Η απλή αρμονική ταλάντωση
Μελέτη τριγωνομετρικών συναρτήσεων με χρήση ΤΠΕ

Ευσταθίου Γ. Αγγελική, *Εκπ/κός Π.Ε.03, aefstath@sch.gr*
Σφαέλος Ε. Ιωάννης, *Εκπ/κός Π.Ε.04.01, ioasfaelos@sch.gr*

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία διατυπώνουμε μια διδακτική πρόταση για τη μελέτη της απλής αρμονικής ταλάντωσης (ΑΑΤ), στη Γ' Λυκείου, και των βασικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων στη Β' Λυκείου, με χρήση Τ.Π.Ε. Το σενάριο αυτό συνδυάζει: α) Διαδικασία μοντελοποίησης, β) Σύνδεση πολλαπλών αναπαραστάσεων, γ) Ανάλυση και ερμηνεία πειραματικών δεδομένων. Τα λογισμικά Interactive Physics, Tracker και GeoGebra δίνουν τη δυνατότητα στους μαθητές εκτός της προσομοίωσης να ασχοληθούν και με διαδικασίες κατασκευής - μοντελοποίησης για τη μελέτη της ΑΑΤ και των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Επιπλέον επιδιώκουμε εκτός της μαθηματικής και πειραματικής προσέγγισης του υπό μελέτη φαινομένου, να αναπτυχθεί και ένα πνεύμα ομαδικής εργασίας και συνεργατικότητας ανάμεσα στους μαθητές.

Λέξεις - Κλειδιά: Τ.Π.Ε., Interactive Physics, Tracker, GeoGebra, μοντελοποίηση.

Εισαγωγή

Μια διδακτικά ενδιαφέρουσα προσέγγιση των Φυσικών Επιστημών είναι αυτή της διεπιστημονικής προσέγγισης, η οποία αξιοποιεί τη σφαιρικότητα της γνώσης, αλλά και την αναδεικνύει (Κόκκοτας, 2002). Μια εξίσου ενδιαφέρουσα διδακτική προσέγγιση για τη φύση και τη θέση των Μαθηματικών είναι αυτή που τα προσδιορίζει ως μια δραστηριότητα, που έχει στόχο να ερμηνεύσει τα γεγονότα γύρω μας. Η αποτελεσματικότητα των Μαθηματικών προκύπτει από ένα συνδυασμό μαθηματικής γνώσης και σύνδεσης με προβλήματα του φυσικού κόσμου (Κεΐσογλου, 2006).

Ο Freudenthal επισημαίνει ότι "τα Μαθηματικά αντικείμενα είναι νοούμενα και οι μαθηματικές έννοιες, οι δομές και οι ιδέες μας βοηθούν να οργανώσουμε τα φαινόμενα του γύρω μας κόσμου."

Εδώ και πολλά χρόνια γίνεται προσπάθεια ενεργητικής σύνδεσης των Μαθηματικών με τη Φυσική, αλλά πολύ λίγα έχουν γίνει προς την κατεύθυνση αυτή.

Η παρούσα εργασία αφορά τη διατύπωση μιας διδακτικής πρότασης για τη μελέτη της ΑΑΤ στη Γ’ Λυκείου και των ιδιοτήτων των βασικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων στη Β' Λυκείου, με χρήση Τ.Π.Ε. Στοχεύουμε να αναδείξουμε ότι η μαθηματικοποίηση του προβλήματος της απλής αρμονικής ταλάντωσης μπορεί να βοηθήσει στην προσπάθεια των μαθητών για καλύτερη κατανόηση και εφαρμογή των ιδιοτήτων των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και γενικότερα να συνειδητοποιήσουν ότι τα μαθηματικά δεν είναι ξεκομμένα από τα φαινόμενα που συμβαίνουν γύρω τους. Επιπλέον θα αναδείξουμε τα μαθηματικά ως μια γλώσσα που πρέπει κάποιος να τη μιλά τόσο καλά ώστε να καταλαβαίνει και να περιγράφει το εκάστοτε φαινόμενο (Θεοχάρης, 2012). Έτσι η περιγραφή του φαινομένου της απλής αρμονικής ταλάντωσης προϋποθέτει την κατανόηση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Μεθοδολογία εφαρμογής της πρότασης

Η παρούσα διδακτική πρόταση θα υλοποιηθεί με τη βοήθεια των Τ.Π.Ε. για τους εξής λόγους:

α) Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας καθώς και οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις και εξισώσεις διδάσκονται στην τάξη με τα διαθέσιμα στατικά μέσα της εικόνας του σχολικού βιβλίου και του πίνακα. Μια δυναμική αναπαράσταση των εννοιών αυτών μας παρέχεται από το λογισμικό Geogebra. Επιχειρείται μια εξοικείωση με το περιβάλλον του GeoGebra δίνοντας τη δυνατότητα κατασκευής δυναμικών αναπαραστάσεων και διερεύνησης και άλλων μαθηματικών εννοιών σε εκπαιδευτικούς και μαθητές (Hohenwarter et al., 2007).

β) Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για ενεργή και προσανατολισμένη σε προβλήματα διδασκαλία, ενισχύοντας το μαθηματικό πειραματισμό και τη διερεύνηση τόσο στην τάξη όσο και στο σπίτι.

γ) Το λογισμικό Interactive Physics, είναι ένα ανοιχτό περιβάλλον μάθησης και δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να μελετήσουν την εξέλιξη του φαινομένου συγχρόνως με την εξέλιξη της γραφικής του παράστασης, καθώς και τη σύγκριση δύο γραφικών παραστάσεων.

δ) Το Tracker είναι ένα ελεύθερο λογισμικό ανάλυσης βίντεο με δυνατότητες ιχνηλασίας αντικειμένων και επεξεργασία δεδομένων για τη γραφική απεικόνιση της θέσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης των αντικειμένων. Αποτελεί ένα επιπλέον εργαλείο του καθηγητή για να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν τις φυσικές έννοιες και νόμους. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε συνδυασμό με άλλα εργαλεία για την πιο αποτελεσματική διδασκαλία ενός θέματος (Τσαλακός, 2010).

ε) Εντάσσοντας τις ΤΠΕ στη μαθησιακή διαδικασία και ειδικότερα μέσω της μοντελοποίησης που προσφέρει λογισμικά Interactive Physics, Tracker και Geogebra, κάτι που προϋποθέτει μια ενεργητική συμμετοχή από τους μαθητές, είναι δυνατόν οι τελευταίοι να αποκτήσουν θετικότερη στάση απέναντι στη Φυσική και τα Μαθηματικά (Hestenes, 1996).

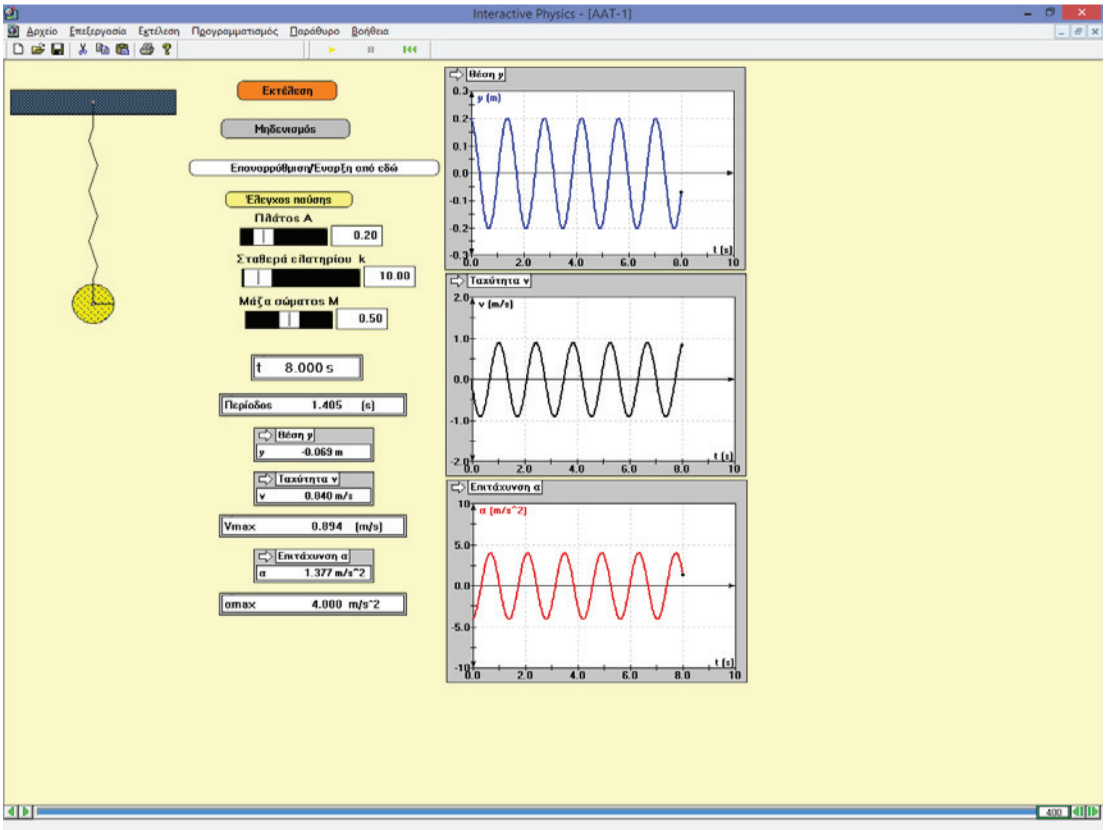
στ) Οι ΤΠΕ επιτρέπουν στους μαθητές να αναπτύξουν νέες δεξιότητες και σε συνδυασμό με την παράλληλη χρήση του πραγματικού εργαστηρίου η μάθηση είναι δυνατόν να συντελεσθεί με αποδοτικότερο τρόπο (Doerr, 1997; Dimitriadis et al., 2000; Κυνηγός, 2002).

