Πλάγια βολή σώματος – Μετασχηματισμοί συναρτήσεων

Σφαέλος Ιωάννης, Φυσικός, Δ/ντής Πειραματικού Λυκείου Παν/μίου Πατρών
Ευσταθίου Αγγελική, Μαθηματικός, Καθηγήτρια Πειραματικού Λυκείου Παν/μίου Πατρών

Δύο φαινομενικά ξένες περιοχές
των Μαθηματικών και της Φυσικής,
η τετραγωνική συνάρτηση και η πλάγια βολή,
αλληλοεμπλέκονται και συνδέονται
μέσα από τις δυνατότητες
που παρέχει η τεχνολογία.

Η ψηφιακή τεχνολογία στην περιοχή των θετικών επιστημών έχει αναπτύξει εργαλεία λογισμικού που είναι σχεδιασμένα ώστε οι μαθητές να μπορούν να κατασκευάζουν μοντέλα, να πειραματίζονται με τη συμπεριφορά τους, να τα αλλάζουν συχνά με ευκολία, να χειρίζονται, να αναλύουν και να συσχετίζουν δεδομένα.

Χρησιμοποιήσαμε τα λογισμικά:
Interactive Physics,
Tracker
και
Geogebra.

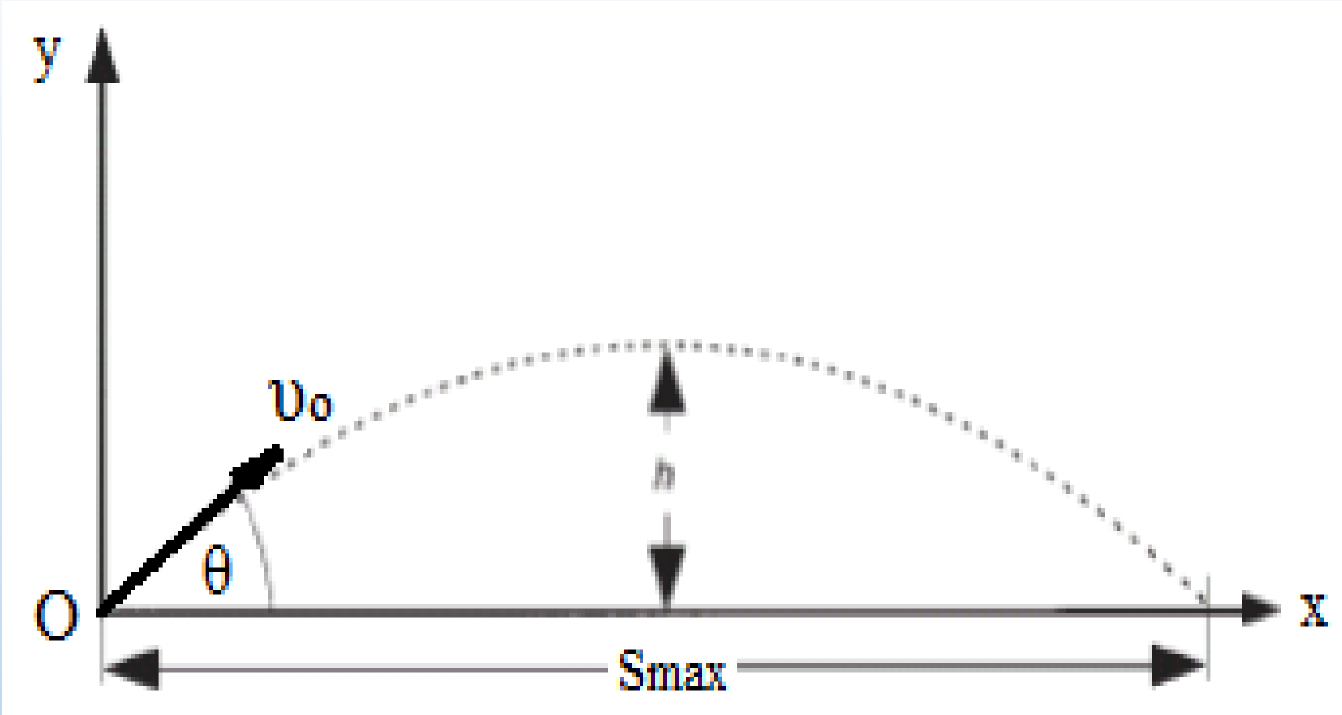
Για τη μελέτη της πλάγιας βολής που εκτελεί ένα σώμα κάνουμε τις παρακάτω δύο υποθέσεις:

α) Η επιτάχυνση βαρύτητας g,

είναι σταθερή για όλη την τροχιά.

