  και στη προέκταση της ΕΔ (προς το Δ) θεωρούμε σημείο Κ τέτοιο, ώστε  $\Delta K = \Delta D$ . Να αποδείξετε ότι:

- α)  $K\Delta = \Delta E$  (Μονάδες 6)
- β) Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΑΛΓ είναι ορθογώνια. (Μονάδες 9)
- γ) Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΑΛΓ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

**250.** Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες (ε) και (ζ) και μια τρίτη που τις τέμνει στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. Θεωρούμε τις διχοτόμους των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών που σχηματίζονται, οι οποίες τέμνονται σε σημείο Δ. Αν Μ είναι το μέσον του ΑΒ, να αποδείξετε ότι:

- α)  $\angle B\Delta A = 90^\circ$  (Μονάδες 9)
- β)  $\angle BMD = 2\angle M\Delta A$  (Μονάδες 8)
- γ)  $M\Delta \perp \epsilon$  (Μονάδες 8)



**251.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και Μ τυχαίο σημείο της πλευράς ΒΓ. Φέρουμε τις διχοτόμους γωνιών ΒΜΑ και ΑΜΓ οι οποίες τέμνουν τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.

- α) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΔΜΕ είναι ορθή. (Μονάδες 12)
- β) Αν Κ το μέσο του ΔΕ, να αποδείξετε ότι  $MK = KA$ . (Μονάδες 13)

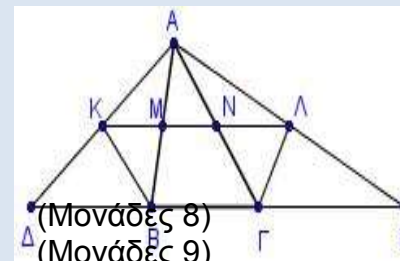
**252.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και ΑΜ η διάμεσός του. Από το Μ φέρουμε ΜΚ κάθετη στην ΑΒ και ΜΛ κάθετη στην ΑΓ. Αν Ν, Ρ είναι τα μέσα των ΒΜ και ΓΜ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- α)  $\angle NKM = \angle NMK$  (Μονάδες 7)
- β) Η ΜΚ είναι διχοτόμος της γωνίας ΝΜΑ. (Μονάδες 9)
- γ)  $AM = KN + LP$ . (Μονάδες 9)

**253.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και στην προέκταση της  $\Gamma B$  προς το  $B$ , θεωρούμε σημείο  $\Delta$  τέτοιο, ώστε  $B\Delta = AB$  ενώ στη προέκταση της  $B\Gamma$  προς το  $\Gamma$ , θεωρούμε σημείο  $E$  τέτοιο, ώστε  $\Gamma E = A\Gamma$ . Αν οι εξωτερικοί διχοτόμοι των γωνιών  $B$  και  $\Gamma$  τέμνουν τις  $A\Delta$  και  $AE$  στα σημεία  $K$  και  $\Lambda$  αντίστοιχα και η  $K\Lambda$  τέμνει τις  $AB$  και  $A\Gamma$  στα σημεία  $M$  και  $N$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία  $K$  και  $\Lambda$  είναι μέσα των  $A\Delta$  και  $AE$  αντίστοιχα.  
β) Τα τρίγωνα  $KMA$  και  $AN\Lambda$  είναι ισοσκελή.

γ) 
$$K\Lambda = \frac{AB + A\Gamma + B\Gamma}{2}$$



(Μονάδες 8)  
(Μονάδες 9)

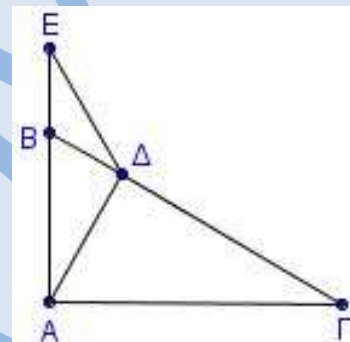
**254.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με τη γωνία  $A$  ορθή και  $B = 2\Gamma$ . Φέρουμε το ύψος του  $AD$  και σημείο  $E$  στην προέκταση της  $AB$  τέτοιο, ώστε  $BE = B\Delta$ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $B\Delta E$ . (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι:

i.  $BE = \frac{AB}{2}$  (Μονάδες 8)

ii.  $AE = \Gamma\Delta$  (Μονάδες 8)



**255.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$  με  $M$  και  $N$  τα μέσα των πλευρών  $B\Gamma$  και  $AB$  αντίστοιχα. Έστω ότι η μεσοκάθετος της πλευράς  $B\Gamma$  τέμνει την  $A\Gamma$  στο σημείο  $E$ .

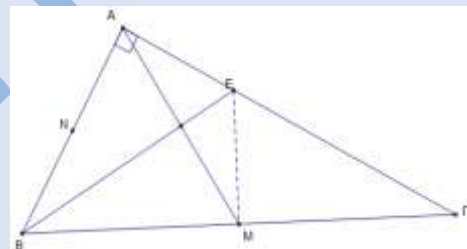
α) Να αποδείξετε ότι:

i) η  $BE$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{B}$ . (Μονάδες 6)

ii)  $AE = \frac{\Gamma E}{2}$ . (Μονάδες 6)

iii) η  $BE$  είναι μεσοκάθετος της διαμέσου  $AM$ .

β) Αν  $AD$  είναι το ύψος του τριγώνου  $AB\Gamma$  που τέμνει την  $BE$  στο  $H$ , να αποδείξετε ότι τα σημεία  $M$ ,  $H$  και  $N$  είναι συνευθειακά.



(Μονάδες 7)

**256.** Στο διπλανό σχήμα το ορθογώνιο  $EZH\Theta$  παριστάνει ένα τραπέζι του μπιλιάρδου. Μια μπάλα του μπιλιάρδου ξεκινάει από σημείο  $A$  της μεσοκαθέτου του τμήματος  $EZ$  και χτυπώντας διαδοχικά στους τοίχους  $E\Theta$ ,  $\Theta H$ ,  $HZ$  στα σημεία  $B$ ,  $\Gamma$  και  $\Delta$  αντίστοιχα, καταλήγει στο σημείο εκκίνησης  $A$ . Για τη διαδρομή  $A \rightarrow B \rightarrow \Gamma \rightarrow \Delta \rightarrow A$  που ακολουθεί η μπάλα ισχύει ότι κάθε γωνία πρόσπτωσης σε τοίχο (π.χ. η γωνία  $ABE$ ) είναι ίση με κάθε γωνία ανάκλασης σε τοίχο (π.χ η γωνία  $\Theta B\Gamma$ ) και η κάθε μια απ' αυτές είναι  $45^\circ$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα  $AEB$  και  $AZ\Delta$  είναι ίσα.

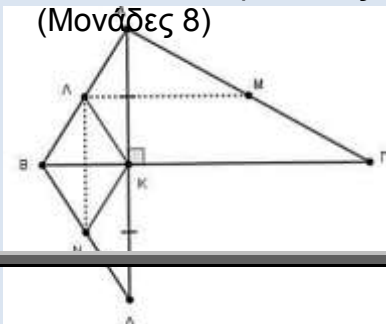
ii. Η διαδρομή  $AB\Gamma\Delta A$  της μπάλας σχηματίζει τετράγωνο.

β) Αν η  $AZ$  είναι διπλάσια από την απόσταση του  $A$  από τον τοίχο  $EZ$ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $AEZ$ .

(Μονάδες 9)

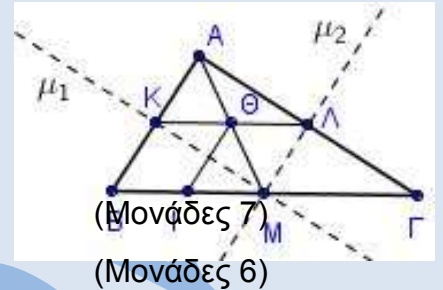
(Μονάδες 8)

(Μονάδες 8)



- 257.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Στην προέκταση του ύψους του  $AK$  θεωρούμε σημείο  $\Delta$  ώστε  $AK = K\Delta$ . Έστω  $\Lambda, M$  και  $N$  τα μέσα των τμημάτων  $AB, A\Gamma$  και  $B\Delta$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
- Το τρίγωνο  $AB\Delta$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)
  - Το τετράπλευρο  $B\Lambda K N$  είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)
  - $\Lambda M \perp \Lambda N$  (Μονάδες 9)

- 258.** Θεωρούμε τρίγωνο  $AB\Gamma$  και έστω  $K, \Lambda$  τα μέσα των  $AB, A\Gamma$  αντίστοιχα. Φέρουμε τις μεσοκαθέτους  $\mu_1, \mu_2$  των πλευρών του  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα, οι οποίες τέμνονται στο μέσο  $M$  της  $B\Gamma$ .
- Να αποδείξετε ότι:



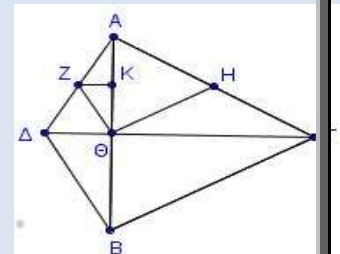
- Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με  $\angle A = 90^\circ$ . (Μονάδες 5)
- Το τετράπλευρο  $A\Lambda M K$  είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 7)
- $\angle \Theta = \frac{B\Gamma}{4}$ , όπου  $\Theta$  το σημείο τομής των  $AM$  και  $K\Lambda$ . (Μονάδες 6)

- Αν  $I$  σημείο της  $B\Gamma$  τέτοιο, ώστε  $BI = \frac{B\Gamma}{4}$ , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $K\Theta IB$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

- 259.** Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  τέτοιο, ώστε αν φέρουμε την κάθετη στην  $A\Gamma$  στο κέντρο του  $O$ , αυτή να τέμνει την προέκταση της  $A\Delta$  σε σημείο  $E$  τέτοιο, ώστε  $\Delta E = A\Delta$ . Να αποδείξετε ότι:

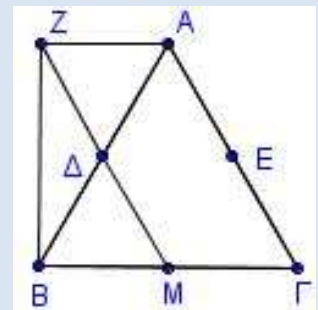
- Το τρίγωνο  $A\epsilon\Gamma$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)
- Το τετράπλευρο  $B\Gamma\epsilon\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)
- Το τρίγωνο  $B O \Gamma$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

- 260.** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Με βάση την  $AB$  κατασκευάζουμε ισοσκελές τρίγωνο  $A\Delta B$ , εκτός του τριγώνου  $AB\Gamma$ , με  $\angle \Delta = 120^\circ$ . Θεωρούμε τα μέσα  $Z$  και  $H$  των πλευρών  $A\Delta$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα.



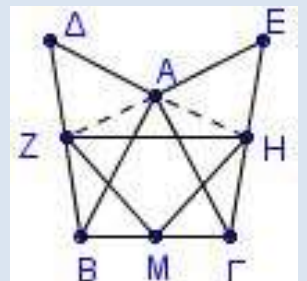
- Να αποδείξετε ότι η  $\Delta\Gamma$  είναι μεσοκάθετος του  $AB$ . (Μονάδες 8)
- Αν η  $\Delta\Gamma$  τέμνει την  $AB$  στο  $\Theta$ , να αποδείξετε ότι η γωνία  $Z\Theta H$  είναι ορθή. (Μονάδες 9)
- Αν η  $ZK$  είναι κάθετη στην  $AB$  από το σημείο  $Z$ , να αποδείξετε ότι  $ZK = \frac{A\Delta}{4}$ . (Μονάδες 8)

- 261.** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα μέσα  $\Delta, E$  και  $M$  των  $AB, A\Gamma$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα. Στη προέκταση του  $M\Delta$  (προς το  $\Delta$ ) θεωρούμε τμήμα  $\Delta Z = \Delta M$ . Να αποδείξετε ότι:



- Τα τρίγωνα  $AZ\Delta$  και  $B M \Delta$  είναι ίσα. (Μονάδες 6)
- Το τετράπλευρο  $Z A \Gamma M$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)
- Τα τμήματα  $Z E$  και  $A \Delta$  τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται. (Μονάδες 7)
- Η  $B Z$  είναι κάθετη στη  $Z A$ . (Μονάδες 6)

- 262.** Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ . Φέρνουμε τμήμα  $A\Delta$  κάθετο στην  $AB$  και τμήμα  $A E$  κάθετο στην  $A\Gamma$  με  $A\Delta = A E$ . Θεωρούμε τα μέσα  $Z, H$  και  $M$  των  $\Delta B, E\Gamma$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα.



