

Μελέτη κίνησης φυσαλίδας αέρα σε σωλήνα με υγρό

Σφαέλος Ιωάννης

Εκπ/κός Π.Ε.04.01, PhD Θεωρητικής Φυσικής, ioasfaelos@sch.gr

Φύττας Γεώργιος

Εκπ/κός Π.Ε.04.01, Phd Student, M. Sc. in Science Education, georgefyttas@gmail.com

Ευσταθίου Αγγελική

Εκπ/κός Π.Ε.03Μ.Σc. Διδακτικής Μαθηματικών, aefstath@sch.gr

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία μέσω ενός εκπαιδευτικού προγράμματος με μαθητές του Λυκείου, μελετήθηκε η επίδραση της κλίσης ενός σωλήνα στην ταχύτητα κίνησης μιας φυσαλίδας αέρα μέσα σ' αυτόν, όπως επίσης και η επίδραση του μεγέθους της φυσαλίδας και του είδους του υγρού στην ταχύτητα της φυσαλίδας. Ολόκληρη αυτή η διαδικασία υλοποιήθηκε στο σχολικό εργαστήριο, με την ενεργή συμμετοχή μαθητών σε όλα τα επίπεδα, όπως κατασκευή πειραματικής διάταξης, μετρήσεις, υπολογισμοί, εξαγωγή συμπερασμάτων. Τα πειράματα διεξήχθησαν σε λεπτούς, διαφορετικής διατομής και διάφανους σωλήνες γεμάτους με νερό αρχικά και κατόπιν με οινόπνευμα, εγκλωβίζοντας σ' αυτόν μια μικρή διαφόρων μεγεθών φυσαλίδα αέρα. Δίνοντας διαφορετική κάθε φορά κλίση στον κλειστό σωλήνα, παρατηρήθηκε σε κάθε περίπτωση ότι η φυσαλίδα του αέρα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα που άλλαζε μέτρο. Η μαθηματική επεξεργασία των μετρήσεων έγινε με αξιοποίηση του λογισμικού Excel.

Λέξεις-Κλειδιά: Φυσαλίδα αέρα, ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, Excel

Εισαγωγή

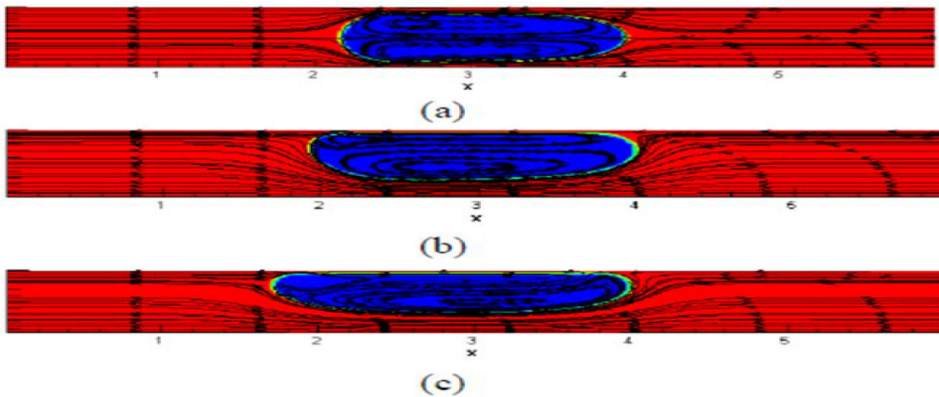
Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη και εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με τα χαρακτηριστικά της κίνησης μιας φυσαλίδας αέρα, η οποία εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση μέσα σε κλειστό και στα δύο άκρα σωλήνα με υγρό. Πολλές προσπάθειες έχουν γίνει στο χώρο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (ΕΚΦΕ Πειραιά -Νίκαιας, ΕΚΦΕ Πειραιά – Καλλίπολης, Νέζης, 2014). Στην πειραματική επικύρωση της πρόβλεψης αυτής του θεωρητικού πλαισίου ενεπλάκη ομάδα μαθητών προσανατολισμού θετικών σπουδών του Λυκείου ώστε να συμμετέχουν ενεργά στην επιστημονική διαδικασία ανακάλυψης της γνώσης. Τα υγρά που χρησιμοποιήθηκαν στη συγκεκριμένη πειραματική διαδικασία είναι το νερό και το οινόπνευμα. Λόγω του μεγάλου ιξώδους αυτών των υγρών (με το νερό να έχει μεγαλύτερη τιμή), η φυσαλίδα αποκτά γρήγορα σταθερή (οριακή) ταχύτητα, καθώς η συνισταμένη των δυνάμεων που δέχεται μηδενίζεται λίγο μετά την έναρξη της κίνησης. Οι δυνάμεις αυτές είναι η άνοση και η τριβή

με το σωλήνα (ή η αντίσταση από το νερό αν η διάμετρος της φυσαλίδας είναι μικρότερη από τη διάμετρο του σωλήνα). Το βάρος της φυσαλίδας θεωρείται αμελητέο. Από τη θεωρία προκύπτει ότι οι μεγάλες φυσαλίδες που δεν είναι σφαιρικές, κινούνται ταχύτερα έναντι των μικρών φυσαλίδων που είναι σφαιρικές και κινούνται πιο αργά (Zukoski, 1966).