β) αγνοούμε την επίδραση που ασκεί

η αντίσταση του αέρα.



$$\upsilon_x = \upsilon_o \sigma\upsilon\nu\theta$$
$$x = \upsilon_o \sigma\upsilon\nu\theta \cdot t$$

$$\upsilon_y = \upsilon_o \eta\mu\theta \cdot t - gt$$
$$y = \upsilon_o \eta\mu\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

Εξίσωση τροχιάς

$$y = \varepsilon\varphi\theta \cdot x - \frac{g}{2\upsilon_o^2 \sigma\upsilon\nu^2\theta} \cdot x^2$$

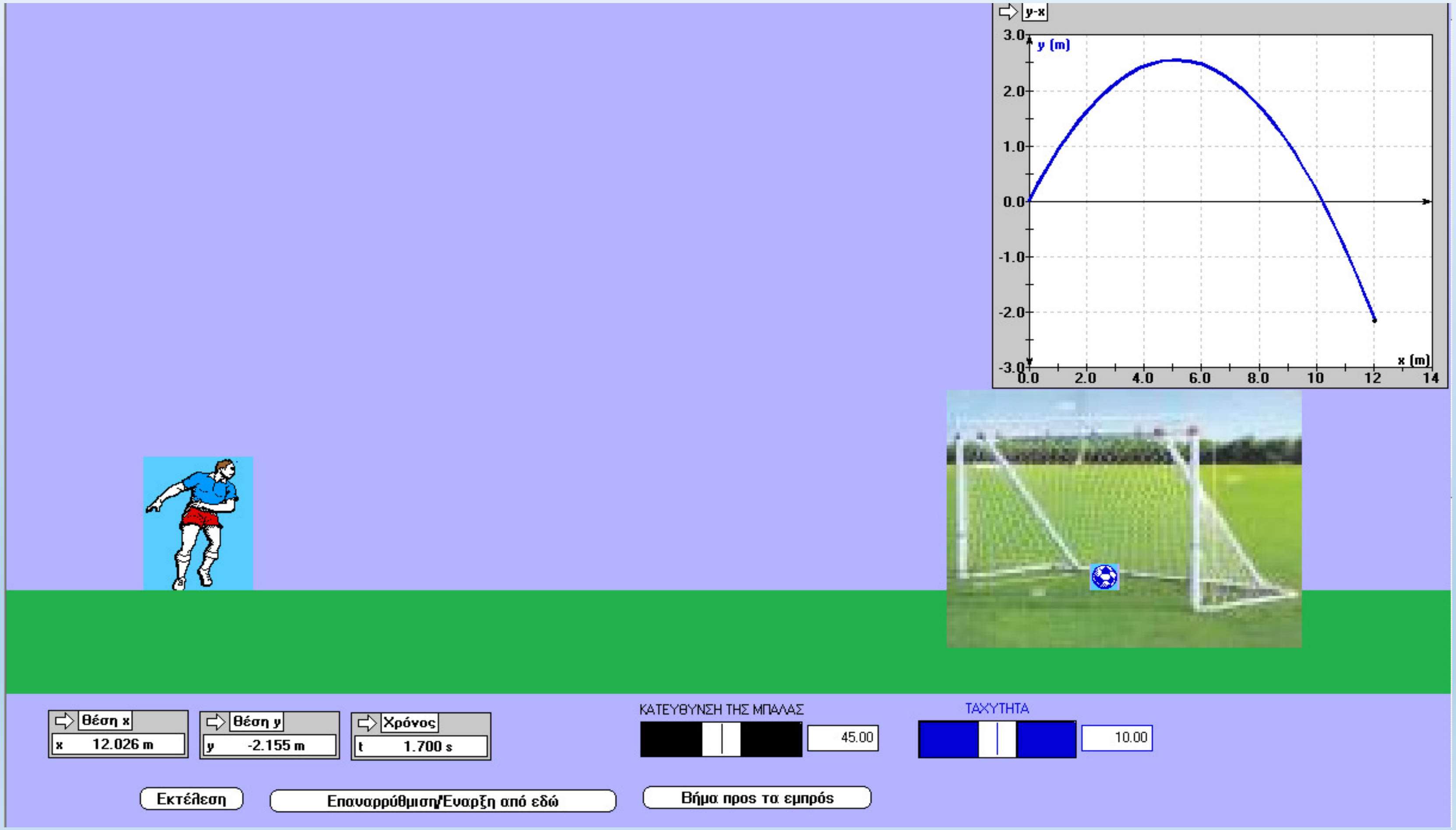
Μέγιστο ύψος

$$h = \frac{\upsilon_o^2 \eta\mu^2\theta}{2g}$$

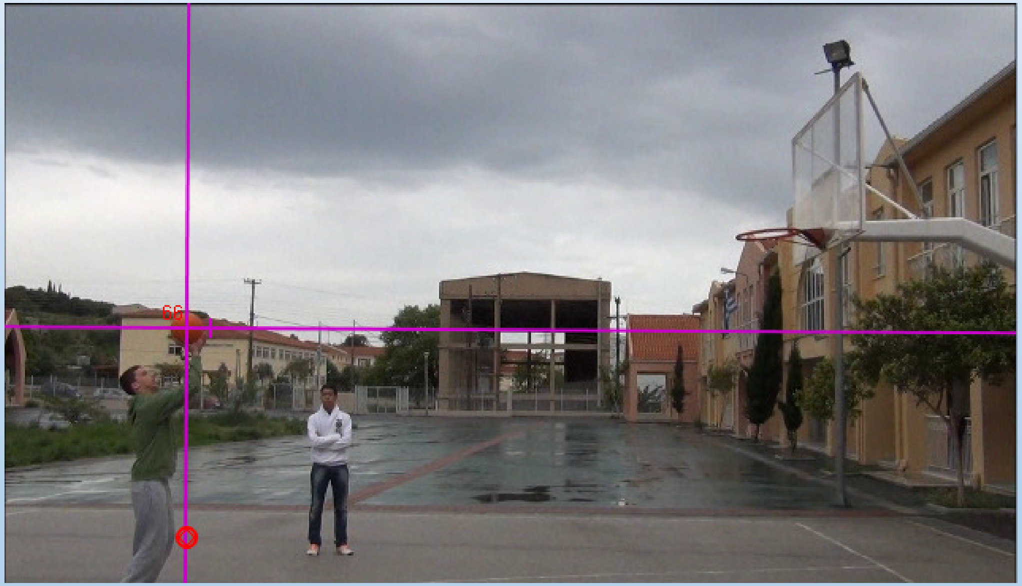
Μέγιστη οριζόντια απόσταση (Βεληνεκές)

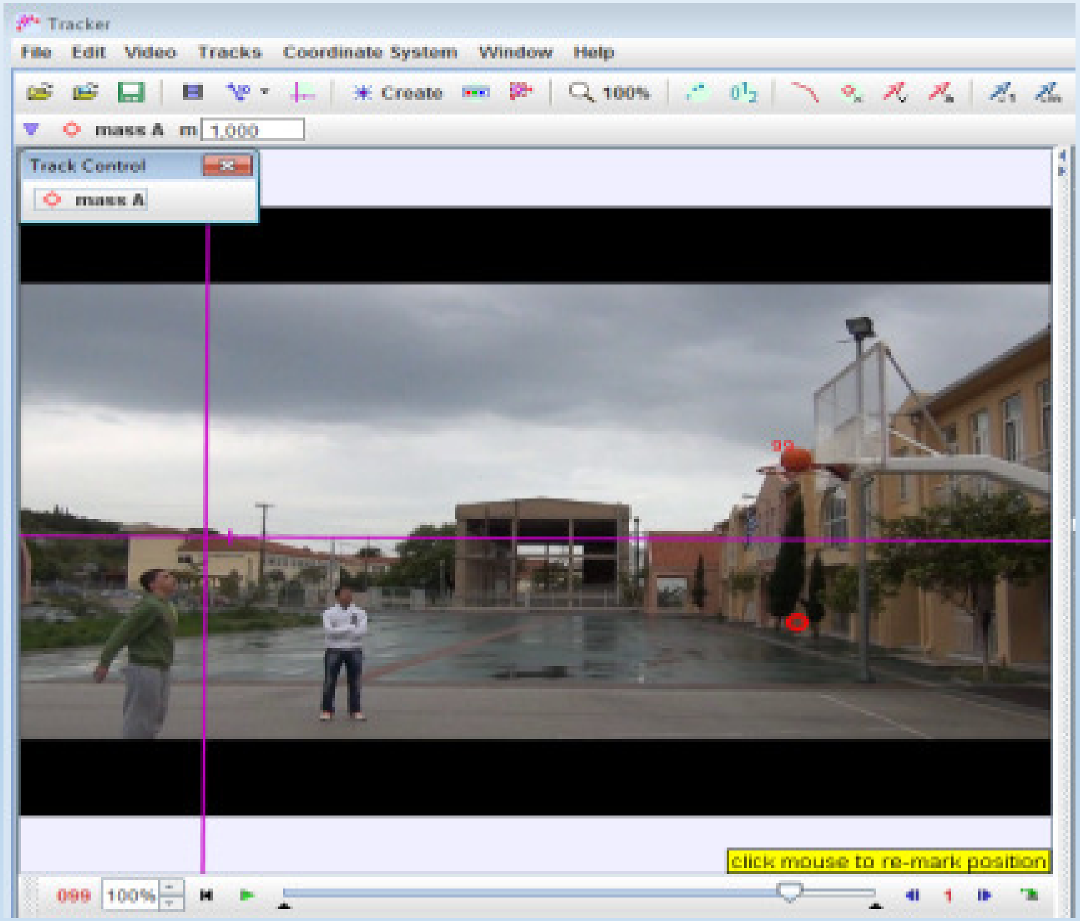
$$s_{max} = \frac{\upsilon_o^2 \eta\mu 2\theta}{g}$$