Η απλή αρμονική ταλάντωση

Η διδακτική διαδικασία πραγματοποιήθηκε στα εργαστήρια (Η/Υ) και Φυσικών Επιστημών (Φ.Ε.). Η διάρκεια της ήταν τρεις διδακτικές ώρες. Στην 1η διδακτική ώρα που πραγματοποιήθηκε στο εργαστήριο Η/Υ, οι μαθητές ήταν διαχωρισμένοι σε ομάδες των δύο ατόμων με έναν υπολογιστή, ενώ η 2η διδακτική ώρα πραγματοποιήθηκε στο εργαστήριο Φ.Ε. στο τέλος της οποίας αφιερώθηκε λίγος χρόνος για συζήτηση των αποτελεσμάτων (Σπυροπούλου-Κατσάνη, 2000). Στην 3η διδακτική ώρα δόθηκαν στους μαθητές φύλλα εργασίας, καθώς και φύλλα αξιολόγησης της διδασκαλίας (Ορφανός κ.α., 2004).

1η διδακτική ώρα

Ο διδάσκων περιγράφει αρχικά τις έννοιες περιοδικό φαινόμενο, περίοδος, συχνότητα, ταλάντωση, απλή αρμονική ταλάντωση, απομάκρυνση, πλάτος.



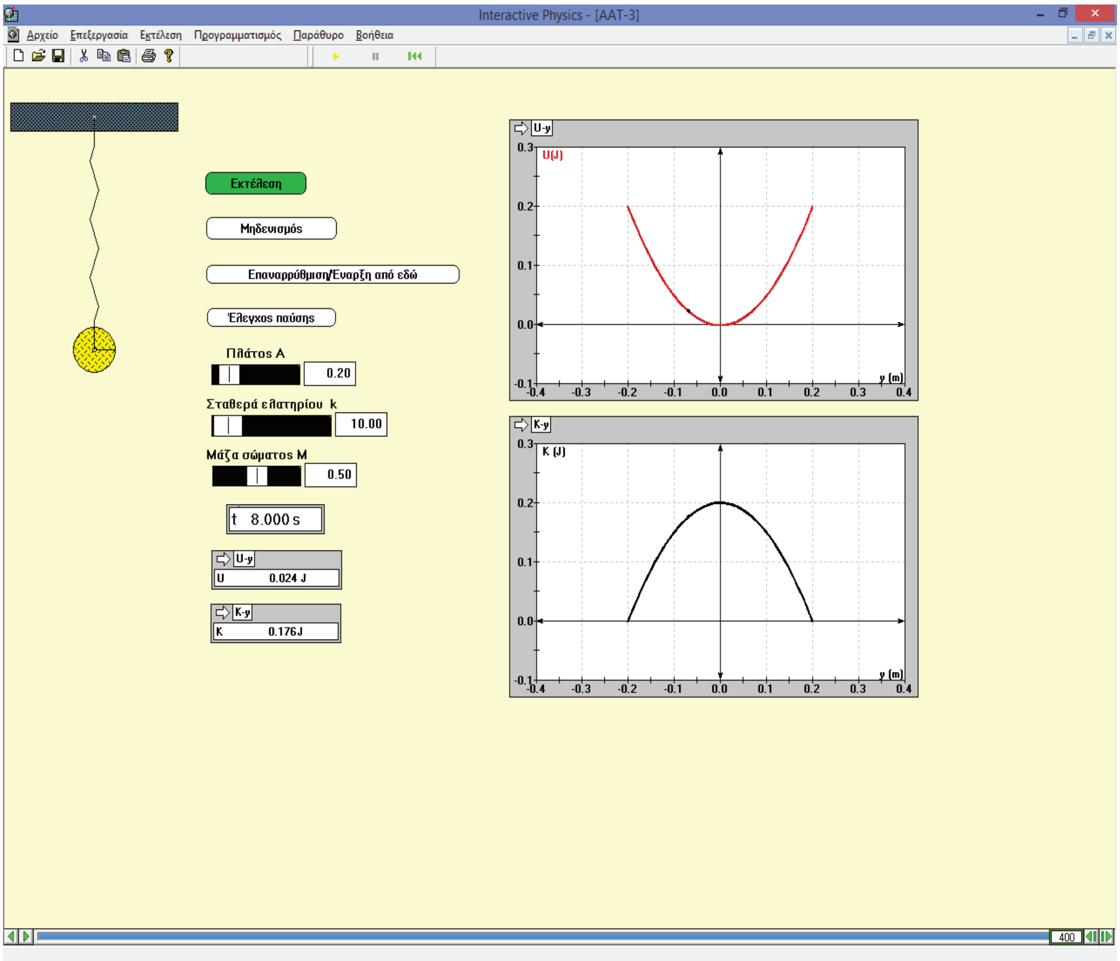
Σχήμα 1. Προσομοίωση ΑΑΤ. Διαγράμματα y-t, v-t, α-t.