Εκτελώντας το πείραμα για διάφορες γωνίες κλίσης του σωλήνα, οι μαθητές παρατήρησαν ότι η ταχύτητα της φυσαλίδας μεταβάλλεται με την κλίση. Στη συνέχεια τέθηκε στους μαθητές το εξής ερώτημα: “σε ποια κλίση του σωλήνα θα έχουμε τη μέγιστη ταχύτητα της φυσαλίδας”. Η πρόβλεψή τους ήταν “όταν ο σωλήνας είναι κατακόρυφος”. Η εκτέλεση του πειράματος όμως κατ’ επανάληψη και για τα δύο υγρά και για διάφορα μεγέθη φυσαλίδας, έδειξε ότι αυτή, στην κατακόρυφη θέση κινείται υπερβολικά αργά, διαψεύδοντας ριζικά την πρόβλεψη των μαθητών. Για να μελετηθεί πληρέστερα το φαινόμενο και να διερευνηθεί διεξοδικά η επίδραση της γωνίας κλίσης του σωλήνα στην τιμή της ταχύτητας της φυσαλίδας, οι μαθητές ενεπλάκησαν στην κατασκευή μιας πειραματικής διάταξης που θα περιγράψουμε παρακάτω.

Θεωρητικό πλαίσιο

Σε πειράματα που έχουν διεξαχθεί σε εργαστήρια Πανεπιστημίων οι μετρήσεις έδειξαν ότι η ταχύτητα της φυσαλίδας φτάνει σε μια σταθερή τιμή (οριακή ταχύτητα), μέσα σε διανυθέν διάστημα ίσο με 5 έως 10 ακτίνες της διατομής του σωλήνα.



Σχ. 1. Το σχήμα και το μέγεθος μιας φυσαλίδας με $Re=20$ για κλίσεις

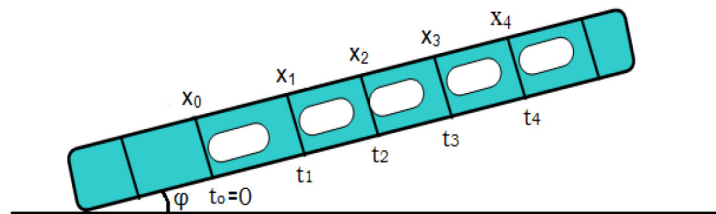
(a) $\varphi=90^\circ$, (b) $\varphi=40^\circ$, (c) $\varphi=5^\circ$.

Η μόνη εξαίρεση σε αυτό το αποτέλεσμα εμφανίστηκε όταν ο σωλήνας είναι οριζόντιος ή σχεδόν οριζόντιος. Αν η φυσαλίδα καταλαμβάνει όλη τη διάμετρο του σωλήνα, τότε θα έμενε ακίνητη, εκτός αν υπάρχει μία πολύ λεπτή επιφάνεια (στρώμα υγρού), η οποία

παρεμβάλλεται μεταξύ των τοιχωμάτων του σωλήνα και της φυσαλίδας. Σ' αυτή την περίπτωση θα παρατηρούμε κίνηση της φυσαλίδας (Bozzano et al., 2001).

Οι δυνάμεις που ασκούνται στη φυσαλίδα είναι η άνωση (η οποία εκδηλώνεται τώρα αφού η πίεση του νερού γίνεται αισθητή στο κάτω μέρος της φυσαλίδας μέσω του λεπτού στρώματος υγρού στα πλάγια τοιχώματα) και η τριβή με τα τοιχώματα. Αποδεικνύεται ότι αν το υγρό έχει μεγάλο ιξώδες, ο χρόνος που μεσολαβεί από τη στιγμή της ανάπτυξης των δύο αυτών δυνάμεων μέχρι τη στιγμή που η φυσαλίδα αποκτά σταθερή (οριακή) ταχύτητα (οι δύο δυνάμεις γίνονται ίσες), είναι αμελητέος. Συνεπώς μπορούμε να δεχθούμε ότι η φυσαλίδα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση (Chen et al., 1999; Clanet et al., 2004).

Στο σχήμα 1, βλέπουμε το σχήμα που παίρνει και το μέγεθος μια φυσαλίδα σε διαφορετικές κλίσεις του σωλήνα. Στις μεγάλες κλίσεις (σχ. 1a), η φυσαλίδα έχει το μικρότερο μήκος της, καθώς καταλαμβάνει σε διατομή όλη τη διαθέσιμη διατομή του σωλήνα και η ροή του υγρού γίνεται από τα πλάγια με μεγάλη δυσκολία. Σε μεσαίες κλίσεις (σχ. 1b), παίρνει ένα “σφηνοειδές” σχήμα και παρατηρείται γρήγορη ροή του υγρού στο κάτω μέρος της. Σε μικρές κλίσεις (σχ. 1c), η φυσαλίδα είναι μακρόστενη και αφήνει αρκετό υγρό να ρέει από κάτω της (Hua et al., 2008; Hor et al., 2011).