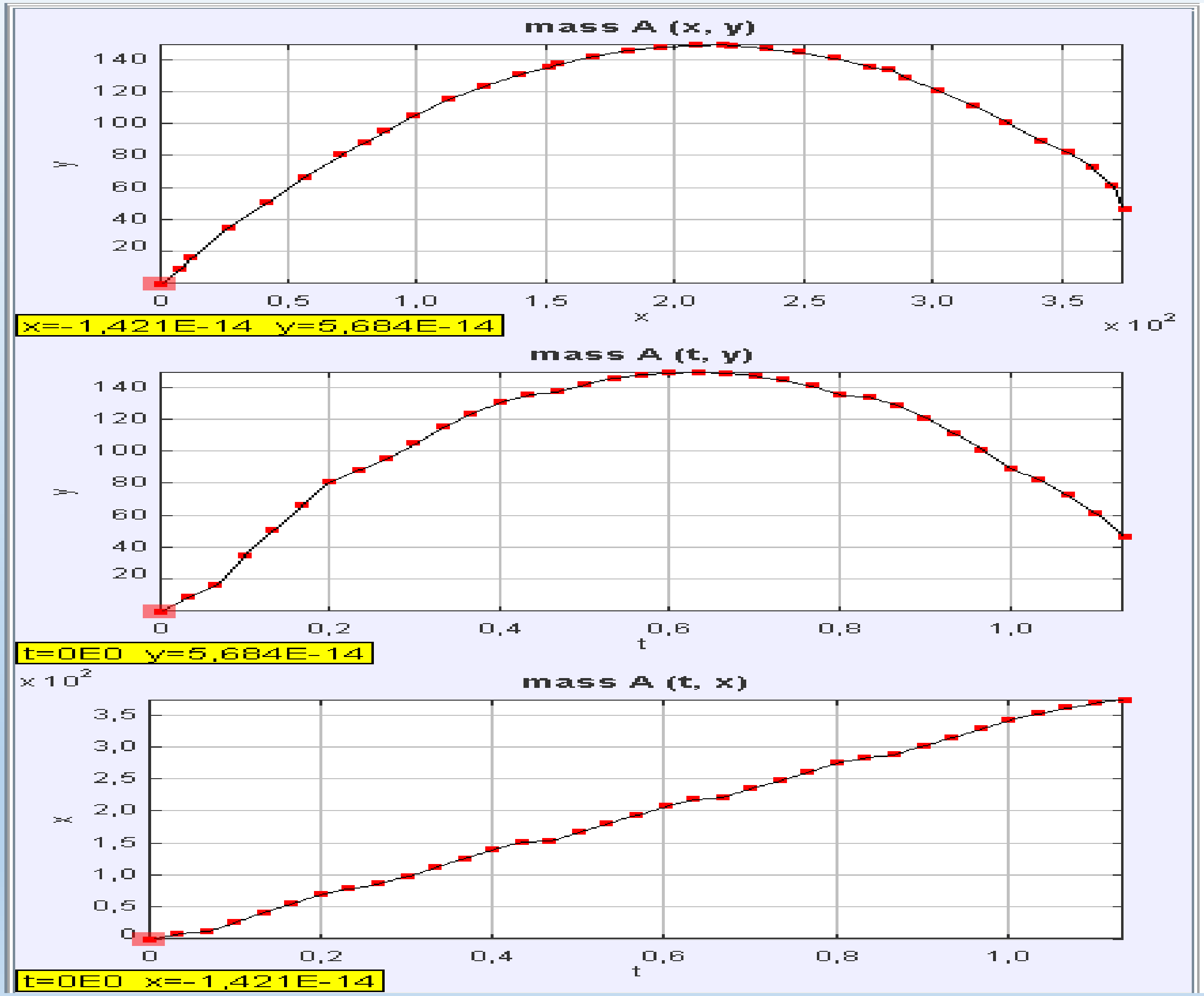
Πλάγια βολή με το Interactive Physics



Πειραματική εκτέλεση πλάγιας βολής μπάλας

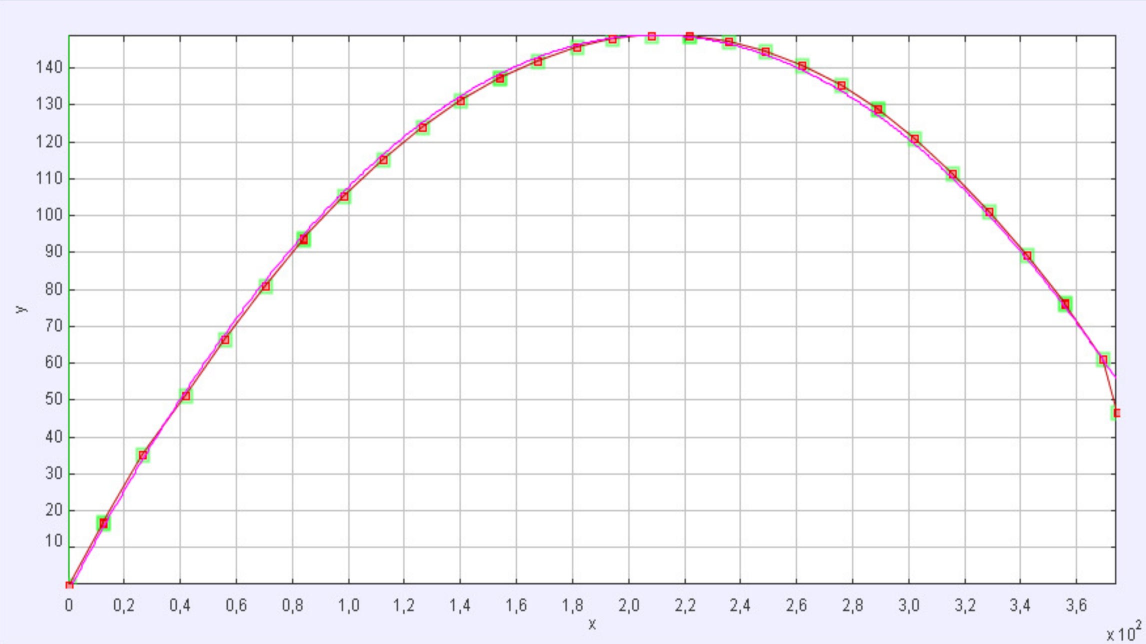





mass A (x, y)
140
120
100
80
60
40
20
y
0
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
3,0
3,5
x
x 10²
x=-1,421E-14 y=5,684E-14
mass A (t, y)
140
120
100
80
60
40
20
y
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
t
t=0E0 y=5,684E-14
x 10²
mass A (t, x)
3,5
3,0
2,5
2,0
1,5
1,0
0,5
0
x
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
t
t=0E0 x=-1,421E-14

Καμπύλη προσέγγισης $y=Ax^2+Bx+C$

Μέτρηση | Ανάλυση | Δημιουργός δεδομένων... | Ανανέωση | Βοήθεια



Όνομα συνάρτησης προσέγγισης: Παραβολή | Δημιουργός συναρτήσεων προσέγγισης...