Οι μαθητές θα μπορέσουν παρακολουθώντας τις προσομοιώσεις με τη βοήθεια του λογισμικού Interactive Physics (IP), να εμπεδώσουν το φαινόμενο της ΑΑΤ που εκτελεί ένα σώμα που είναι δεμένο σε κατακόρυφο ελατήριο, ενώ ταυτόχρονα βλέπουν και την εξέλιξη των γραφικών παραστάσεων.

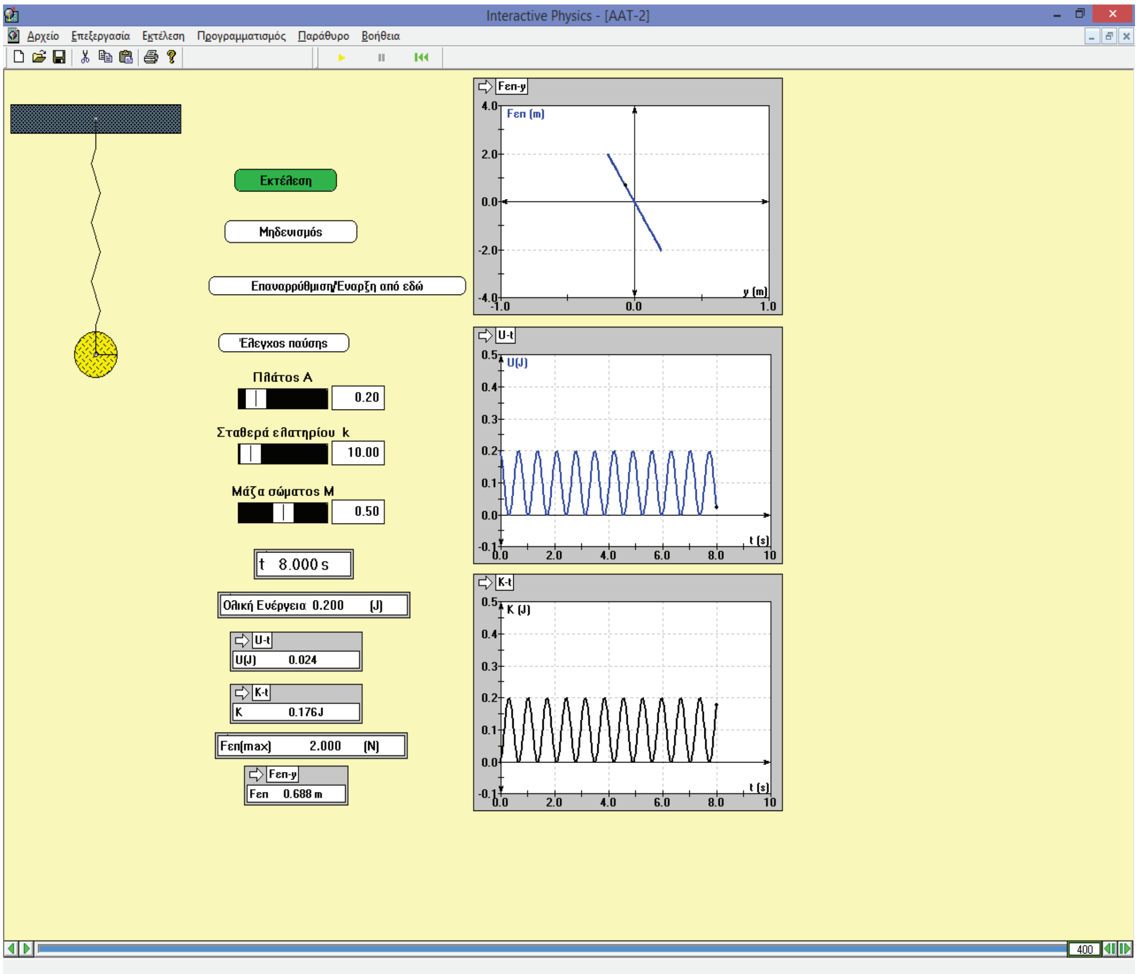
Προτρέπουμε τους μαθητές να ανοίξουν το αρχείο "**ΑΑΤ-1.ip**". Σ' αυτή την προσομοίωση (Σχήμα 1), δημιουργούνται οι γραφικές παραστάσεις απομάκρυνσης-χρόνου (y-t), ταχύτητας-χρόνου v-t) και επιτάχυνσης-χρόνου (α-t). Με τους μετρητές παίρνουμε τις τιμές για το πλάτος A = 0.2m, τη σταθερά του ελατηρίου k = 10N/m, τη μάζα του σώματος m = 0.5Kg, την περίοδο T = 1.405s, τη μέγιστη ταχύτητα V_{max} = 0.894m/s και τη μέγιστη επιτάχυνση α_{max} = 4m/s^2. Ακολούθως, οι μαθητές καλούνται να γράψουν τις εξισώσεις της κίνησης, στις οποίες καταλήγουν αφού υπολογίσουν τη γωνιακή συχνότητα ω = 2π/Τ = 4.47r/s και την αρχική φάση φ_o = π/2, οπότε:

y = 0.2ημ(4.47t+π/2) = 0.2συν4.47t (S.I.), v = 0.894συν(4.47t+π/2) = - 0.894ημ4.47t (S.I.), α = - 4ημ(4.47t+π/2) = - συν4.47t (S.I.).

Ανοίγοντας το αρχείο “**AAT-2.ip**” (Σχήμα 2(α)), ο διδάσκων δίνει την κινηματική, τη δυναμική και την ενεργειακή προσέγγιση της ΑΑΤ. Ταυτόχρονα στην προσομοίωση που παρακολουθούν φαίνονται και τα διαγράμματα κινητικής ενέργειας-χρόνου (K-t), δυναμικής ενέργειας-χρόνου (U-t) και δύναμης επαναφοράς-απομάκρυνσης (Fεπ-y). Η ταυτόχρονη παρακολούθηση της εξέλιξης του φαινομένου με την εξέλιξη των γραφικών παραστάσεων των ενεργειών, δίνει τη δυνατότητα στον μαθητή να αντιληφθεί τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας. Με βάση την τιμή της ολικής ενέργειας που διαβάζουν $E_{ολ}$ = 0.2J, γράφουν τις εξισώσεις για την κινητική και τη δυναμική ενέργεια αντίστοιχα: K = 0.2ημ^{2}4.47t (S.I.), U = 0.2συν^{2}4.47t (S.I.)