Σχ. 2. Διαδοχικές θέσεις της φυσαλίδας.

Για να μελετήσουμε την κίνηση ενός σώματος, το μέγεθος που μας ενδιαφέρει περισσότερο είναι να γνωρίζουμε την ταχύτητά του.

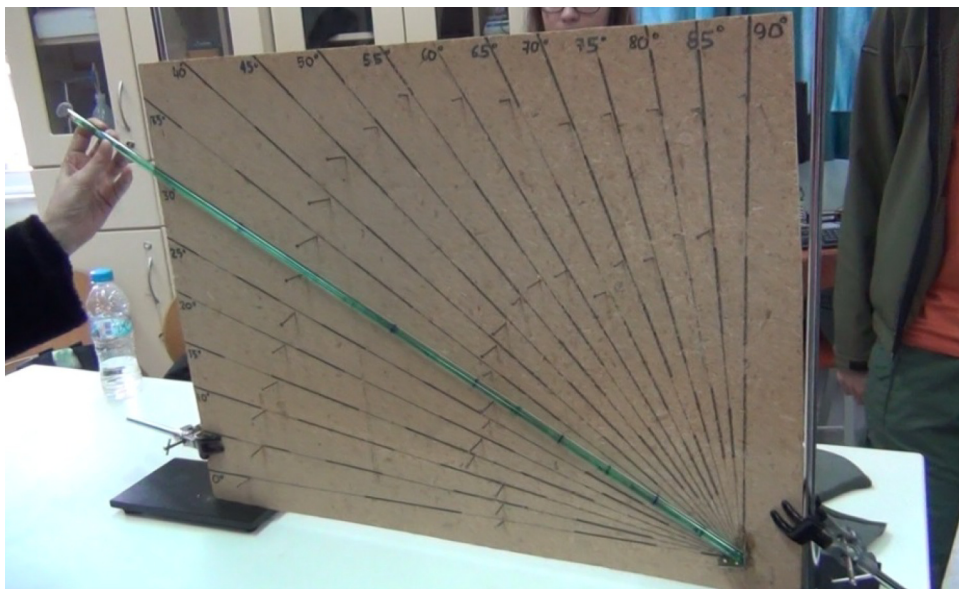
Η τιμή της μέσης ταχύτητας v της σώματος που κινείται σε ευθεία γραμμή, μπορεί να υπολογιστεί πειραματικά από το πηλίκο της μετατόπισης του Δx , προς το αντίστοιχο χρονικό διάστημα Δt , $v = \Delta x / \Delta t$. Όταν το χρονικό διάστημα Δt είναι πολύ μικρό, η μέση ταχύτητα ισούται με τη στιγμιαία. Στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση η μέση ταχύτητα έχει πάντοτε σταθερή τιμή. Ο λόγος οποιασδήποτε μετατόπισης του σώματος προς τον αντίστοιχο χρόνο είναι πάντοτε ο ίδιος. Συνεπώς, η στιγμιαία ταχύτητα του σώματος είναι και αυτή σταθερή και ίση με τη μέση ταχύτητα

Στην παρούσα εργασία καταγράφονται οι χρονικές στιγμές διέλευσης της φυσαλίδας από κάποια συγκεκριμένα σημεία του σωλήνα και ακολούθως σχεδιάζεται το διάγραμμα θέσης-χρόνου ($x-t$). Στη συνέχεια, υπολογίζεται η κλίση της ευθείας που δίνει

αριθμητικά την ταχύτητα κίνησης της φυσαλίδας. Το συγκεκριμένο πείραμα εκτελέστηκε με διαφορετικές κλίσεις του σωλήνα (Σχ. 2), ώστε να διερευνηθεί η επίδραση της γωνίας κλίσης στη τιμή της ταχύτητας της φυσαλίδας. Ακολούθως, υπολογίζεται η γωνία κλίσης του σωλήνα στην οποία αντιστοιχεί η μέγιστη ταχύτητα της φυσαλίδας. Η προηγούμενη διαδικασία επαναλήφθηκε χρησιμοποιώντας τώρα οινόπνευμα αντί για νερό, ώστε να ελεγχθεί η επίδραση του είδους του υγρού στην τιμή της μέγιστης ταχύτητας της φυσαλίδας. Τέλος, εξετάζεται η επίδραση που έχει στην ταχύτητα της φυσαλίδας το μέγεθος αυτής όπως επίσης και η διατομή του σωλήνα.

Περιγραφή δραστηριοτήτων

1. Πειραματική διαδικασία: Η πειραματική συσκευή που χρησιμοποιήθηκε είναι ένας γυάλινος βαθμολογημένος ανά 10cm σωλήνας, μέσα στον οποίο ρίχνουμε μια ποσότητα νερού, τόση ώστε να μείνει ένας μικρός κενός χώρος, ώστε να σχηματιστεί



Σχ. 3. Διαδοχικές κλίσεις του σωλήνα.