- Να αποδείξετε ότι:

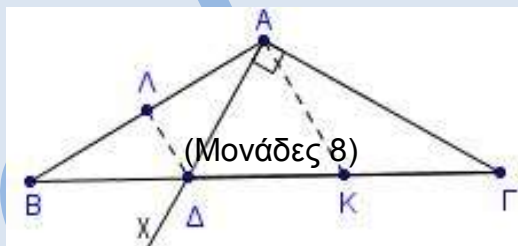
  - Τα τρίγωνα  $A\Delta B$  και  $A E \Gamma$  είναι ίσα. (Μονάδες 7)

- ii. Το τρίγωνο ZAH είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)
  - iii. Η AM είναι μεσοκάθετος του ZH. (Μονάδες 7)
- β) Ένας μαθητής συγκρίνοντας τα τρίγωνα AΔB και AΕΓ έγραψε τα εξής:
- « 1.  $AD = AE$  από την υπόθεση
  2.  $AB = AG$  πλευρές ισοσκελούς τριγώνου
  3.  $\Delta AB = \Delta AΓ$  ως κατακορυφήν

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα έχοντας δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία ίσα».

Ο καθηγητής είπε ότι η λύση περιέχει λάθος, μπορείς να το εντοπίσεις; (Μονάδες 5)

**263.** Έστω ισοσκελές τρίγωνο ABΓ με  $A = 120^\circ$ . Φέρουμε ημιευθεία Aχ κάθετη στην AΓ στο A, η οποία τέμνει τη BΓ στο Δ. Έστω Λ το μέσο του AB και Κ το μέσο του ΔΓ. Να αποδείξετε ότι:

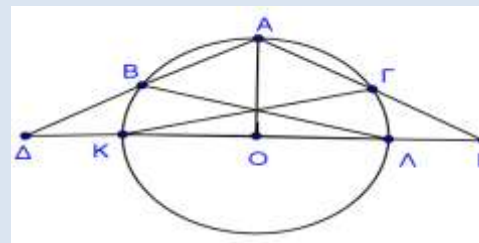


- α) Το τρίγωνο AΔB είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
- β)  $\Delta Γ = 2BΔ$  (Μονάδες 8)
- γ)  $\Delta Δ \square AK$  (Μονάδες 5)
- δ)  $AK = 2\Delta Δ$  (Μονάδες 4)

**264.** Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με  $A = 90^\circ$  και  $B = 60^\circ$ . Η διχοτόμος της γωνίας B τέμνει την AΓ στο Z. Τα σημεία M και K είναι τα μέσα των BZ και BΓ αντίστοιχα. Αν το τμήμα ΓΛ είναι κάθετο στη διχοτόμο Bδ, να αποδείξετε ότι:

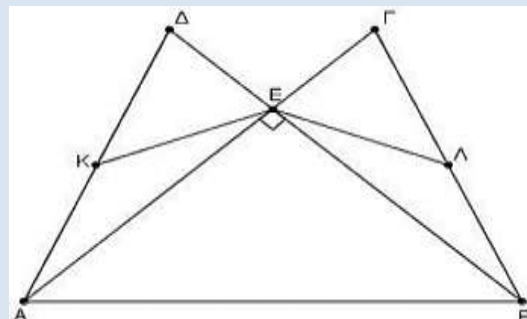
- α) Το τρίγωνο BZΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)
- β) Το τετράπλευρο AMKZ είναι ρόμβος. (Μονάδες 6)
- γ)  $\Gamma Z = 2ZA$  (Μονάδες 7)
- δ)  $BL = AG$  (Μονάδες 6)

**265.** Έστω κύκλος με κέντρο O και διάμετρο KΛ = 2ρ. Έστω A σημείο του κύκλου ώστε η ακτίνα OA να είναι κάθετη στην KΛ. Φέρουμε τις χορδές AB = AΓ = ρ. Έστω Δ και E τα σημεία τομής των προεκτάσεων των AB και AΓ αντίστοιχα με την ευθεία της διαμέτρου KΛ. Να αποδείξετε ότι:



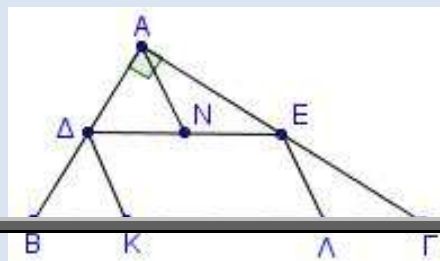
- α)  $\angle B A \Gamma = 120^\circ$  (Μονάδες 7)
- β) Τα σημεία B και Γ είναι μέσα των AΔ και AΓ αντίστοιχα. (Μονάδες 9)
- γ)  $K\Gamma = LB$  (Μονάδες 9)

**266.** Δίνονται δυο ίσα ισοσκελή τρίγωνα ABΓ ( $AB = A\Gamma$ ) και AΒΔ ( $BA = B\Delta$ ), τέτοια ώστε οι πλευρές τους AΓ και BΔ να τέμνονται κάθετα στο σημείο E, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Τα σημεία K και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων AΔ και BΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



- α)  $ED = EG$ . (Μονάδες 7)
- β)  $\Delta \Gamma // AB$ . (Μονάδες 8)
- γ) Το τρίγωνο EKΛ είναι ισοσκελές και  $K\Lambda // AB$ . (Μονάδες 10)

**267.** Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με  $A = 90^\circ$  και Δ, E και N τα μέσα των AB, AΓ και ΔE αντίστοιχα. Στο τμήμα BΓ θεωρούμε σημεία K και Λ ώστε  $\Delta K = KB$  και  $E\Lambda = \Lambda\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

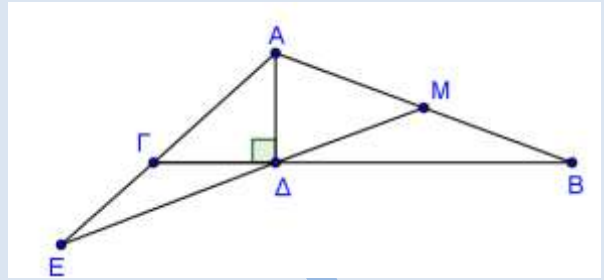


- α)  $\Delta K\Lambda = 2B$  και  $E\Lambda K = 2\Gamma$ . (Μονάδες 10)

β) Το τετράπλευρο ΔΕΛΚ είναι παραλληλόγραμμο με  $\Delta E = 2\Delta K$ . (Μονάδες 8)

γ)  $AN = \Delta K = \frac{B\Gamma}{4}$  (Μονάδες 7)

**268.** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ > ΑΓ), ΑΔ το ύψος του και Μ το μέσο του ΑΒ. Η προέκταση της ΜΔ τέμνει την προέκταση της ΑΓ στο σημείο Ε ώστε ΓΔ = ΓΕ. Να αποδείξετε ότι:



α)  $B = E$  (Μονάδες 8)

β)  $\Gamma = 2B = \text{ΑΜΔ}$  (Μονάδες 10)

γ)  $\Gamma E < \text{ΑΓ}$  (Μονάδες 7)

**269.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΒ (ΑΓ = ΓΒ). Φέρουμε τα ύψη του ΑΚ και ΓΛ. Αν Ε είναι το μέσο της πλευράς ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΚΕΛ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

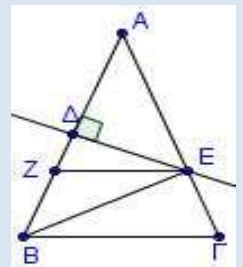
β) Η ΚΛ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΚΕ. (Μονάδες 15)

### §5.10-5.11

**270.** Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Στο μέσο Δ της πλευράς ΑΒ φέρουμε κάθετη ευθεία που τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Ε. Από το Ε φέρουμε ευθεία παράλληλη στη βάση ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο Ζ.

α) Να αποδείξετε ότι  $AE = BE$ . (Μονάδες 15)

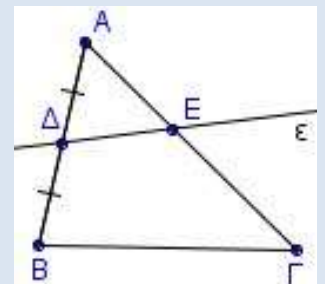
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΕΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 10)



**271.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ το μέσο της πλευράς ΑΒ. Από το Δ διέρχεται μια τυχαία ευθεία (ε) που τέμνει την πλευρά ΑΓ σε εσωτερικό της σημείο Ε. Η ευθεία (ε) χωρίζει το τρίγωνο ΑΒΓ σε ένα τρίγωνο ΑΔΕ κι σε ένα τετράπλευρο ΒΔΕΓ.

α) Ποια πρέπει να είναι η θέση του σημείου Ε, ώστε το τετράπλευρο ΒΔΕΓ να είναι τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

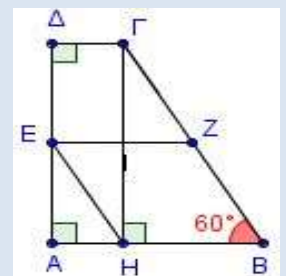
β) Ποιο πρέπει να είναι το είδος του τριγώνου ΑΒΓ, ώστε το τραπέζιο του ερωτήματος (α) να είναι ισοσκελές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)



**272.** Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με  $A = \Delta = 90^\circ$ ,  $AB > \Gamma\Delta$ ,  $B\Gamma = 4\Gamma\Delta$  και  $B = 60^\circ$ . Φέρουμε την  $\Gamma H \perp AB$  και θεωρούμε τα μέσα Ε και Ζ των πλευρών ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

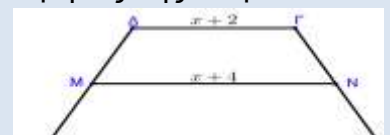
α)  $AB = 3\Gamma\Delta$  (Μονάδες 12)

β) Το τετράπλευρο ΕΗΒΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)



**273.** Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με  $AB \parallel \Gamma\Delta$ ,  $AB > \Gamma\Delta$  και  $AD = B\Gamma$ .

α) Αν τα μήκη των βάσεων είναι  $AB = 3x + 2$ ,  $\Gamma\Delta = x + 2$  και το μήκος της διαμέσου του τραπέζιου είναι  $MN = x + 4$ , τότε να δείξετε ότι  $x = 2$ . (Μονάδες 12)



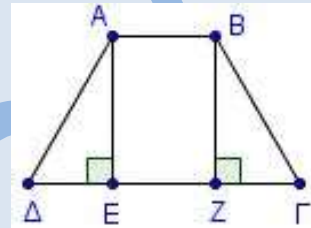
β) Αν η γωνία  $\hat{\Gamma}$  είναι διπλάσια της γωνίας  $\hat{B}$ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπέζιου.  
(Μονάδες 13)

**274.** Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ). Φέρουμε τα ύψη του  $AE$  και  $BZ$ . Να αποδείξετε ότι:

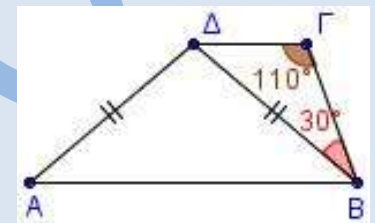
- α)  $\Delta E = \Gamma Z$  (Μονάδες 12)  
β) το τετράπλευρο  $AEZB$  είναι ορθογώνιο (Μονάδες 13)

**275.** Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ). Φέρουμε τα ύψη του  $AE$  και  $BZ$ . Να αποδείξετε ότι:

- α)  $\Delta E = \Gamma Z$  (Μονάδες 12)  
β)  $AZ = BE$  (Μονάδες 13)



**276.** Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) στο οποίο η διαγώνιος  $B\Delta$  είναι ίση με την πλευρά  $A\Delta$ . Αν η γωνία  $\hat{\Gamma} = 110^\circ$  και η γωνία  $\Delta B\Gamma = 30^\circ$ , να υπολογίσετε τη γωνία  $A\Delta B$ . (Μονάδες 25)

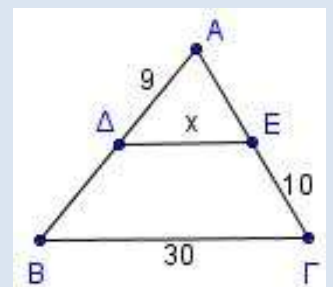


**277.** Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB \parallel \Gamma\Delta$  και  $AB < \Gamma\Delta$ . Θεωρούμε τα σημεία  $E$  και  $Z$  πάνω στην  $AB$  έτσι ώστε  $AE = EZ = ZB$  και έστω  $K$  το σημείο τομής των  $\Delta Z$  και  $\Gamma E$ . Να αποδείξετε ότι:

- α)  $\Delta Z = \Gamma E$  (Μονάδες 13)  
β) Τα τρίγωνα  $EKZ$  και  $\Delta K\Gamma$  είναι ισοσκελή. (Μονάδες 12)

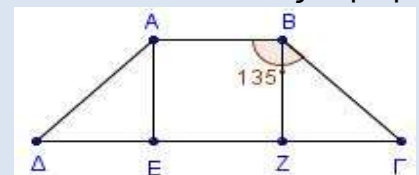
**278.** Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\Delta$  και  $E$  τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα,  $A\Delta = 9$ ,  $E\Gamma = 10$  και  $B\Gamma = 30$ .