2 (α)



2 (β)

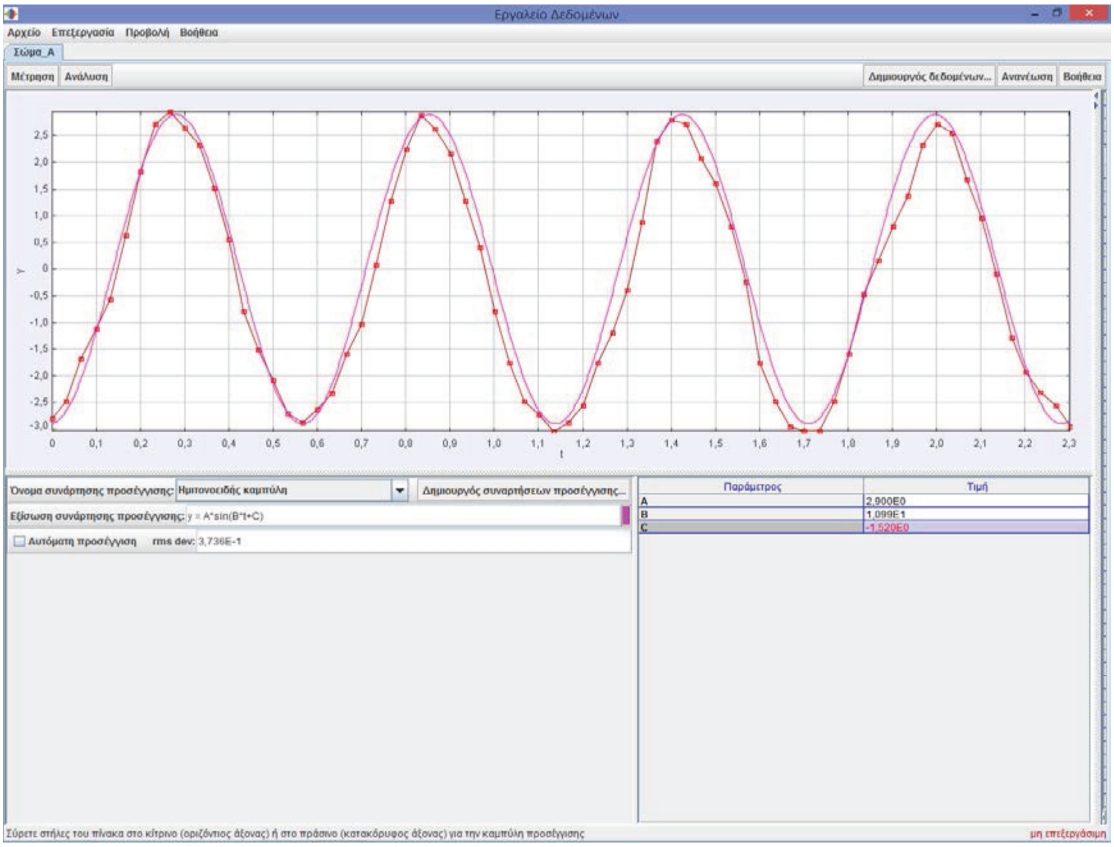
Σχήματα 2^{α} και 2β. Προσομοίωση ΑΑΤ. Διαγράμματα U-t, K-t, Fεπ-t, U-y, K-y.

Με το άνοιγμα του αρχείου "**AAT-3.ip**" (Σχήμα 2(β)), οι μαθητές γράφουν τις εξισώσεις κινητικής ενέργειας - απομάκρυνσης $K = 0.2\text{-}5y^2$ (S.I.) και δυναμικής ενέργειας - απομάκρυνσης $U = 5y^2$ (S.I.).