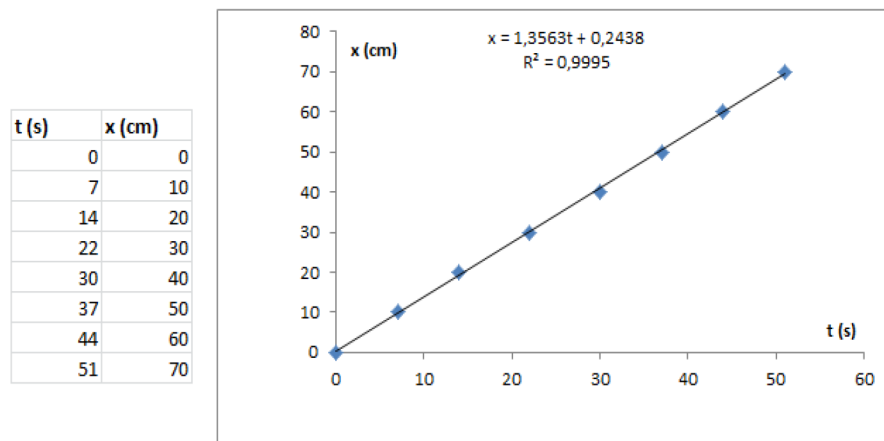
η φυσαλίδα. Ακολούθως, κλείνεται το ανοικτό μέρος του σωλήνα με λίγη πλαστελίνη (ή ακόμη καλύτερα με λίγη σιλικόνη). Στη συνέχεια, τοποθετούνται σε κατάλληλες θέσεις στηρίγματα ώστε ο σωλήνας να λαμβάνει τις κλίσεις που μας ενδιαφέρουν (Σχ. 3). Το 1^ο πείραμα εκτελείται σε γυάλινο σωλήνα διαμέτρου $D=0,525\text{cm}$, τοποθετημένο αρχικά σε γωνία κλίσης 5° . Το αρχικό μήκος της φυσαλίδας στο σωλήνα ρυθμίζεται στα 3cm. Με ηλεκτρονικό χρονόμετρο μετρήθηκαν οι χρονικές στιγμές διέλευσης της φυσαλίδας από κάθε σημάδι που βρίσκεται ανά 10cm. Με τη βοήθεια του λογισμικού Geogebra, κατασκευάστηκε αρχικά ένας πίνακας τιμών θέσης-χρόνου ($x-t$) και ακολούθως το διάγραμμα $x-t$. Από την κλίση της ευθείας που προκύπτει υπολογίστηκε η ταχύτητα της φυσαλίδας (σχήματα 4, 5).

Το πείραμα επαναλαμβάνεται αυξάνοντας κάθε φορά την γωνία κλίσης κατά 5° μέχρι της 90° .

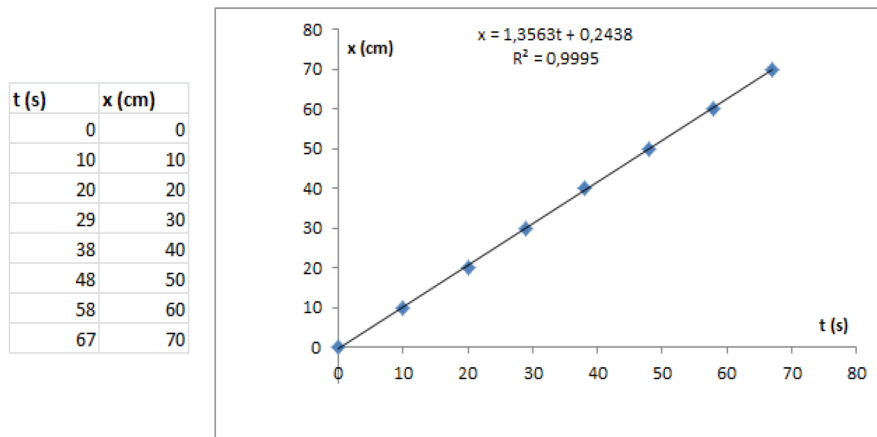
Στη συνέχεια εκτελείται το 2^ο πείραμα με νερό σε γυάλινο σωλήνα διαμέτρου $D=0,58\text{cm}$ τοποθετημένο σε γωνία κλίσης 45° , αλλά με μεταβαλλόμενο αρχικό μήκος φυσαλίδας. Υπολογίζοντας την ταχύτητα της φυσαλίδας που περιγράψαμε προηγουμένως, παίρνουμε το διάγραμμα ταχύτητας-μήκους φυσαλίδας (σχήμα 6). Παρατηρούμε ότι, κατά προσέγγιση, η ταχύτητα της φυσαλίδας παραμένει σταθερή ($2,5\text{cm/s}$) για αρχικά επιλεγμένα μήκη φυσαλίδας από $1-5,4\text{cm}$.

Στο 3^ο πείραμα επαναλαμβάνεται όλη η διαδικασία που προαναφέραμε στο 1^ο πείραμα με σωλήνα διαμέτρου $D=0,525\text{cm}$ και αρχικό μήκος φυσαλίδας στα 3cm , χρησιμοποιώντας ως υγρό το οινόπνευμα.