- α) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 9)  
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $\Delta E\Gamma B$  είναι τραπέζιο. (Μονάδες 8)  
γ) Να υπολογίσετε το μήκος  $x$  του τμήματος  $\Delta E$ . (Μονάδες 8)



**279.** Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) με  $\Gamma\Delta > AB$  και  $B = 135^\circ$ . Από τις κορυφές  $A$  και  $B$  φέρουμε τα ύψη του  $AE$  και  $BZ$ .

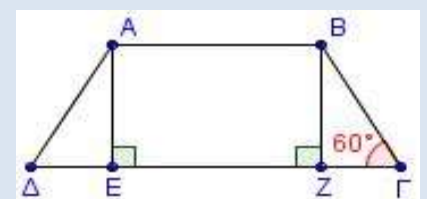
- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπέζιου. (Μονάδες 10)  
β) Να αποδείξετε ότι  $AE = E\Delta = BZ = \Gamma Z$ . (Μονάδες 15)



**280.** Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) με

$AB = 6, \Gamma\Delta = 4$  και  $\hat{\Gamma} = 60^\circ$ . Δίνονται επίσης τα ύψη  $AE$  και  $BZ$  από τις κορυφές  $A$  και  $B$  αντίστοιχα.

- α) Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τραπέζιου  $AB\Gamma\Delta$ . (Μονάδες 6)



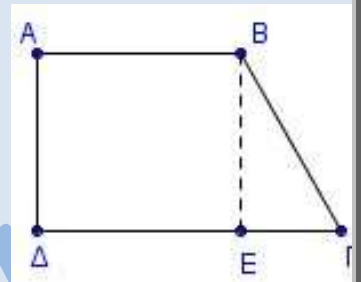
- β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΖΓ είναι ίσα.  
 γ) Να υπολογίσετε τη περίμετρο του ΑΒΓΔ.

(Μονάδες 10)  
 (Μονάδες 9)

**281.** Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) με  $AB = \Gamma\Delta = 4$ ,  $\angle A = 90^\circ$  και

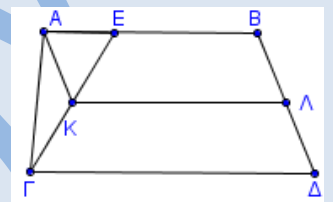
$\angle \Gamma = 60^\circ$ . Δίνεται επίσης το ύψος ΒΕ από την κορυφή Β.

- α) Να υπολογίσετε τις άλλες γωνίες του τραpezίου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 8)  
 β) Να αποδείξετε ότι  $2\epsilon\Gamma = \beta\Gamma$ . (Μονάδες 9)  
 γ) Αν Μ, Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ, ΒΓ αντίστοιχα, να βρείτε το μήκος του τμήματος ΜΝ. (Μονάδες 8)



**282.** Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) με  $AB = 3$ ,  $\Gamma\Delta = 4$ . Θεωρούμε σημείο Ε στην ΑΒ ώστε  $AE = 1$ . Στο τραπέζιο ΕΒΓΔ θεωρούμε τα Κ και Λ, μέσα των ΕΔ και ΒΓ αντίστοιχα.

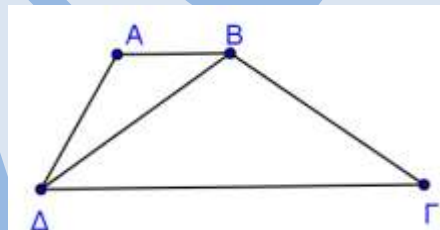
- α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο ΚΛ του τραpezίου ΕΒΓΔ (Μονάδες 13)  
 β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΛΚ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)



**283.** Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με  $AB \parallel \Gamma\Delta$  και  $BD = \beta\Gamma$ .

Αν  $\angle \beta\Gamma\Gamma = 110^\circ$  και  $\angle A\Delta\beta = 25^\circ$ , να υπολογίσετε:

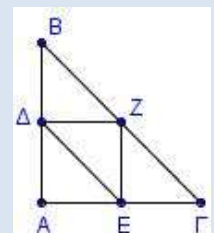
- α) Τη γωνία Γ. (Μονάδες 11)  
 β) Τη γωνία Α. (Μονάδες 14)



**284.** Σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ( $\angle A = 90^\circ$ ) θεωρούμε τα μέσα Δ,

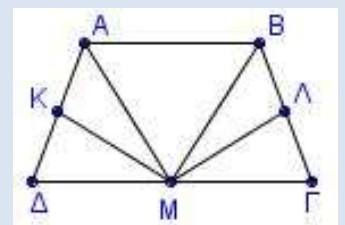
Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο ΑΕΖΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 12)  
 β) Το τετράπλευρο ΕΔΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 13)



**285.** Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ, το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΔΓ και τα σημεία Κ και Λ είναι τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α)  $KM = LM$  (Μονάδες 12)  
 β)  $AM = \beta M$  (Μονάδες 13)

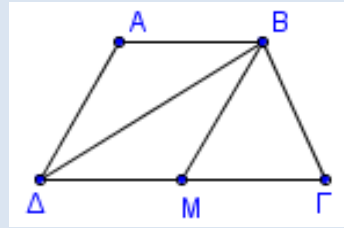


**286.** Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με  $AB \parallel \Gamma\Delta$ ,  $AB = 8$  και  $\Delta\Gamma = 12$ . Αν ΑΗ και ΒΘ τα ύψη του τραpezίου,

- α) να αποδείξετε ότι  $\Delta H = \Theta\Gamma$ . (Μονάδες 12)  
 β) να υπολογίσετε τη διάμεσο του τραpezίου. (Μονάδες 13)



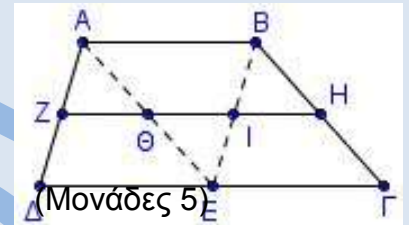
**287.** Στο τραπέζιο του διπλανού σχήματος έχουμε  $AB = AD = \frac{\Gamma\Delta}{2}$ ,  $\Delta = 60^\circ$  και  $M$  το μέσο της πλευράς  $\Gamma\Delta$ . Να



αποδείξετε ότι:

- α) η  $\Delta B$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\Delta$ . (Μονάδες 9)  
 β) η  $BM$  χωρίζει το τραπέζιο σε ένα ρόμβο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο. (Μονάδες 16)

**288.** Σε τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) είναι  $\Gamma\Delta = 2AB$ . Επίσης  $Z, H, E$  είναι τα μέσα των  $AD, B\Gamma$  και  $\Delta\Gamma$  αντίστοιχα. Ακόμη η  $ZH$  τέμνει τις  $AE, BE$  στα σημεία  $\Theta, I$  αντίστοιχα.

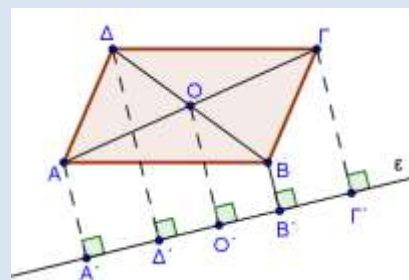


- α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο  $AB\Gamma E$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)  
 β) Να δείξετε ότι τα σημεία  $\Theta, I$  είναι μέσα των  $AE, BE$  αντίστοιχα. (Μονάδες 5)  
 γ) Να δείξετε ότι  $ZH = \frac{3}{2} AB$ . (Μονάδες 10)

**289.** Δίνεται ευθεία  $(\epsilon)$  και δύο σημεία  $A, B$  εκτός αυτής έτσι ώστε η ευθεία  $AB$  να μην είναι κάθετη στην  $(\epsilon)$ . Φέρουμε  $AD, B\Gamma$  κάθετες στην  $(\epsilon)$  και  $M, N$  μέσα των  $AB, \Gamma\Delta$  αντίστοιχα.

- α) Αν τα  $A, B$  είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την  $(\epsilon)$   
 i. να εξετάσετε αν το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο, τραπέζιο ή ορθογώνιο σε καθεμία από τις περιπτώσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας:  
 1)  $AD < B\Gamma$  (Μονάδες 4)  
 2)  $AD = B\Gamma$ . (Μονάδες 4)  
 ii. να εκφράσετε το τμήμα  $MN$  σε σχέση με τα τμήματα  $AD, B\Gamma$  στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις. (Μονάδες 6)  
 β) Αν η  $(\epsilon)$  τέμνει το τμήμα  $AB$  στο μέσο του  $M$ , να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου  $A\Gamma B\Delta$  (παραλληλόγραμμο, τραπέζιο, ορθογώνιο) και να δείξετε ότι τα  $M, N$  ταυτίζονται. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9+2)

**290.** Θεωρούμε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  και τις προβολές  $A', B', \Gamma', \Delta'$  των κορυφών του  $A, B, \Gamma, \Delta$  αντίστοιχα σε μια ευθεία  $\epsilon$ .



- α) Αν η ευθεία  $\epsilon$  αφήνει τις κορυφές του παραλληλογράμμου στο ίδιο ημιεπίπεδο και είναι  $AA' = 3, BB' = 2, \Gamma\Gamma' = 5$ , τότε:  
 i. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου του παραλληλογράμμου από την  $\epsilon$  είναι ίση με 4.  
 ii. Να βρείτε την απόσταση  $\Delta\Delta'$ . (Μονάδες 9)  
 β) Αν η ευθεία  $\epsilon$  διέρχεται από το κέντρο του παραλληλογράμμου και είναι παράλληλη προς δύο απέναντι πλευρές του, τι παρατηρείτε για τις αποστάσεις  $AA', BB', \Gamma\Gamma', \Delta\Delta'$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

**291.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $A = 90^\circ$ ) και η διχοτόμος του  $B\Delta$ . Από το  $\Delta$  φέρουμε

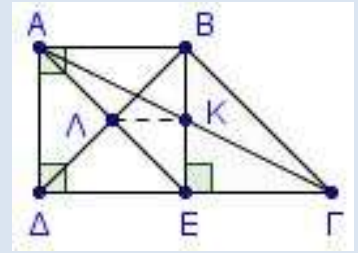
$\Delta E \perp B\Gamma$  και ονομάζουμε  $Z$  το σημείο στο οποίο η ευθεία  $E\Delta$  τέμνει την προέκταση της  $BA$ . Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο  $ABE$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)  
 β) Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $BEZ$  είναι ίσα. (Μονάδες 6)

- γ) Η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετη των τμημάτων ΑΕ και ΖΓ.  
 δ) Το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

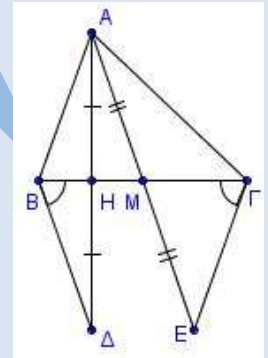
(Μονάδες 6)  
 (Μονάδες 7)