2η διδακτική ώρα

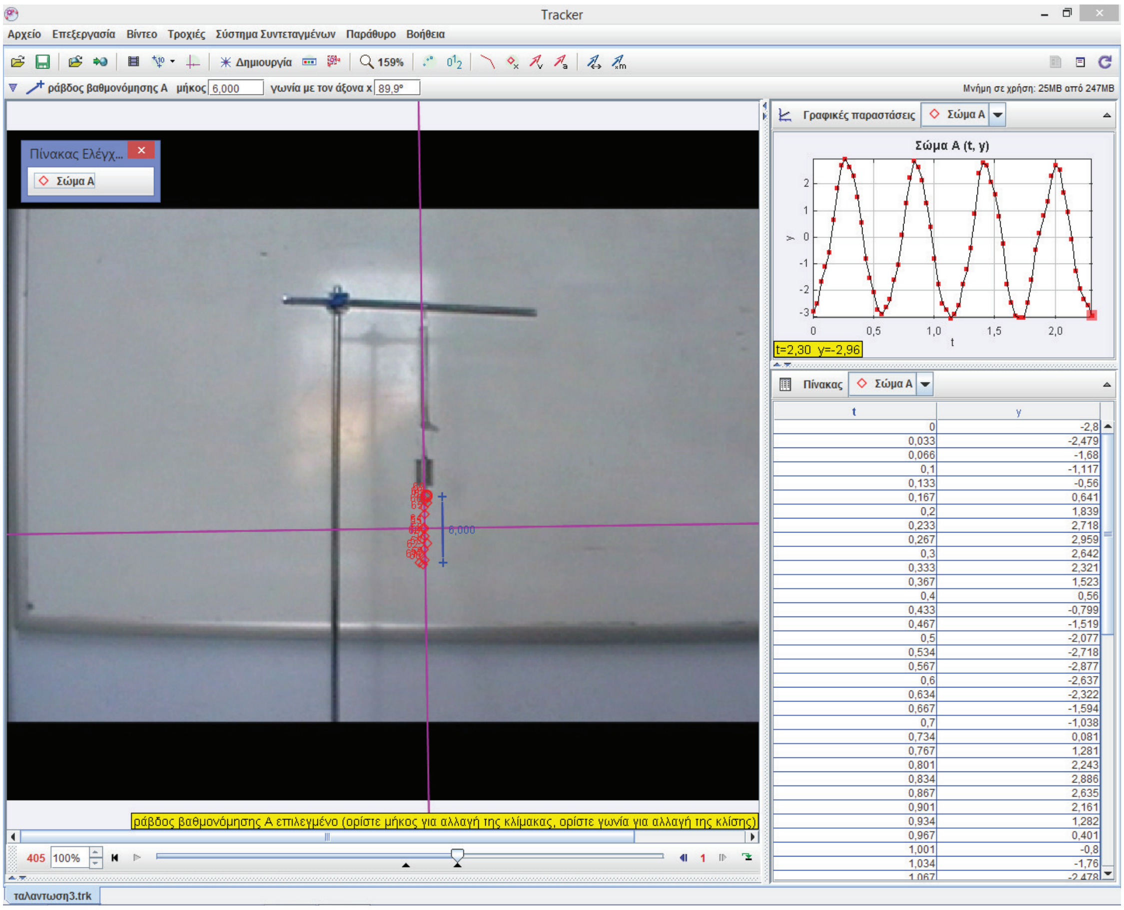
Στο εργαστήριο Φ.Ε. σε κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς k = 50N/m, με φυσικό μήκος L_o = 10cm, αναρτάμε ένα σώμα μάζας m = 0.4Kg. Αφήνουμε το σώμα να ισορροπήσει σε επιμήκυνση από το φυσικό μήκος ΔL = mg/k = 0.08m, που προκύπτει από τη συνθήκη ισορροπίας. Απομακρύνουμε αρχικά το σώμα από τη θέση ισορροπίας του προς τα κάτω και το αφήνουμε ελεύθερο να εκτελέσει ΑΑΤ. Βιντεοσκοπούμε με κάμερα ή με κινητό την κίνηση του σώματος για 2.5s.

Ακολούθως φορτώνουμε το βίντεο στο λογισμικό Tracker και αρχίζουμε την επεξεργασία του. Στο σχήμα 3(α), βλέπουμε το αποτέλεσμα της διαδικασίας. Μπορούμε να παρακολουθήσουμε την κίνηση του σώματος στο βίντεο, να δούμε τον πινάκα τιμών και τη γραφική παράσταση y-t. Στη συνέχεια, επιλέγουμε την κατάλληλη καμπύλη προσέγγισης, που είναι μια ημιτονοειδής της μορφής y = Asin(Bt+C) (Σχήμα 3(β)). Δεξιά φαίνονται οι σταθερές αυτής καμπύλης όπου A = 2.9, B = 11 και C = -1.52.



3 (α)

ISBN: 978-960-99435-8-1 "Η εκπαίδευση στην εποχή των Τ.Π.Ε." Τα Πρακτικά του Συνεδρίου. Αθήνα, 7 & 8 Νοεμβρίου 2015



3 (β)

Σχήματα 3α και 3β. Επεξεργασία βίντεο με το Tracker.

Η τιμή της Α, αντιστοιχεί στο πλάτος της ταλάντωσης Α = 2.9cm, της Β στην γωνιακή συχνότητα ω=11rad/s και της C στην αρχική φάση φ_o = -1.52 = -π/2 = 3π/2rad. Η περίοδος της κίνησης θα είναι Τ = 2π/ω = 0.57s.