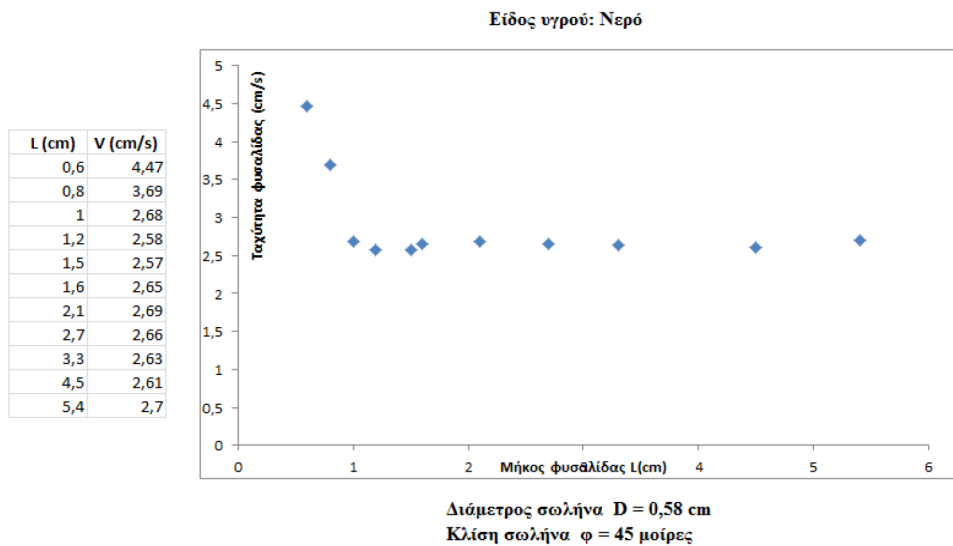
Στο 4^ο πείραμα, σε γυάλινο σωλήνα διαμέτρου $D=0,58\text{cm}$ τοποθετημένο σε γωνία κλίσης 20° , επαναλαμβάνεται η διαδικασία που προαναφέραμε στο 2^ο πείραμα, όπου χρησιμοποιούμε τώρα οινόπνευμα αντί για νερό. Τα αποτελέσματα του πειράματος φαίνονται στο σχήμα 7. Παρατηρούμε ότι κατά προσέγγιση, η ταχύτητα της φυσαλίδας παραμένει σταθερή ($1,4\text{cm/s}$), για αρχικά επιλεγμένα μήκη φυσαλίδας από $3-7,5\text{cm}$.



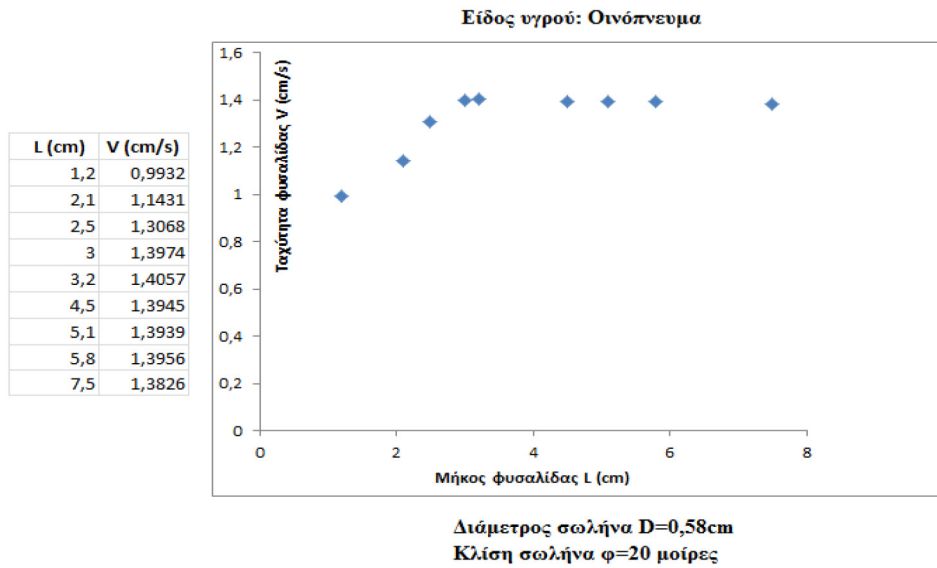
Σχ. 4. Διάγραμμα $x-t$ για γωνία κλίσης σωλήνα $\varphi=45^\circ$.



Σχ. 5. Διάγραμμα $x-t$ για γωνία κλίσης σωλήνα $\varphi=65^\circ$.