**292.** Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με  $A = \Delta = 90^\circ$ ,  $\Delta\Gamma = 2AB$  και  $B = 3\Gamma$ . Από το Β φέρνουμε κάθετη στη ΓΔ που τέμνει την ΑΓ στο Κ και την ΓΔ στο Ε. Επίσης φέρνουμε την ΑΕ που τέμνει τη ΒΔ στο σημείο Λ. Να αποδείξετε ότι:



- α)  $\Gamma = 45^\circ$  (Μονάδες 8)  
 β)  $B\Delta = AE$  (Μονάδες 9)  
 γ)  $K\Lambda = \frac{1}{4}\Delta\Gamma$  (Μονάδες 8)

**293.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Προεκτείνουμε το ύψος του ΑΗ κατά τμήμα ΗΔ = ΑΗ και τη διάμεσό του ΑΜ κατά τμήμα ΜΕ = ΑΜ. Να αποδείξετε ότι:

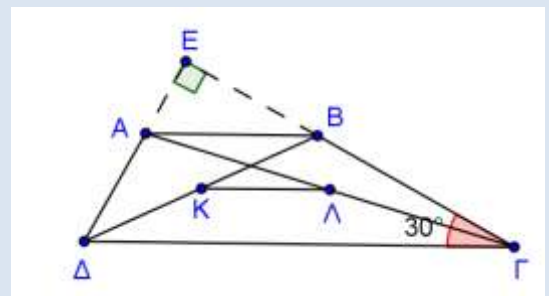


- α)  $AB = BD = GE$  (Μονάδες 8)  
 β)  $\Gamma B\Delta = \Gamma E$  (Μονάδες 8)  
 γ) Αν οι ΒΔ και ΓΕ δεν είναι παράλληλες, τότε το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)

**294.** Θεωρούμε ευθεία (ε) και δύο σημεία Α και Β εκτός αυτής, τα οποία βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την (ε) έτσι ώστε, η ευθεία ΑΒ να μην είναι κάθετη στην (ε). Έστω Α' και Β' τα συμμετρικά σημεία των Α και Β αντίστοιχα ως προς την ευθεία (ε).

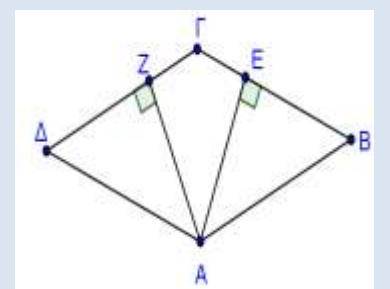
- α) Να αποδείξετε ότι  $AA' \parallel BB'$ . (Μονάδες 6)  
 β) Αν η μεσοκάθετος του ΑΒ τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο Κ, να αποδείξετε ότι το Κ ανήκει και στη μεσοκάθετο του Α'Β'. (Μονάδες 10)  
 γ) Να βρείτε τη σχέση των ευθειών ΑΒ και (ε) ώστε το τετράπλευρο ΑΒΒ'Α' να είναι ορθογώνιο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

**295.** Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) με τη γωνία Γ ίση με  $30^\circ$  και έστω Κ,Λ τα μέσα των διαγωνίων του. Οι μη παράλληλες πλευρές του ΔΑ και ΓΒ προεκτενόμενες τέμνονται κάθετα στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:



- α)  $AB = 2AE$  (Μονάδες 10)  
 β)  $K\Lambda = AD$  (Μονάδες 10)  
 γ) Σε ποια περίπτωση το ΑΒΚΛ είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε τη απάντησή σας. (Μονάδες 5)

**296.** Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος είναι ρόμβος με  $B \neq 60^\circ$ . Θεωρούμε  $AZ \perp \Gamma\Delta$  και  $AE \perp \Gamma B$ . Να αποδείξετε ότι:



- α) Το τρίγωνο ΖΑΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)  
 β) Η ευθεία ΑΓ είναι μεσοκάθετος του ΖΕ. (Μονάδες 9)  
 γ) Αν Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΜΝΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

**297.** Δίνεται κύκλος (Ο, R) με διάμετρο ΑΒ και δύο ευθείες  $\epsilon_1, \epsilon_2$

εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου ΑΒ. Έστω ότι, μια τρίτη ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου σ' ένα σημείο του Ε και τέμνει τις  $\epsilon_1, \epsilon_2$  στα Δ και Γ αντίστοιχα.

- α) Αν το σημείο Ε δεν είναι το μέσο του τόξου ΑΒ, να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο ABΓΔ είναι τραπέζιο.

(Μονάδες 8)

ii.  $\Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$

(Μονάδες 8)

β) Αν το σημείο E βρίσκεται στο μέσον του τόξου AB, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο AΔΓB είναι ορθογώνιο. Στην περίπτωση αυτή να εκφράσετε την περίμετρο του ορθογωνίου AΔΓB ως συνάρτηση της ακτίνας R του κύκλου.

(Μονάδες 9)

**298.** Σε ισοσκελές τραπέζιο ABΓΔ ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) είναι  $AB = A\Delta$ .

α) Να αποδείξετε ότι η BΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ.

(Μονάδες 7)

β) Να προσδιορίσετε τη θέση ενός σημείου E, ώστε το τετράπλευρο ABEΔ να είναι ρόμβος.

(Μονάδες 10)

γ) Αν επιπλέον είναι  $\angle B\Delta = 120^\circ$  και οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται στο σημείο O, να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου EOBΓ.

(Μονάδες 8)

**298.** Θεωρούμε τραπέζιο ABΓΔ τέτοιο, ώστε  $A = \Delta = 90^\circ$ ,  $AB = \frac{1}{4} \Delta\Gamma$

και  $AB = \frac{1}{3} A\Delta$ . Επιπλέον φέρουμε  $BE \perp \Delta\Gamma$ .

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ABEΔ είναι ορθογώνιο.

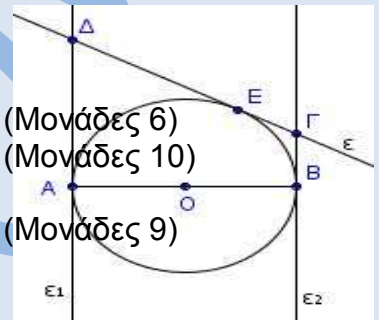
(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο BEΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

(Μονάδες 10)

γ) Αν K, Λ είναι τα μέσα των BE και AΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι η AΓ διέρχεται από το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος BK.

(Μονάδες 9)



**299.** Δίνεται κύκλος (O,R) με διάμετρο AB και ευθείες

$\epsilon_1, \epsilon_2$  εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου AB. Θεωρούμε ευθεία ε εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του E, η οποία τέμνει τις  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  στα Δ και Γ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι  $\Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$

(Μονάδες 9)

β) Το τρίγωνο ΓΟΔ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 9)

γ) Να διερευνήσετε το είδος του τετραπλεύρου ABΓΔ ανάλογα με τη θέση του σημείου E στο ημικύκλιο AB.

(Μονάδες 7)

**300.** Δίνεται τραπέζιο ABΓΔ με  $A = \Delta = 90^\circ$ ,  $\Delta\Gamma = 2AB$  και  $B = 3\Gamma$ .

Φέρνουμε  $BE \perp \Delta\Gamma$  που τέμνει τη διαγώνιο AΓ στο M.

Φέρνουμε την AE που τέμνει τη διαγώνιο BΔ στο σημείο N.

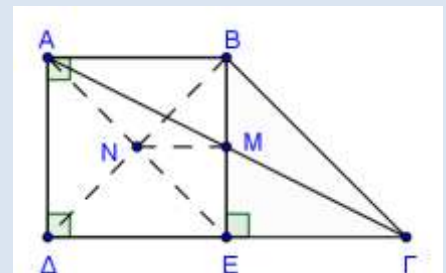
Να αποδείξετε ότι:

α)  $\Gamma = 45^\circ$

(Μονάδες 7)

β) Το τετράπλευρο ABΓE είναι παραλληλόγραμμο.

γ)  $AE \perp B\Delta$



(Μονάδες 9)

(Μονάδες 9)

**301.** Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ με O το κέντρο του. Από την κορυφή Δ φέρνουμε το τμήμα ΔK κάθετο στην AΓ και στην προέκτασή του προς το K θεωρούμε σημείο E, ώστε  $KE = \Delta K$ . Να αποδείξετε ότι:

α)  $EO = \frac{B\Delta}{2}$

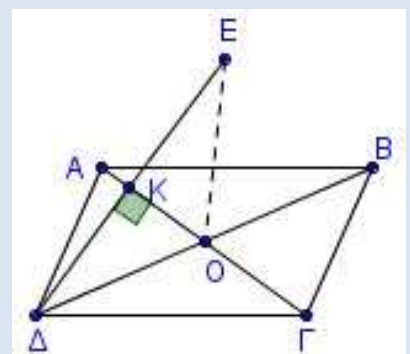
(Μονάδες 8)

β)  $\angle \Delta EB = 90^\circ$

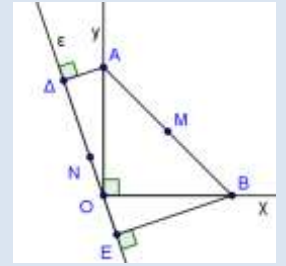
(Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο AEBΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 9)



**302.** Δίνεται ορθή γωνία  $\chi O \gamma = 90^\circ$  και A,B σημεία των ημιευθειών  $O\gamma, O\chi$  με  $OA = OB$ . Η ευθεία ( $\epsilon$ ) διέρχεται από το O και αφήνει τις ημιευθείες  $O\chi, O\gamma$  στο ίδιο ημιεπίπεδο. Η κάθετος από το σημείο A στην ( $\epsilon$ ) την τέμνει στο Δ και η κάθετος από το σημείο B στην ( $\epsilon$ ) την τέμνει στο E. Να αποδείξετε ότι:



α) Τα τρίγωνα OAD και OEB είναι ίσα. (Μονάδες 7)

β)  $AD + BE = DE$  (Μονάδες 7)

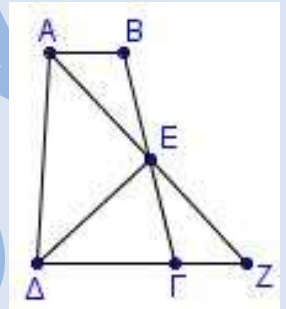
γ)  $MN = \frac{DE}{2}$ , όπου MN το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των DE

και AB. (Μονάδες 7)

δ) Το τρίγωνο ΔME είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

(Μονάδες 4)

**303.** Σε τραπέζιο ABΓΔ με  $AB \parallel \Gamma\Delta$  ισχύει ότι  $AB + \Gamma\Delta = AD$ . Αν η διχοτόμος της γωνίας A τέμνει τη ΒΓ στο E και την προέκταση της ΔΓ στο Z, να αποδείξετε ότι:

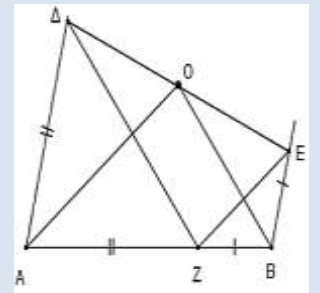


α) Το τρίγωνο ΔAZ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) Το E είναι το μέσο της ΒΓ. (Μονάδες 10)

γ) Η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας Δ του τραpezίου. (Μονάδες 8)

**304.** Δίνεται τραπέζιο AΔEB, με  $AD \parallel BE$ , στο οποίο ισχύει ότι  $AB = AD + BE$ , και O το μέσον της ΔE. Θεωρούμε σημείο Z στην AB τέτοιο ώστε  $AZ = AD$  και  $BZ = BE$ . Αν γωνία ΔAZ = φ,



α) να εκφράσετε τη γωνία AZΔ σε συνάρτηση με τη φ. (Μονάδες 8)

β) να εκφράσετε τη γωνία EZB σε συνάρτηση με τη φ. (Μονάδες 8)

γ) να αποδείξετε ότι οι OA και OB είναι μεσοκάθετοι των τμημάτων ΔZ και ZE αντίστοιχα. (Μονάδες 9)

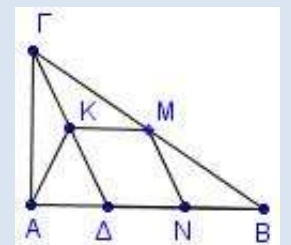
**305.** Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ με  $AB = 2B\Gamma$  και τη γωνία B αμβλεία. Από την κορυφή A φέρουμε την AE κάθετη στην ευθεία ΒΓ και έστω M,N τα μέσα των AB, ΔΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο MBΓN είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο MEGN είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)

γ) Η EN είναι διχοτόμος της γωνίας MEG. (Μονάδες 8)

**306.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με  $A = 90^\circ$  και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AB. Έστω K,M,N τα μέσα των ΓΔ, ΒΓ, ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

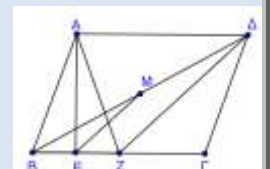


α) Το τετράπλευρο KMND είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο AKMN είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)

γ) Η διάμεσος του τραpezίου AKMN είναι ίση με  $AB/2$ . (Μονάδες 8)

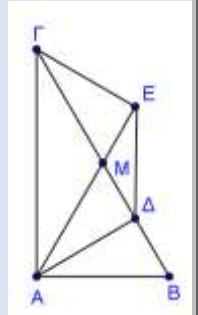
**307.** Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ με τη γωνία του B να είναι ίση με  $70^\circ$  και το ύψος του AE. Έστω Z σημείο της ΒΓ ώστε  $BE = EZ$ .