Εξίσωση συνάρτησης προσέγγισης: y = A*x^2 + B*x + C

☑ Αυτόματη προσέγγιση rms dev: 1,874E0

Παράμετρος	Τιμή
A	-3,442E-3
B	1,442E0
C	-2,020E0

Σημεία		☑	☐
Γραμμές		☑	☐
Μορφή			
Άξονας	οριζόντιος	κατακόρυφος	κατακόρυφος

γραμμή	x	y	t
0	-0	0	0
1	12,303	16,703	0,033
2	12,282	16,828	0,066
3	26,465	35,203	0,1
4	41,921	51,34	0,133
5	55,985	66,636	0,167
6	70,378	80,976	0,2
7	84,029	93,719	0,233
8	84,01	93,831	0,267
9	98,276	105,243	0,3
10	112,26	115,41	0,333
11	126,195	123,899	0,367
12	140,067	131,161	0,4
13	153,926	137,36	0,433
14	153,94	137,218	0,467
15	167,567	142,01	0,5
16	181,351	145,772	0,534
17	194,155	147,977	0,567
18	207,957	148,96	0,6
19	221,739	148,876	0,634
20	221,83	148,903	0,667
21	235,663	147,169	0,7
22	248,547	144,593	0,734
23	262,006	140,888	0,767
24	275,612	135,351	0,801
25	288,929	128,963	0,834
26	289,003	128,979	0,867
27	301,841	121,016	0,901
28	315,359	111,454	0,934
29	328,519	101,078	0,967
30	342,274	89,165	1,001
31	355,657	76,232	1,034
32	355,754	76,106	1,067
33	369,324	61,241	1,101
34	374,114	46,835	1,134

$$\boldsymbol{y = \varepsilon\varphi\theta \cdot x - \frac{g}{2\upsilon_o^2\sigma\upsilon\nu^2\theta} \cdot x^2}$$

$$B = \varepsilon\varphi\theta = 1{,}442$$

$$\theta \cong 55^o$$

$$\mathrm{A} = -\frac{\mathrm{g}}{2\upsilon_o^2\sigma\upsilon\nu^2\theta} = -3{,}442 \cdot 10^{-3}$$

$$\upsilon_o = \frac{658cm}{s} = 6{,}58m/s$$

Μαθηματική επεξεργασία της τετραγωνικής συνάρτησης

$$\mathbf{f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma}$$

Η διδασκαλία των συναρτήσεων περιλαμβάνει σε
κάθε τάξη και την ενασχόληση
με τους μετασχηματισμούς τους.
Η κατανόηση των μετασχηματισμών όμως
δεν είναι εύκολη για τους μαθητές.
Η αναγνώριση των μετασχηματισμών
και ιδιαίτερα αυτών που σχετίζονται
με την οριζόντια μετατόπιση
δυσκολεύει τους μαθητές.

Για παράδειγμα,
όταν προστίθεται ή αφαιρείται ένας αριθμός ***c***
στην ανεξάρτητη μεταβλητή ***x***
η γραφική παράσταση μετατοπίζεται
αριστερά ή δεξιά αντίστοιχα
κάτι το οποίο έρχεται σε αντίθεση
με αυτό που αναμένουν οι μαθητές.

Στην περίπτωση της τετραγωνικής συνάρτησης, υπαγορεύεται αλλαγή της μορφής του τύπου:

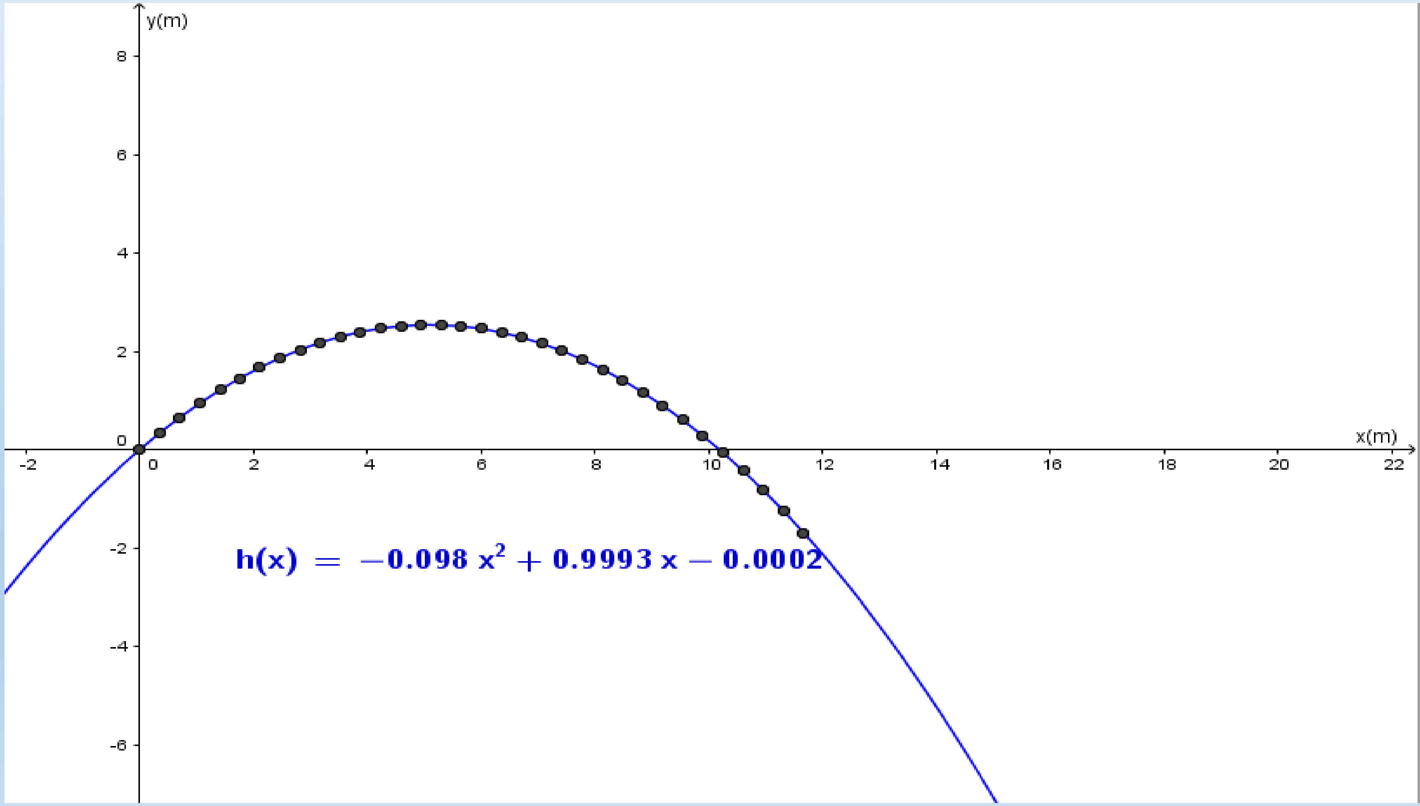
$$\mathbf{f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma} \quad \textbf{σε} \quad \mathbf{f(x) = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha}}$$

παρουσιάζοντας τη γραφική της παράσταση ως το αποτέλεσμα δύο διαδοχικών μετατοπίσεων της γραφικής παράστασης της $\mathbf{g(x)=ax^2}$.

Επειδή η έννοια του μετασχηματισμού συνάρτησης
περιλαμβάνει την έννοια της μεταβολής,
οι στατικές εικόνες πριν και μετά το μετασχηματισμό
δεν μπορούν να προσφέρουν τα ίδια οφέλη
με την παρατήρηση του μετασχηματισμού
με δυναμικό τρόπο.

Τα οπτικά μοντέλα που μελετώνται
με δυναμικό τρόπο,
καθώς κατασκευάζονται στην οθόνη του υπολογιστή
δίνουν τη δυνατότητα στους μαθητές
να παρατηρήσουν την εξέλιξή τους
και την πορεία της διαδικασίας,
εξαλείφοντας τον περιορισμό
της παρατήρησης του τελικού σταδίου.