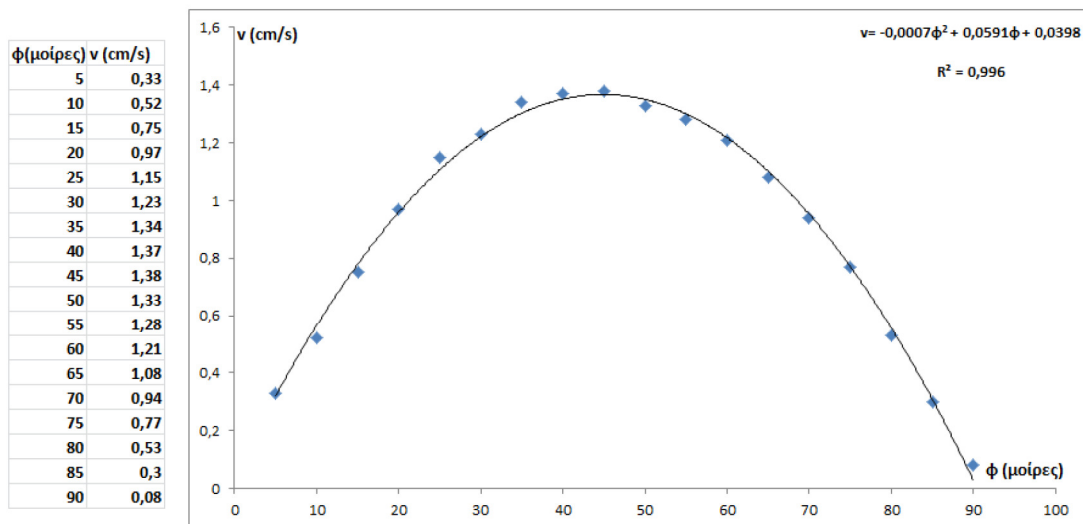


Σχ. 6. Διάγραμμα $v-L$ για το νερό.



Σχ. 7. Διάγραμμα v - L για το οινόπνευμα.

2. Μαθηματική επεξεργασία: Για την εύρεση της γωνίας φ για την οποία η φυσαλίδα αποκτά τη μέγιστη ταχύτητα, κατά την κίνησή της, προσπαθήσαμε, αρχικά, να βρούμε την καμπύλη που προσαρμόζεται καλύτερα στο διάγραμμα διασποράς των πειραματικών σημείων (φ, v) και στη συνέχεια να μελετήσουμε τα χαρακτηριστικά της. Η διάταξη των σημείων στο επίπεδο οδήγησε της μαθητές να υποθέσουν τη γραφική παράσταση μιας τετραγωνικής συνάρτησης ως την καμπύλη με την καλύτερη προσαρμογή, ενώ κάποιοι άλλοι υπέθεσαν πως και η ημιτονοειδής καμπύλη μπορεί να είναι της κατάλληλης. Σε μια αντίστοιχη με τη δική μας εργασία (Νέζης, 2014), βρέθηκε ότι η καταλληλότερη γραφική αναπαράσταση των σημείων (φ, v) είναι η καμπύλη δευτέρου βαθμού (παραβολή).



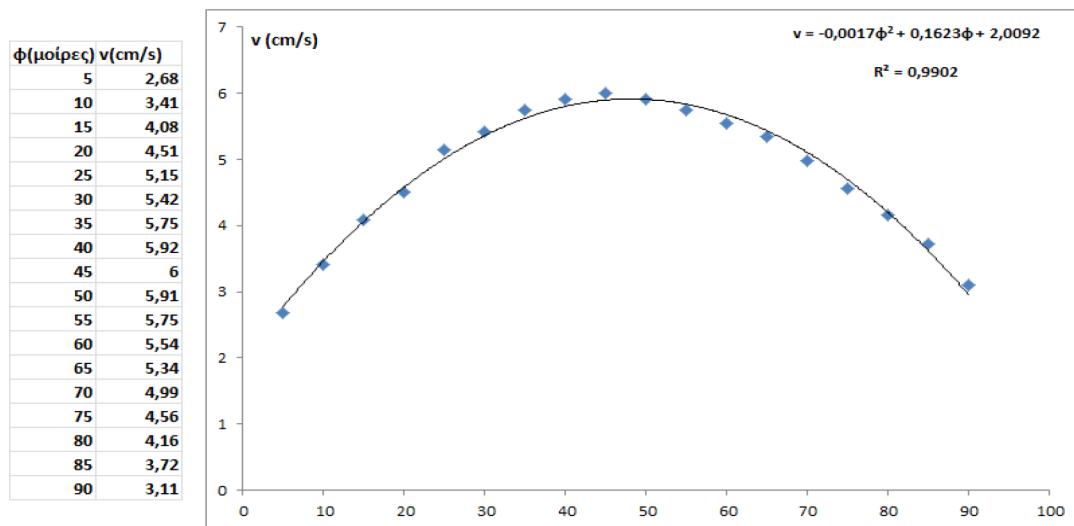
Σχ. 8. Διάγραμμα v - φ για το νερό.