α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο AZΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραpezίου AZΓΔ. (Μονάδες 9)

γ) Αν  $M$  το μέσο του  $B\Delta$ , να αποδείξετε ότι  $EM = \frac{A\Gamma}{2}$ . (Μονάδες 8)



**308.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A = 90^\circ$  και  $\Gamma = 30^\circ$ . Φέρουμε το ύψος του  $AD$  και τη διάμεσό του  $AM$ . Από το  $\Gamma$  φέρουμε κάθετη στην ευθεία  $AM$ , η οποία την τέμνει στο  $E$ . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο  $AMB$  είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

β)  $ME = M\Delta = \frac{B\Gamma}{4}$  (Μονάδες 9)

γ) Το  $ADE\Gamma$  είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)

**309.** α) Σε ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  θεωρούμε  $K, \Lambda, M, N$  τα μέσα των πλευρών του  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $K\Lambda MN$  είναι ρόμβος. (Μονάδες 13)

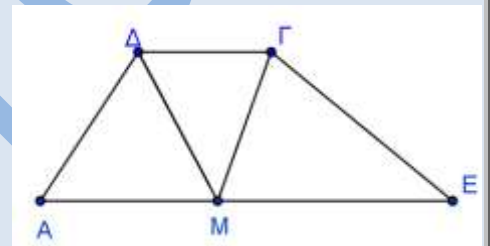
β) Σε ένα τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  τα μέσα  $K, \Lambda, M, N$  των πλευρών του  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$  αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Για να σχηματίζεται ρόμβος το  $AB\Gamma\Delta$  πρέπει να είναι ισοσκελές τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε πλήρως τη θετική ή αρνητική απάντησή σας. (Μονάδες 12)

**310.** Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB \parallel \Gamma\Delta$  και  $AB = AD + B\Gamma$ . Αν η διχοτόμος της γωνίας  $\Delta$  τέμνει την  $AB$  στο σημείο  $M$ , να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο  $ADM$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο  $MB\Gamma$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

γ) Η  $\Gamma M$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\Gamma$  του τραπέζιου. (Μονάδες 8)



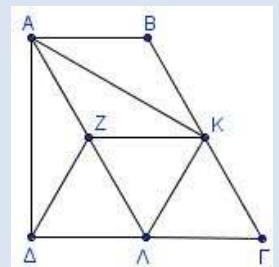
**311.** Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $A = \Delta = 90^\circ$ ) με  $B\Gamma = \Gamma\Delta = 2AB$

και  $K, \Lambda$  τα μέσα των  $B\Gamma$  και  $\Gamma\Delta$ . Η παράλληλη από το  $K$  προς την  $AB$  τέμνει την  $A\Delta$  στο  $Z$ . Να αποδείξετε ότι:

α)  $B\Gamma = 2\Delta Z$ . (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο  $ZK\Gamma\Lambda$  είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)

γ)  $\angle AK\Lambda = 90^\circ$ . (Μονάδες 8)

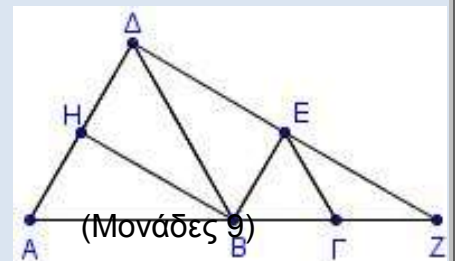


**312.** Σε μια ευθεία ( $\epsilon$ ) θεωρούμε διαδοχικά τα σημεία  $A, B, \Gamma$  έτσι ώστε  $AB = 2B\Gamma$  και στο ίδιο ημιεπίπεδο θεωρούμε ισόπλευρα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $B\Gamma E$ . Αν  $H$  είναι το μέσο του  $A\Delta$  και η ευθεία  $\Delta E$  τέμνει την ( $\epsilon$ ) στο σημείο  $Z$ , να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο  $BH\Delta E$  είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο  $\Gamma ZE$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο  $HE\Gamma A$  είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)

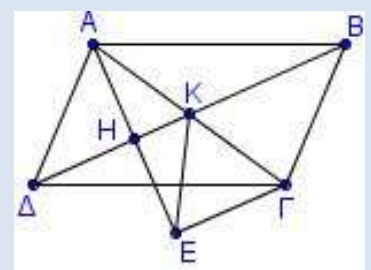


**313.** Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  και  $K$  το σημείο τομής των διαγωνίων του. Φέρουμε  $AH$  κάθετη στην  $B\Delta$  και στην προέκταση της  $AH$  (προς το  $H$ ) θεωρούμε σημείο  $E$  τέτοιο, ώστε  $AH = HE$ . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο  $AKE$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) Το τρίγωνο  $AEG$  είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

γ) Το τετράπλευρο  $\Delta B\Gamma E$  είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)

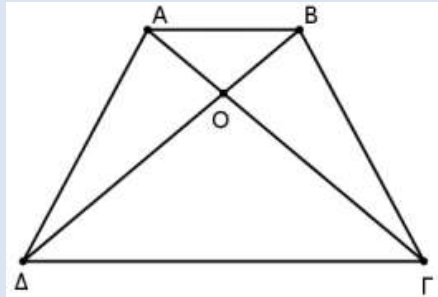


**314.** Στο διπλανό τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  ισχύουν:  
 $AD = B\Gamma$ ,  $A\Gamma = B\Delta$  και  $AB < \Gamma\Delta$ .

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AOB$  και  $\Delta O\Gamma$  είναι  
 ισοσκελή. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι  $\Delta AB = AB\Gamma$ . (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι  
 ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)



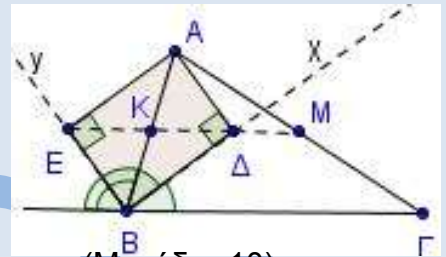
**315.** Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ , η διχοτόμος του  $Bx$  της γωνίας  $B$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  και η διχοτόμος  $By$  της  
 εξωτερικής γωνίας  $B$ . Αν  $\Delta$  και  $E$  είναι οι προβολές της κορυφής  
 $A$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  στην  $Bx$  και  $By$  αντίστοιχα, να αποδείξετε  
 ότι:

α) Το τετράπλευρο  $A\Delta B E$  είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 7)

β) Η ευθεία  $E\Delta$  είναι παράλληλη προς τη  $B\Gamma$  και διέρχεται από το  
 μέσο  $M$  της  $A\Gamma$ .

γ) Το τετράπλευρο  $KM\Gamma B$  είναι τραπέζιο και η διάμεσός του είναι ίση με  $\frac{3\alpha}{4}$ , όπου  $\alpha = B\Gamma$ .

(Μονάδες 8)



**316.** Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  και έστω  $O$  το σημείο τομής των διαγωνίων  $A\Gamma$  και  $B\Delta$ .  
 Φέρνουμε την  $A E$  κάθετη στη διαγώνιο  $B\Delta$ . Αν  $Z$  είναι το συμμετρικό του  $A$  ως προς τη διαγώνιο  
 $B\Delta$ , τότε να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο  $A\Delta Z$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β)  $Z\Gamma = 2OE$  (Μονάδες 9)

γ) Το τετράπλευρο με κορυφές  $B, \Delta, Z$  και  $\Gamma$  είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)

**317.** Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$ . Στην προέκταση της πλευράς  $AB$  παίρνουμε τμήμα  
 $BE = AB$  και στην προέκταση της πλευράς  $A\Delta$  τμήμα  $\Delta Z = A\Delta$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τετράπλευρα  $B\Delta\Gamma E$  και  $B\Delta Z\Gamma$  είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 7)

ii. Τα σημεία  $E, \Gamma$  και  $Z$  είναι συνευθειακά. (Μονάδες 9)

β) Αν  $K$  και  $\Lambda$  είναι τα μέσα των  $BE$  και  $\Delta Z$  αντίστοιχα, τότε  $K\Lambda \parallel \Delta B$  και  $K\Lambda = \frac{3}{2} \Delta B$ .

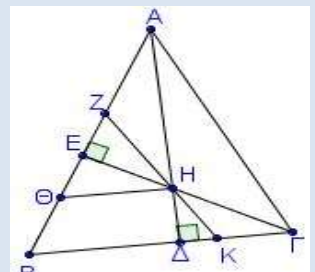
(Μονάδες 9)

**318.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $B = 60^\circ$ . Φέρνουμε τα ύψη  $A\Delta$  και  $\Gamma E$  που  
 τέμνονται στο  $H$ . Φέρνουμε  $KZ$  διχοτόμο της γωνίας  $EHA$  και  $\Theta H$  κάθετο  
 στο ύψος  $A\Delta$ . Να αποδείξετε ότι:

α)  $ZH = 2ZE$  (Μονάδες 9)

β) Το τρίγωνο  $\Theta ZH$  είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

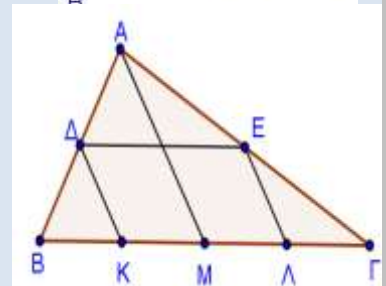
γ) Το τετράπλευρο  $\Theta H K B$  είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)



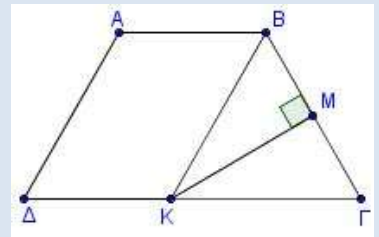
**319.** Έστω ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A = 90^\circ$ . Στην πλευρά  $B\Gamma$   
 θεωρούμε τα σημεία  $K, M, \Lambda$  ώστε  $BK = KM = M\Lambda = \Lambda\Gamma$ . Αν τα σημεία  
 $\Delta$  και  $E$  είναι τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα, να  
 αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο  $\Delta E \Lambda K$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

β) Η διάμεσος του τραπεζίου  $K\Delta AM$  ισούται με  $\frac{3}{8} B\Gamma$ . (Μονάδες 12)



**320.** Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB \parallel \Gamma\Delta$ ,  $B = 2\Gamma$  και  $AB = B\Gamma = A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$ . Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας  $B$ , η οποία τέμνει το  $\Delta\Gamma$  στο  $K$  και η κάθετη από το  $K$  προς τη  $B\Gamma$  το τέμνει στο  $M$ .