Δραστηριότητα 1:
Ανακάλυψη του μαθηματικού μοντέλου που περιγράφει την πλάγια βολή



	A	B
1	x (m)	y (m)
2	0	0
3	0.35	0.34
4	0.71	0.66
5	1.06	0.95
6	1.42	1.22
7	1.77	1.46
8	2.12	1.68
9	2.48	1.87
10	2.83	2.04
11	3.18	2.19
12	3.54	2.31
13	3.89	2.4
14	4.24	2.48
15	4.6	2.52
16	4.95	2.55
17	5.31	2.54
18	5.66	2.52
19	6.01	2.47
20	6.37	2.39
21	6.72	2.29
22	7.07	2.17

Δραστηριότητα 2:
Εκμάθηση και μελέτη των μετασχηματισμών οριζόντιας και κατακόρυφης μετατόπισης

Στις αρχικές ερωτήσεις του φύλλου εργασίας
οι μαθητές εργάζονται
με την συνάρτηση $y = x^2$
και τις κατακόρυφες και οριζόντιες μετατοπίσεις της
μέσω της επεξεργασίας του αρχείου «Δραστηριότητα 2»
στο οποίο είναι σχεδιασμένες οι συναρτήσεις
$g(x) = \alpha x^2$, $f(x) = \alpha(x + c)^2 + k$

Οι μαθητές έμαθαν να χρησιμοποιούν
βασικές εντολές του εργαλείου
που τους βοήθησε να παρατηρήσουν τις μεταβολές
και να διερευνήσουν τις σχέσεις που υπάρχουν
στις σχηματισμένες γραφικές παραστάσεις.

Έτσι κατέληξαν να μεταφράσουν τα συμπεράσματα
για τις μετατοπίσεις των γραφικών παραστάσεων
στις αλγεβρικές εκφράσεις $\mathbf{y = x^2 + k}$ και $\boldsymbol{y = (x + c)^2}$
για τις κατακόρυφες και οριζόντιες μετατοπίσεις
της $\boldsymbol{y = x^2}$ αντίστοιχα
αλλά και το σχηματισμό της $\boldsymbol{y = (x + c)^2 + k}$
που συνδυάζει τα δύο είδη μετατοπίσεων
έχοντας κατανοήσει την ανεξαρτησία τους.

Επαναλαμβάνουν την παραπάνω διερεύνηση
μετακινώντας το δρομέα α ώστε
να πάρει τιμή διαφορετική της μονάδας
καταλήγοντας σε ανάλογα συμπεράσματα.
Οι μαθητές επιλέγουν μία δική τους συνάρτηση $\boldsymbol{g(x)}$
προσαρμόζοντας τον τύπο που καταλήξανε
ο οποίος περιγράφει την οριζόντια
και κατακόρυφη μετατόπιση της $\boldsymbol{y = \alpha x^2}$
στη δική τους $\boldsymbol{g(x)}$.

Δραστηριότητα 3:
Σχεδιασμός και μελέτη της συνάρτησης

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \qquad \alpha \neq 0$$

Συμπεράσματα

Με τη συγκεκριμένη εργασία μας στα πλαίσια υλοποίησης ετήσιου σχολικού προγράμματος με μαθητές της Β΄ Λυκείου, διαπιστώσαμε αφενός την επίτευξη των διδακτικών στόχων της συγκεκριμένης ενότητας καθώς και των ευρύτερων στόχων της Φυσικής και των Μαθηματικών, αφετέρου καλλιεργήθηκαν και ενεργοποιήθηκαν μέθοδοι διδασκαλίας και μάθησης που σχετίζονται με ευρύτερες διαδικασίες όπως η υπόθεση, ο έλεγχος, η ανάλυση, η σύνθεση, ο στοχασμός και η ερμηνεία καθώς και η αποφυγή των όποιων παρανοήσεων ή δυσερμηνειών.

Η επιτυχημένη κατανόηση των μετασχηματισμών συναρτήσεων μπορεί να μην είναι ιδιαίτερα εύκολη και να απαιτεί κάποιες συγκεκριμένες γνώσεις αλλά ωφελεί τους μαθητές και η παρουσία τους θεωρείται απαραίτητη στη μαθηματική εκπαίδευση.
Μέσα από τους μετασχηματισμούς συναρτήσεων οι μαθητές εξοικειώθηκαν με τις διαφορετικές αναπαραστάσεις και τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ τους.

Η υλοποίηση των δραστηριοτήτων
βοήθησε τους μαθητές
να δουν τους μετασχηματισμούς
που γίνονται στην εξίσωση μιας συνάρτησης
καθώς μεταβάλλονται οι τιμές κάποιων μεταβλητών,
οδηγώντας στην αλλαγή
κάποιων από τα χαρακτηριστικά της,
και να κατανοήσουν τις συναρτήσεις ως οικογένειες
αλλά και τις σχέσεις που τις συνδέουν.

Ευχαριστούμε
για την προσοχή σας