Με τη βοήθεια του Excel, η προσαρμογή με τετραγωνική συνάρτηση στη λίστα των πειραματικών μας σημείων έδωσε τη συνάρτηση:

$$y = -0,0007\varphi^2 + 0,0591\varphi + 0,0398 \quad (1)$$

με συντελεστή προσδιορισμού $R^2=0,996$ (σχήμα 8). Η προσαρμογή σε πολυωνμική συνάρτηση μεγαλύτερου βαθμού έδωσε καλύτερο συντελεστή προσδιορισμού R^2 , όπως επίσης και η προσαρμογή με ημιτονοειδή καμπύλη (με λογισμικό Geogebra). Σ' αυτό το σημείο δόθηκε η εξήγηση στους μαθητές ότι κάθε συνάρτηση προσεγγίζεται μέσω πολυωνύμων. Για λόγους όμως ευκολίας ως προς την επεξεργασία των δύο γραμμών και εξαγωγής των συμπερασμάτων επελέγη η εξίσωση (1). Στη συνέχεια οι μαθητές με την κατάλληλη μαθηματική επεξεργασία κατέληξαν ότι για γωνία $\varphi=44,7^\circ$, η φουσαλίδα αποκτά τη μέγιστη ταχύτητά της, που είναι ίση με $v=1,4\text{cm/s}$.

Η προηγούμενη μαθηματική επεξεργασία επαναλήφθηκε και στην περίπτωση του οινόπνευματος. Με αυτό τον τρόπο δόθηκε η δυνατότητα στους μαθητές να παρατηρήσουν την αλλαγή στην τιμή της γωνίας ($\varphi=48^\circ$), για την οποία επιτυγχάνεται η μέγιστη τιμή της ταχύτητας v , γεγονός που αποδίδεται στο διαφορετικό ιξώδες των δύο υγρών (Σχ. 9).



Σχ. 9. Διάγραμμα v - φ για το οινόπνευμα.

Κατά συνέπεια, οι μαθητές ολοκλήρωσαν τη διαδικασία μελέτης της ταχύτητας κίνησης μιας φουσαλίδας αέρα μέσα σε σωλήνα και εξήγαγαν τα κατάλληλα συμπεράσματα όσον αφορά την επίδραση στην ταχύτητα της φουσαλίδας από την κλίση του σωλήνα, το μέγεθος αυτού, το μέγεθος της φουσαλίδας, όπως επίσης και το είδος του υγρού.

Αποτελέσματα-Συμπεράσματα

Τα προαιρετικά εκπαιδευτικά προγράμματα είναι καινοτόμες δράσεις που προσφέρουν μια διαφορετική προσέγγιση της γνώσης. Συνοδεύονται με νέες εναλλακτικές διδακτικές μεθόδους και φιλοσοφία και προάγουν το γενικό σκοπό της εκπαίδευσης. Ε-

πίσης, δεν υπαγορεύονται από το επίσημο αναλυτικό πρόγραμμα, αλλά έχουν ως αφετηρία τους την πρωτοβουλία και την ευαισθησία κάποιων εκπαιδευτικών που αγωνίζονται καθημερινά να αλλάζουν το σχολείο «από μέσα» (Μπαγάκης, 2000).

Ως εκπαιδευτικοί γνωρίζουμε ότι η ευθύγραμμη ομαλή κίνηση είναι σχετικά δύσκολο να μελετηθεί πειραματικά στο εργαστήριο. Ο σχεδιασμός και η εφαρμογή των δραστηριοτήτων που επιλέξαμε στο συγκεκριμένο εκπαιδευτικό πρόγραμμα οδήγησε στην ομαδική εργασία τους μαθητές. Με τα πειράματα που περιγράψαμε στη συγκεκριμένη εργασία, χρησιμοποιώντας εναλλακτικές μεθοδολογίες διδακτικής, προωθήσαμε τη συνεργατική και ενεργό μάθηση (τόσο οι καθηγητές όσο και οι μαθητές ήταν ενεργοί συμμετέχοντες στη μαθησιακή διαδικασία, όπου μέσα από το διάλογο στη προσπάθεια κατανόησης και χρήσης εννοιών και τεχνικών να προκύπτει η γνώση). Οι μαθητές απέκτησαν υπευθυνότητα, αυτόνομη δράση, ανοιχτό μυαλό, γνώσεις και κρίση. Έμαθαν μέσα από το δικό τους προβληματισμό να αντιμετωπίζουν προβλήματα με επιτυχία. Επιπλέον, με την παρότρυνση των μαθητών να ανατρέξουν στο διαδίκτυο σε βιβλιογραφία και δημοσιεύσεις σχετικές με το φαινόμενο που μελετούν ώστε να αντλήσουν επιπλέον πληροφορίες, απέδωσε τα αναμενόμενα. Στη συνέχεια των μαθημάτων της Φυσικής και των Μαθηματικών, διαπιστώσαμε ότι η διεπιστημονική ενεργή σύνδεση των δύο αυτών επιστημών στη συγκεκριμένη ομάδα μαθητών αξιοποιεί τη σφαιρικότητα της γνώσης, αλλά και την αναδεικνύει. Οι μαθητές κατανόησαν ότι για να πάρουν αποφάσεις ή να καταλήξουν σε συμπεράσματα θα χρειαστεί τα μέλη της ομάδας να επικοινωνήσουν, να μοιραστούν ιδέες, απόψεις, πληροφορίες, να μελετήσουν τα δεδομένα (Κουλαϊδής, 2001).