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του  $AB\Gamma\Delta$ . (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι:

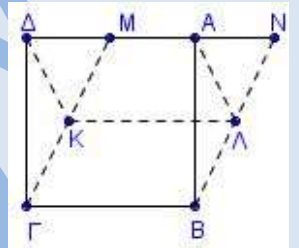
i. Το τετράπλευρο  $ABK\Delta$  είναι ρόμβος.

ii. Το σημείο  $M$  είναι το μέσο του  $B\Gamma$ .

(Μονάδες 8)

(Μονάδες 7)

**321.** Έστω τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  και  $M$  το μέσο της πλευράς  $\Delta A$ . Προεκτείνουμε το τμήμα  $\Delta A$  (προς την πλευρά του  $A$ ) κατά τμήμα  $AN = \frac{A\Delta}{2}$ . Φέρουμε τα τμήματα  $\Gamma M$  και  $BN$



και θεωρούμε τα μέσα τους  $K$  και  $\Lambda$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο  $MNB\Gamma$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο  $A\Delta K\Lambda$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

γ) Το τετράπλευρο  $AMK\Lambda$  είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)

**322.** Σε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB > B\Gamma$  και  $B < 90^\circ$  θεωρούμε σημείο  $Z$  στην προέκταση της  $B\Gamma$  (προς το  $\Gamma$ ) τέτοιο ώστε  $\Gamma Z = B\Gamma$ . Αν  $E$  είναι σημείο της  $AB$ , τέτοιο ώστε  $E\Gamma = \Gamma B$ , να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία  $BEZ$  είναι ορθή. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο  $AE\Gamma\Delta$  είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)

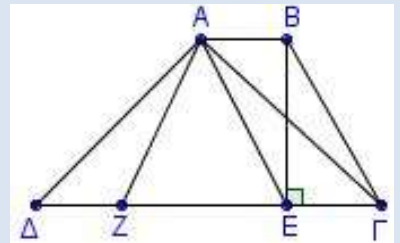
γ) Το τετράπλευρο  $A\Gamma Z\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

**323.** Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB \parallel \Gamma\Delta$ ,  $\Delta\Gamma = 4AB$  και  $B\Gamma = 2AB$ . Θεωρούμε σημείο  $Z$  της  $\Gamma\Delta$ , ώστε  $\Delta Z = AB$ . Αν η γωνία  $\Gamma$  είναι  $60^\circ$  και  $BE$  το ύψος του τραpezίου, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο  $AB\Gamma E$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο  $ZAE$  είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

γ) Τα τρίγωνα  $\Delta AZ$  και  $\Gamma AE$  είναι ίσα. (Μονάδες 9)



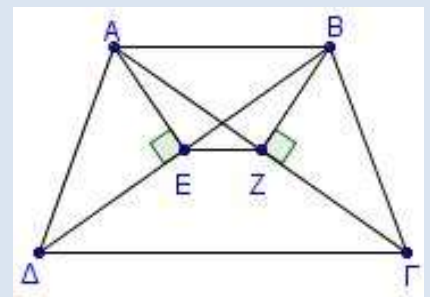
**324.** Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB \parallel \Gamma\Delta$  και  $A\Delta = B\Gamma = AB$ . Φέρουμε τμήματα  $AE$  και  $BZ$  κάθετα στις διαγώνιες  $B\Delta$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία  $Z$  και  $E$  είναι μέσα των διαγωνίων  $A\Gamma$  και  $B\Delta$  αντίστοιχα. (Μονάδες 5)

β)  $AE = BZ$ . (Μονάδες 7)

γ) Το τετράπλευρο  $AEZB$  είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 7)

δ) Η  $B\Delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\Delta$ . (Μονάδες 5)

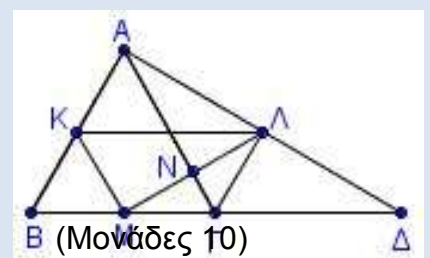


**325.** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Στην προέκταση της  $B\Gamma$  (προς το  $\Gamma$ ) θεωρούμε τμήμα  $\Gamma\Delta = B\Gamma$ . Αν  $M$ ,  $K$  και  $\Lambda$  είναι τα μέσα των πλευρών  $B\Gamma$ ,  $AB$  και  $A\Delta$  αντίστοιχα, τότε:

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $BA\Delta$ . (Μονάδες 7)

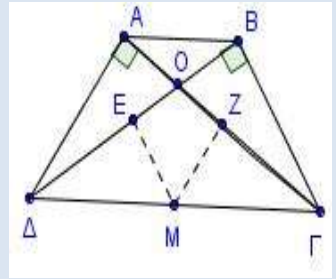
β) Να αποδείξετε ότι: i. Το τετράπλευρο  $K\Lambda\Gamma M$  είναι ισοσκελές τραπέζιο με τη μεγάλη βάση διπλάσια από τη μικρή. (Μονάδες 8)

ii. Το τρίγωνο  $KM\Lambda$  είναι ορθογώνιο.



(Μονάδες 10)

**326.** Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) και  $O$  το σημείο τομής των διαγωνίων του. Η  $AG$  είναι κάθετη στην  $AD$  και η  $BD$  είναι κάθετη στη  $B\Gamma$ .



Θεωρούμε τα μέσα  $M, E$  και  $Z$  των  $\Gamma\Delta, B\Delta$  και  $AG$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- $ME = MZ$ . (Μονάδες 6)
- Η  $MZ$  είναι κάθετη στην  $AG$ . (Μονάδες 6)
- Τα τρίγωνα  $M\Delta E$  και  $MZ\Gamma$  είναι ίσα. (Μονάδες 7)
- Η  $OM$  είναι μεσοκάθετος του  $EZ$ . (Μονάδες 6)

**327.** Έστω ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και  $AD$  διάμεσος. Στο τμήμα  $AD$  θεωρούμε τυχαίο σημείο  $K$  από το οποίο φέρνουμε τα τμήματα  $KZ$  και  $KE$  κάθετα στις  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα.

- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $KB\Gamma$  και  $KZE$  είναι ισοσκελή. (Μονάδες 8)
- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $Z\Gamma B$  είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 10)
- Ένας μαθητής στο α) i. ερώτημα έδωσε την εξής απάντηση:  
«Το τμήμα  $AD$  είναι διάμεσος στη βάση του ισοσκελούς άρα ύψος και διχοτόμος του τριγώνου  $AB\Gamma$  και μεσοκάθετος του  $B\Gamma$ . Οπότε το τρίγωνο  $BK\Gamma$  είναι ισοσκελές.

Τα τρίγωνα  $\triangle ABK$  και  $\triangle A\Gamma K$  έχουν

- $BK = K\Gamma$
- $\angle BAK = \angle \Gamma AK$  επειδή  $AK$  διχοτόμος της γωνίας  $A$
- $\angle ABK = \angle A\Gamma K$  ως διαφορές ίσων γωνιών ισοσκελών τριγώνων.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα βάση του κριτηρίου Γωνία Πλευρά Γωνία.»

Ο καθηγητής είπε ότι η απάντησή του είναι ελλιπής. Να συμπληρώσετε την απάντηση του μαθητή ώστε να ικανοποιεί το κριτήριο Γωνία- Πλευρά- Γωνία διατηρώντας τις πλευρές  $BK$  και  $K\Gamma$ . (Μονάδες 7)

**328.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$  και το ύψος του  $AH$ . Αν  $\Delta, E$  και  $Z$  είναι τα μέσα των  $AB, A\Gamma$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- το τετράπλευρο  $\Delta EZH$  είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)
- οι γωνίες  $H\Delta Z$  και  $HEZ$  είναι ίσες. (Μονάδες 8)
- οι γωνίες  $E\Delta Z$  και  $EHZ$  είναι ίσες. (Μονάδες 9)

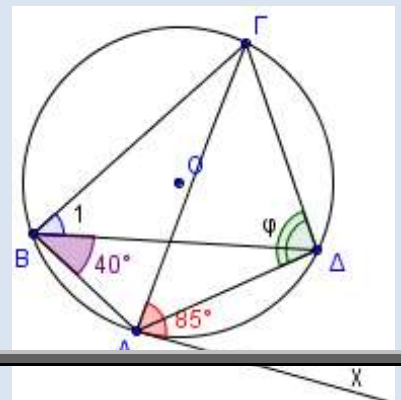
**329.** Έστω ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB > B\Gamma$  τέτοιο, ώστε οι διαγώνιοί του να σχηματίζουν γωνία  $60^\circ$ . Από το  $\Delta$  φέρουμε  $\Delta M$  κάθετη στην  $AG$ .

- Να αποδείξετε ότι:
  - το σημείο  $M$  είναι μέσο του  $AO$  όπου  $O$  το κέντρο του ορθογωνίου. (Μονάδες 8)
  - $AM = \frac{1}{4} A\Gamma$  (Μονάδες 7)
- Αν από το  $\Gamma$  φέρουμε  $\Gamma N$  κάθετη στη  $B\Delta$ , να αποδείξετε ότι το  $M\Gamma\Delta$  είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 10)

### §6.1-6.3

**330.** Στο διπλανό σχήμα η  $Ax$  είναι εφαπτομένη του κύκλου  $(O, \rho)$  σε σημείο του  $A$  και επιπλέον  $\angle Ax = 85^\circ$  και  $\angle B A = 40^\circ$ .

- Να αποδείξετε ότι  $B_1 = 45^\circ$ . (Μονάδες 10)





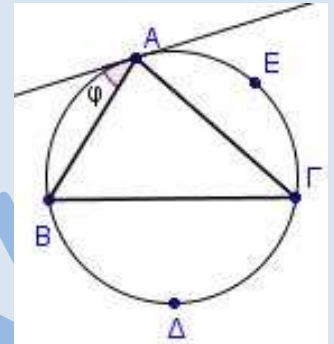
β) Να υπολογίσετε τη γωνία  $\varphi$ .

(Μονάδες 15)

**331.** Στο διπλανό σχήμα, η εφαπτομένη του κύκλου στην κορυφή  $A$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  σχηματίζει γωνία  $\varphi = 30^\circ$  με την πλευρά  $AB$ . Αν το μέτρο του τόξου  $B\Delta\Gamma$  είναι  $160^\circ$ ,

α) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 18)

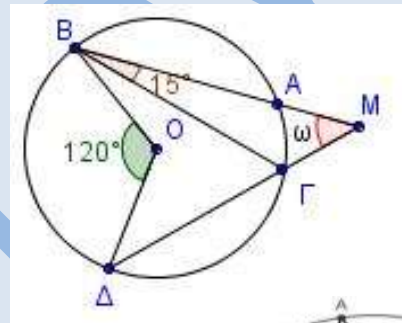
β) να βρείτε το μέτρο του τόξου  $A\epsilon\Gamma$ . (Μονάδες 7)



**332.** Στο διπλανό σχήμα η επίκεντρη γωνία  $BO\Delta$  είναι  $120^\circ$  και η γωνία  $\Gamma BA$  είναι  $15^\circ$ .

α) Να υπολογίσετε τη γωνία  $B\Gamma\Delta$ . (Μονάδες 12)

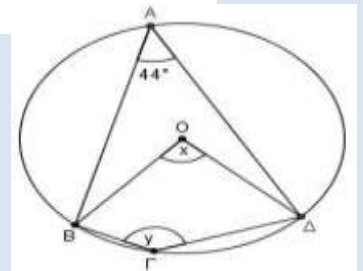
β) Να αποδείξετε ότι η γωνία  $\omega$  είναι  $45^\circ$ . (Μονάδες 13)



**333.** Σε κύκλο κέντρου  $O$  δίνονται οι χορδές  $AB$  και  $A\Delta$  τέτοιες ώστε η γωνία  $BA\Delta$  να είναι  $44^\circ$ . Θεωρούμε τυχαίο σημείο  $\Gamma$  του κύκλου και σχηματίζουμε το τετράπλευρο  $B\Gamma\Delta O$ .