Από την εκτέλεση των παραπάνω πειραμάτων προέκυψαν από τους μαθητές τα εξής συμπεράσματα. Η συμπεριφορά όλων των φυσαλίδων ορισμένου μήκους είναι παρόμοια για το νερό και το οινόπνευμα. Η ταχύτητά τους αυξάνεται μέχρι μια ορισμένη κρίσιμη γωνία κλίσης του σωλήνα. Η μέγιστη τιμή της παρατηρείται να λαμβάνεται για γωνίες από $45^\circ - 90^\circ$, ενώ στη συνέχεια η ταχύτητα των φυσαλίδων μειώνεται με την αύξηση της γωνίας κλίσης του σωλήνα. Η μέγιστη τιμή της ταχύτητας διαφοροποιείται αισθητά για διαφορετικά υγρά, παρουσιάζοντας μεγαλύτερη τιμή στο οινόπνευμα σε σχέση με το νερό, λόγω του μεγαλύτερου ιξώδους που παρουσιάζει το δεύτερο υγρό. Η επίδραση της κλίσης του σωλήνα για την τελική ταχύτητα είναι πολύπλοκη λόγω της αλλαγής της γεωμετρίας της φυσαλίδας. Η ισορροπία της άνωσης και της τριβής αλλάζει με το σχήμα της φυσαλίδας. Η κίνηση της φυσαλίδας είναι γενικά ένα πολύπλοκο φαινόμενο και εξαρτάται από πολλούς παράγοντες, όπως η σχέση της διαμέτρου του σωλήνα με το μήκος της φυσαλίδας, του υλικού του σωλήνα με το είδος του υγρού, το ιξώδες την επιφανειακή τάση, το σχήμα της διατομής του σωλήνα και φυσικά την κλίση του σωλήνα.

Τέλος πρέπει να επισημανθεί ότι η συνεργατική μάθηση στο μάθημα των Φυσικών Επιστημών εξασφαλίζει αυθεντικές συνθήκες εξοικείωσης των μαθητών στην επιστημονική νοοτροπία, δημιουργεί το ιδανικό περιβάλλον για άσκηση των μαθητών στις επιστημονικές διαδικασίες και εξασφαλίζει με φυσικό και αβίαστο τρόπο την ενεργό

συμμετοχή και αυτενέργειά τους. Απλά καθημερινά φαινόμενα μπορούμε να τα αναγάγουμε σε σημαντικούς διδακτικούς στόχους μέσα από τους οποίους αναδεικνύεται και η άμεση σχέση Φυσικής, Μαθηματικών και καθημερινότητας.

Αναφορές

- Bozzano, G., Dente, M. (2001). *Shape and terminal velocity of single bubble motion: a novel approach*, Computer and Chemical Engineering 25, pp. 571-576.
- Chen, L., Garimella, S., Reizes, J., Leonardi, E., (1999). *The development of a bubble rising in a viscous liquid*, Journal of Fluid Mechanics, 387, 61-96.
- Clanet, C., Heraud, P., Searby, G. (2004). *On the motion of bubbles in vertical tubes of arbitrary cross-sections: some complements to the Dumitrescu-Taylor problem*, J. Fluid Mech., vol. 519, pp. 359-376.
- Hua, J., Stwene, J.F., Lin, P., (2008). *Numerical simulation of 3D bubbles rising in viscous liquids using a front tracking method*. Journal of Computational Physics, 227, 3358-3382. Dumitrescu, D. T. 1943 Stromung an einer Luftblase im senkrechten Rohr. Z. Angew. Math. Mech. 23, 139–149.
- Hor, N., Hua, J., Lawrence, C., Spelt, P. (2011). *Numerical simulation of large bubbles in channels using a front-tracking method*, 8th Inter. Conference on CFD in Oil & Gas, Metallurgical and Process Industries, SINTEF/NTNU, Trondheim Norway, 21-23 June 2011.
- Zukoski, E.E. (1966). *Influence of viscosity, surface tension, and inclination angle on motion of long bubbles in closed tubes*, J. Fluid Mech. vol. 25, part 4, pp. 821-837.
- ΕΚΦΕ Πειραιά – Νίκαιας (ekfe-nikaias.att.sch.gr).
- ΕΚΦΕ Πειραιά – Καλλιπόλης (ekfe-a-peiraia.att.sch.gr).
- Κουλαϊδής, Β. (2001). Διδακτική των Φυσικών Επιστημών: αντικείμενο και αναγκαιότητα, Στο Β. Κουλαϊδής (επιστ. ευθ.), Διδακτική των Φυσικών Επιστημών, (τόμος Α, σελ. 25-50), Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο, Πάτρα.
- Μπαγάκης, Γ. (2000). Προαιρετικά εκπαιδευτικά προγράμματα στη σχολική εκπαίδευση. Αθήνα: Μεταίχμιο.
- Νέζης, Α. (2014). Παίζοντας με τις φουσαλίδες: εμβάθυνση σε ένα “απλό” πείραμα μελέτης της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης. *Φυσικές Επιστήμες στην Εκπαίδευση*, Τεύχος 3, σελ. 59-66. Θεσσαλονίκη 2014.