α) Να υπολογίσετε τη γωνία  $x$ . (Μονάδες 12)

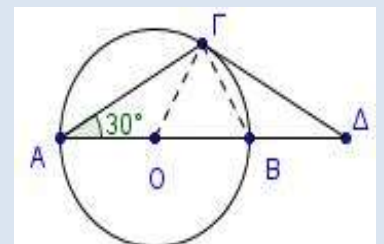
β) Να αποδείξετε ότι η γωνία  $y$  είναι  $136^\circ$ . (Μονάδες 13)



**334.** Δίνεται κύκλος  $(O,R)$  διαμέτρου  $AB$  και χορδή  $A\Gamma$  τέτοια, ώστε  $BA\Gamma = 30^\circ$ . Στο σημείο  $\Gamma$  φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου, η οποία τέμνει την προέκταση της διαμέτρου  $AB$  (προς το  $B$ ) στο σημείο  $\Delta$ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $O\Gamma\Delta$ . (Μονάδες 12)

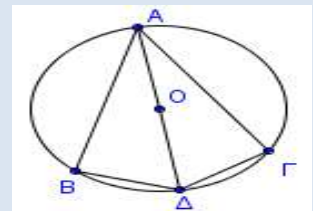
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $\Gamma B\Delta$  είναι ίσα. (Μονάδες 13)



**335.** Έστω κύκλος με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $\rho$ . Αν η διάμετρος  $A\Delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $BA\Gamma$ , να αποδείξετε ότι:

α) Τα τόξα  $B\Delta$  και  $\Delta\Gamma$  είναι ίσα. (Μονάδες 10)

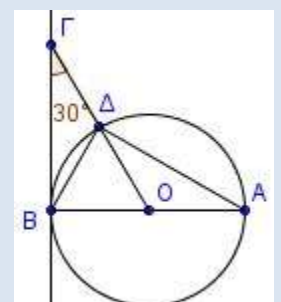
β) Τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $A\Gamma\Delta$  είναι ίσα. (Μονάδες 15)



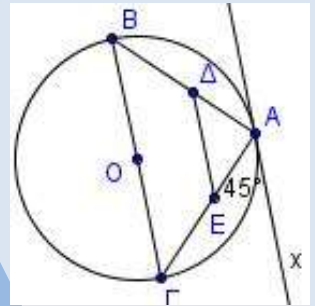
**336.** Θεωρούμε κύκλο  $(O, \rho)$  και διάμετρό του  $AB$ . Στην εφαπτομένη του κύκλου στο  $B$  θεωρούμε σημείο  $\Gamma$  τέτοιο, ώστε η γωνία  $B\Gamma O$  να είναι ίση με  $30^\circ$ . Αν η  $O\Gamma$  τέμνει τον κύκλο στο  $\Delta$ , να αποδείξετε ότι:

α)  $O\Gamma = 2OA$  (Μονάδες 12)

β)  $B\Gamma = A\Delta$  (Μονάδες 13)

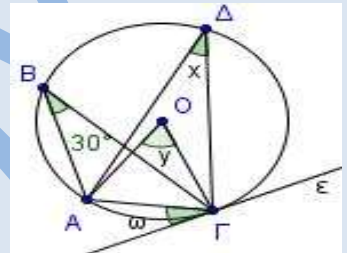


**337.** Θεωρούμε κύκλο διαμέτρου ΒΓ. Φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του Α ώστε να σχηματίζει με τη χορδή ΑΓ γωνία  $45^\circ$ . Φέρουμε επίσης μια παράλληλη ευθεία στη ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο Δ και την ΑΓ στο Ε.



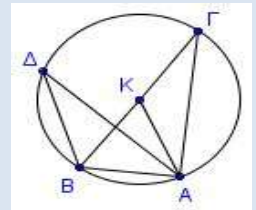
- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΓ. (Μονάδες 10)  
 β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του. (Μονάδες 15)

**338.** Στο διπλανό σχήμα η ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου (Ο, ρ) στο σημείο Γ.



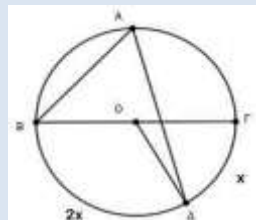
- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\chi, \gamma$  και  $\omega$  δικαιολογώντας σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας. (Μονάδες 15)  
 β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΟΑΓ ως προς τις πλευρές. (Μονάδες 10)

**339.** Έστω κύκλος κέντρου Κ, μια διάμετρος του ΒΓ και σημείο Α του κύκλου τέτοιο, ώστε  $BA = KA$ . Αν Δ τυχαίο σημείο του κύκλου διαφορετικό των Β και Γ,



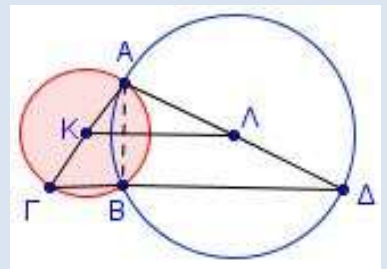
- α) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΚΑ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 7)  
 β) να υπολογίσετε τη γωνία ΒΔΑ. (Μονάδες 9)  
 γ) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 9)

**340.** Έστω κύκλος κέντρου Ο και διαμέτρου ΒΓ. Θεωρούμε τα σημεία Α και Δ του κύκλου εκατέρωθεν της ΒΓ, τέτοια ώστε το τόξο ΒΔ να είναι διπλάσιο του τόξου ΔΓ. Να υπολογίσετε:



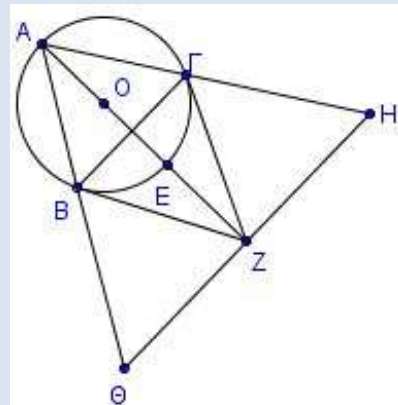
- α) το μέτρο  $\chi$  του τόξου ΓΔ, (Μονάδες 8)  
 β) τη γωνία ΒΟΔ, (Μονάδες 9)  
 γ) τη γωνία ΒΑΔ. (Μονάδες 8)

**341.** Δύο κύκλοι (Κ, ρ), (Λ, R) τέμνονται σε δύο σημεία Α, Β. Αν Γ και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία του Α στους δύο κύκλους, τότε να αποδείξετε ότι:



- α)  $\angle AB\Gamma = 90^\circ$  (Μονάδες 5)  
 β) τα σημεία Γ, Β, Δ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)  
 γ) το τετράπλευρο ΚΛΓΔ είναι τραπέζιο. (Μονάδες 10)

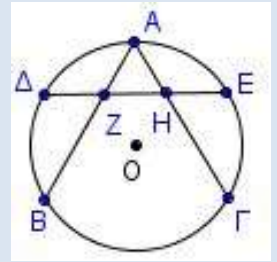
**342.** Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Τα τμήματα ΓΖ και ΒΖ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου στα σημεία Γ και Β αντίστοιχα. Αν το τμήμα ΘΗ είναι κάθετο στο τμήμα ΑΖ στο Ζ, να αποδείξετε ότι:



- α) Το τρίγωνο ΖΒΓ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 7)  
 β) Το τετράπλευρο ΑΓΖΒ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)  
 γ) Το τετράπλευρο ΒΓΗΘ είναι ισοσκελές τραπέζιο, (Μονάδες 10)

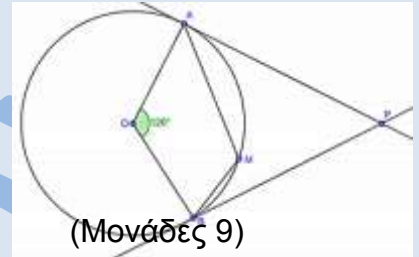
**343.** Σε κύκλο κέντρου  $O$  θεωρούμε τα ίσα τόξα  $AB$  και  $A\Gamma$ , το καθένα ίσο με  $120^\circ$ . Έστω  $\Delta$  και  $E$  τα μέσα των τόξων  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)  
 β) Τα τρίγωνα  $AZ\Delta$  και  $AHE$  είναι ίσα και να υπολογίσετε τις γωνίες τους. (Μονάδες 10)  
 γ) Η χορδή  $DE$  τριχοτομείται από τις χορδές  $AB$  και  $A\Gamma$ . (Μονάδες 7)



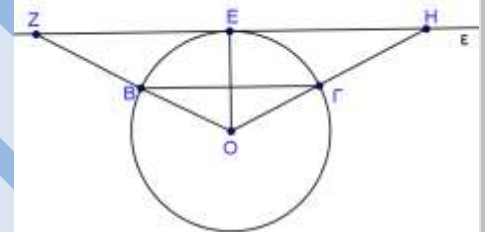
**344.** Δίνεται κύκλος  $(O, \rho)$  και μια επίκεντρη γωνία  $AOB$  ίση με  $120^\circ$ . Οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία  $A$  και  $B$  τέμνονται στο  $P$ . Θεωρούμε σημείο  $M$  του τόξου  $AB$  και φέρουμε τις χορδές  $AM$  και  $BM$ , οι οποίες προεκτείνονται τέμνουν τις  $PB$  και  $PA$  στα σημεία  $\Delta$  και  $E$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο  $APB$  είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)  
 β)  $\angle MAB + \angle MBA = 60^\circ$ . (Μονάδες 8)  
 γ) Για ποια θέση του  $M$  είναι  $AM \perp BP$ ;



**345.** Έστω κύκλος  $(O, \rho)$  και  $E$  το μέσον του τόξου του  $B\Gamma$ . Μια ευθεία  $(\epsilon)$  εφάπτεται στο κύκλο στο  $E$ . Οι προεκτάσεις των  $OB, O\Gamma$  τέμνουν την ευθεία  $(\epsilon)$  στα σημεία  $Z$  και  $H$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α)  $B\Gamma \parallel ZH$  (Μονάδες 5)  
 β)  $OZ = OH$  (Μονάδες 5)  
 γ) Αν  $B$  το μέσον του  $OZ$



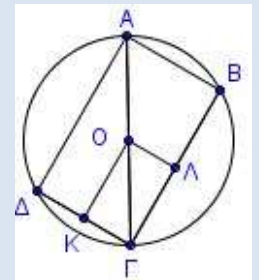
(Μονάδες 7)

i. να αποδείξετε ότι  $BEZ = \frac{ZO\Gamma}{4}$ .

ii. να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $ZOH$ .

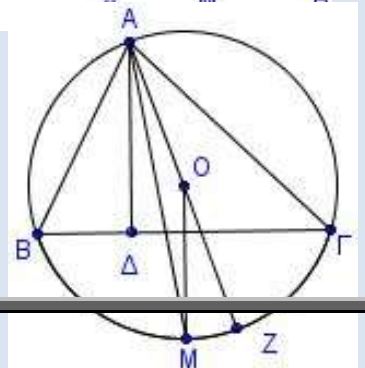
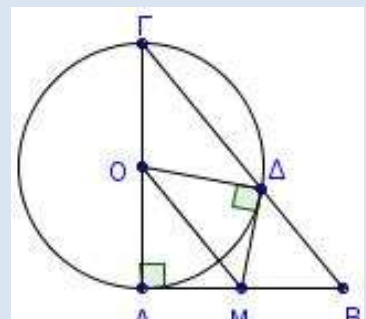
**346.** Δίνεται κύκλος  $(O, \rho)$  και  $A\Gamma$  μια διάμετρος του. Θεωρούμε τις χορδές  $A\Delta = B\Gamma$ . Έστω  $K$  και  $\Lambda$  τα μέσα των χορδών  $\Delta\Gamma$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) Οι χορδές  $AB$  και  $\Delta\Gamma$  είναι παράλληλες. (Μονάδες 6)  
 β) Το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)  
 γ) Η  $B\Delta$  είναι διάμετρος του κύκλου. (Μονάδες 7)  
 δ) Το τετράπλευρο  $OL\Gamma K$  είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)



**347.** Έστω ορθογώνιο τρίγωνο  $\Gamma AB$  ( $A = 90^\circ$ ). Με διάμετρο την πλευρά του  $A\Gamma$  φέρουμε κύκλο που τέμνει την υποτεινούσα  $B\Gamma$  στο  $\Delta$ . Από το  $\Delta$  φέρουμε εφαπτόμενο τμήμα το οποίο τέμνει την  $AB$  στο  $M$ . Να αποδείξετε ότι:

- α)  $\Gamma A \Delta = B$  (Μονάδες 9)  
 β) Το τρίγωνο  $\Delta MB$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)  
 γ) Το  $M$  είναι το μέσο του  $AB$ . (Μονάδες 7)

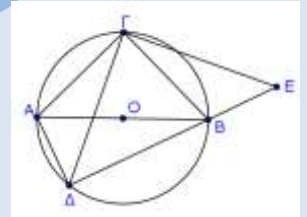


- 348.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$ , εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο  $O$ . Θεωρούμε το μέσο  $M$  του κυρτογώνιου τόξου  $B\Gamma$  και το ύψος  $AD$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:
- α)  $AM$  διχοτόμος της γωνίας  $\Delta AO$ . (Μονάδες 8)
- β)  $\angle OAG = \angle DAB$  (Μονάδες 8)
- γ)  $\angle DAO = \angle B - \angle \Gamma$  (Μονάδες 9)

- 349.** Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  εγγεγραμμένο σε κύκλο  $(O,R)$ . Έστω σημείο  $\Delta$  του τόξου  $AB$  τέτοιο, ώστε  $\Delta B \perp B\Gamma$ .
- α) Να αποδείξετε ότι  $A\Delta \perp A\Gamma$ . (Μονάδες 8)
- β) Έστω  $H$  το ορθόκεντρο του τριγώνου  $AB\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $A\Delta B H$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)
- γ) Αν  $M$  το μέσο της  $B\Gamma$ , να αποδείξετε ότι  $OM = \frac{AH}{2}$ . (Μονάδες 8)

### §6.4-6.6

**350.** Δίνεται κύκλος με κέντρο  $O$  και έστω  $AB$  μια διάμετρος του,  $\Gamma$  το μέσο του ενός ημικυκλίου του και  $\Delta$  τυχαίο σημείο του άλλου. Στην προέκταση της  $\Delta B$  (προς το  $B$ ) θεωρούμε σημείο  $E$  ώστε  $BE = A\Delta$ .



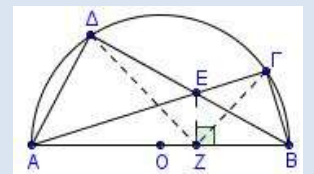
- α) Να αποδείξετε ότι:
- i. Τα τρίγωνα  $A\Delta\Gamma$  και  $B\Gamma E$  είναι ίσα. (Μονάδες 8)
- ii. Η  $\Gamma\Delta$  είναι κάθετη στην  $\Gamma E$ . (Μονάδες 8)
- β) Να αιτιολογήσετε γιατί, στην περίπτωση που το σημείο  $\Delta$  είναι το αντιδιαμετρικό του  $\Gamma$ , η  $\Gamma E$  είναι εφαπτομένη του κύκλου. (Μονάδες 9)

**351.** Δίνεται κύκλος  $(O,r)$  και σημείο  $M$  εξωτερικό του. Από το  $M$  φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα  $MA$  και  $MB$  του κύκλου και έστω ότι το σημείο  $\Gamma$  είναι το συμμετρικό του  $O$  ως προς την ευθεία  $MB$ .

- α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $AMBO$  είναι εγγράψιμο σε κύκλο. (Μονάδες 7)
- β) Να προσδιορίσετε το κέντρο  $\Lambda$  του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου  $AMBO$  και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)
- γ) Να αποδείξετε ότι  $B\Lambda \perp M\Gamma$ . (Μονάδες 9)

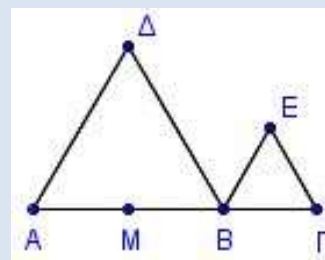
**352.** Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου  $AB$  και δύο χορδές του  $A\Gamma$  και  $B\Delta$ , οι οποίες τέμνονται στο σημείο  $E$ . Φέρουμε  $EZ \perp AB$ . Να αποδείξετε ότι:

- α)  $\angle A\Gamma = \angle B\Delta$  (Μονάδες 7)
- β) Τα τετράπλευρα  $A\Delta EZ$  και  $EZB\Gamma$  είναι εγγράψιμα. (Μονάδες 9)
- γ) Η  $EZ$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\Delta Z\Gamma$ . (Μονάδες 9)



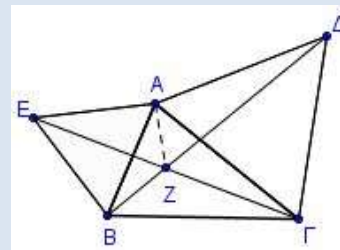
**353.** Έστω  $A, B, \Gamma$  συνευθειακά σημεία με  $AB = 2B\Gamma$ . Θεωρούμε το μέσο  $M$  της  $AB$ . Προς το ίδιο ημιεπίπεδο κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα  $A\Delta B$ ,  $B\Gamma E$ . Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο  $A\Delta EB$  είναι τραπέζιο ( $A\Delta \parallel BE$ ).
- β) Τα τρίγωνα  $\Delta MB$ ,  $\Delta EB$  είναι ίσα. (Μονάδες 8)
- γ) Το τετράπλευρο  $\Delta MBE$  είναι εγγράψιμο. (Μονάδες 8)



**354.** Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου τα ισόπλευρα τρίγωνα  $AEB$ ,  $A\Gamma\Delta$ . Ονομάζουμε  $Z$  το σημείο τομής των τμημάτων  $B\Delta$ ,  $\Gamma E$ . Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα  $A\epsilon\Gamma$  και  $AB\Delta$  είναι ίσα και να γράψετε τα ζεύγη των ίσων γωνιών. (Μονάδες 10)  
 β) Τα τετράπλευρα  $AZ\Gamma\Delta$ ,  $AZBE$  είναι εγγράφιμα. (Μονάδες 10)  
 γ)  $BZ\Gamma = 120^\circ$ . (Μονάδες 5)

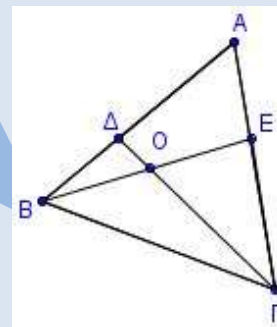


**355.** Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα, ώστε να είναι  $A\Delta = AE$ . Έστω  $O$  το σημείο τομής των  $\Gamma\Delta$  και  $BE$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

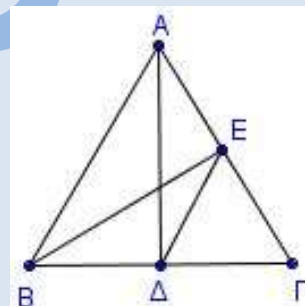
- i.  $BE\Gamma = \Gamma\Delta A$ . (Μονάδες 10)  
 ii.  $BO\Gamma = 120^\circ$ . (Μονάδες 10)

β) Να εξετάσετε αν το τετράπλευρο  $AEO\Delta$  είναι εγγράφιμο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)



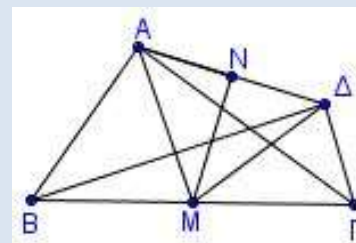
**356.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και  $A\Delta$ ,  $BE$  τα ύψη του. Να αποδείξετε ότι:

- α)  $B\Gamma = 2E\Delta$ . (Μονάδες 6)  
 β)  $BE\Delta = \frac{A}{2}$ . (Μονάδες 7)  
 γ) Το τετράπλευρο  $A\epsilon\Delta B$  είναι εγγράφιμο. (Μονάδες 7)  
 δ)  $ABE = A\Delta E$ . (Μονάδες 7)



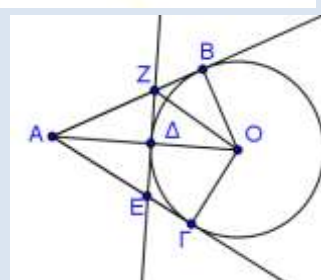
**357.** Δίνονται ορθογώνια τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta B\Gamma$  με  $A = \Delta = 90^\circ$  και  $M, N$  τα μέσα των  $B\Gamma$  και  $A\Delta$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α)  $AM = M\Delta$  (Μονάδες 10)  
 β) Η  $MN$  είναι κάθετη στην  $A\Delta$ . (Μονάδες 10)  
 γ)  $\Gamma B\Delta = \Gamma A\Delta$ . (Μονάδες 5)



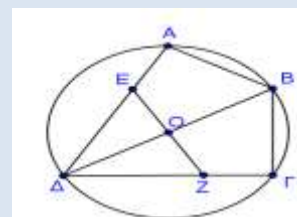
**358.** Δίνεται κύκλος με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $\rho$ . Έστω σημείο  $A$  εξωτερικό του κύκλου και τα εφαπτόμενα τμήματα  $AB$  και  $A\Gamma$  ώστε να ισχύει  $BA\Gamma = 60^\circ$ . Έστω ότι η εφαπτομένη του κύκλου στο  $\Delta$  τέμνει τις  $AB$  και  $A\Gamma$  στα  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο  $ABO\Gamma$  είναι εγγράφιμο με  $OA = 2OB$ . (Μονάδες 6)  
 β) Το τρίγωνο  $A\epsilon Z$  είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 6)  
 γ)  $2ZB = AZ$ . (Μονάδες 7)  
 δ) Το τετράπλευρο  $EZB\Gamma$  είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 6)



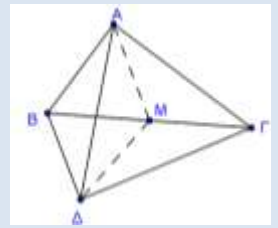
**359.** Δίνεται τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  και ο περιγεγραμμένος του κύκλος  $(O, \rho)$  ώστε η διαγώνιος του  $\Delta B$  να είναι διάμετρος του κύκλου. Η γωνία  $B$  είναι διπλάσια της  $\Delta$  και οι πλευρές  $AB$  και  $B\Gamma$  είναι ίσες. Φέρουμε κάθετη στη  $B\Delta$  στο  $O$ , η οποία τέμνει τις πλευρές  $A\Delta$  και  $\Gamma\Delta$  στα  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα.

- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου  $AB\Gamma\Delta$ . (Μονάδες 6)  
 β) Να συγκρίνεται τα τρίγωνα  $\Delta AB$  και  $\Delta\Gamma B$ . (Μονάδες 6)  
 γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $AB\Gamma O$  είναι ρόμβος. (Μονάδες 7)



δ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ABOE είναι εγγράψιμο σε κύκλο. (Μονάδες 6)

**360.** Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα ABΓ ( $A = 90^\circ$ ) και ΔBΓ ( $\Delta = 90^\circ$ ) (όπου A και Δ εκατέρωθεν της BΓ) και το μέσο M της BΓ. Να αποδείξετε ότι:



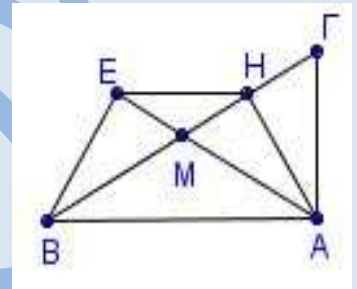
α) το τρίγωνο AMΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

β)  $AM\Delta = 2A\Gamma\Delta$  (Μονάδες 9)

γ)  $\Gamma B\Delta = \Gamma A\Delta$  (Μονάδες 7)

**361.** Σε ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ( $A = 90^\circ$ ) έχουμε ότι  $B = 30^\circ$ .

Φέρουμε το ύψος AH και τη διάμεσο AM του τριγώνου ABΓ. Από την κορυφή B φέρνουμε κάθετη στη διάμεσο AM, η οποία την τέμνει στο σημείο E όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να αποδείξετε ότι:



α)  $BE = \frac{AB}{2}$ . (Μονάδες 7)

β)  $AH = BE$ . (Μονάδες 7)

γ) το τετράπλευρο AHEB είναι εγγράψιμο. (Μονάδες 6)

δ)  $EH \parallel AB$ . (Μονάδες 5)