Η θεωρητική τιμή της προκύπτει από τη σχέση $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0.56s$. Το πειραματικό σφάλμα που προκύπτει είναι σ = 1.8%.

Η εξίσωση κίνησης θα δίνεται από τη σχέση:

$$y = 2.9\eta\mu(11t+3\pi/2) = -2.9\sigma\upsilon\nu 11t \quad (y\rightarrow cm,\ t\rightarrow s)$$

3η διδακτική ώρα

Προτρέπουμε τους μαθητές να ανοίξουν το αρχείο «**Φ.Ε. ΑΑΤ**» και να το συμπληρώσουν. Έτσι, ο διδάσκων θα έχει τη δυνατότητα να δραστηριοποιήσει τους περισσότερους μαθητές στο μέγιστο βαθμό κεντρίζοντας το ενδιαφέρον τους και να ελέγξει ταυτόχρονα αν η όλη διαδικασία απέδωσε τα αναμενόμενα αποτελέσματα. Θα ακολουθήσει συζήτηση των απαντήσεων μέσα στην τάξη. Ως εργασία για το σπίτι αναθέτουμε στους μαθητές τις ερωτήσεις ανοικτού και κλειστού τύπου της αντίστοιχης ενότητας του σχολικού εγχειριδίου.

Οι βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Το σενάριο με τίτλο «**Τριγωνομετρικές συναρτήσεις**» είναι διάρκειας 4 διδακτικών ωρών και απευθύνεται σε μαθητές Β΄ Λυκείου. Οι μαθητές μέσω της γεωμετρικής εποπτείας που έχουν από τις γραφικές παραστάσεις x-t και v-t ενός σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση (ΑΑΤ) με αρχική φάση $\varphi_o=0$, θα εμπλακούν στην κατασκευή, μελέτη και διατύπωση των ιδιοτήτων των τριγωνομετρικών συναρτήσεων ($f(x) = \rho\eta\mu(\omega t)$, $f(x) = \rho\sigma\upsilon\nu(\omega t)$), ενώ παράλληλα θα συνδέσουν ένα φυσικό φαινόμενο με τις μαθηματικές έννοιες που εμπλέκονται σε αυτό. Η διεξαγωγή του σεναρίου θα πραγματοποιηθεί στο εργαστήριο Η/Υ του σχολείου και το προβλεπόμενο διδακτικό μοντέλο είναι αυτό της διερευνητικής συνεργατικής μάθησης. Οι μαθητές είναι χωρισμένοι σε ομάδες των δύο ατόμων προκειμένου να ασχοληθούν με τις δραστηριότητες του φύλλου εργασίας που θα τους μοιραστεί. Ο διδάσκων εξειδικεύει τις παρεμβάσεις του ανάλογα με τις ανάγκες που προκύπτουν κατά την εκτέλεση των δραστηριοτήτων.

Σύντομη ανάλυση της αναμενόμενης διδακτικής πορείας

1η διδακτική ώρα

Αρχικά προτρέπουμε τους μαθητές να ανοίξουν το αρχείο «**Απλή αρμονική ταλάντωση.ip**» και να περιγράψουν το φαινόμενο που εξελίσσεται στην οθόνη του υπολογιστή τους. Οι μαθητές εύκολα θα διαπιστώσουν το φαινόμενο της απλής αρμονικής ταλάντωσης ενός σώματος με αρχική φάση $\varphi_o=0$, ενώ συγχρόνως καλούνται να συμπληρώσουν έναν πίνακα με την ταχύτητα και απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του σε χρονικές στιγμές που έχει επιλέξει προηγουμένως ο διδάσκων.

Στη συνέχεια ζητάμε από τους μαθητές να μελετήσουν την ύπαρξη στιγμών που καθένα από τα μεγέθη ταχύτητα και απομάκρυνση έχουν την ίδια τιμή, αντίθετη, μέγιστη και ελάχιστη τιμή καθώς και τον τρόπο που μεταβάλλονται οι ενδιάμεσες μετρήσεις κατά την εξέλιξη του φαινομένου επαναφέροντας έτσι στη μνήμη τους μαθηματικές έννοιες όπως: άρτια-περιττή συνάρτηση, περιοδικότητα, γνησίως μονότονη συνάρτηση, μέγιστη και ελάχιστη τιμή συνάρτησης. Επιπλέον, γίνεται ανάκληση στη μνήμη, με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου, των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας ω.

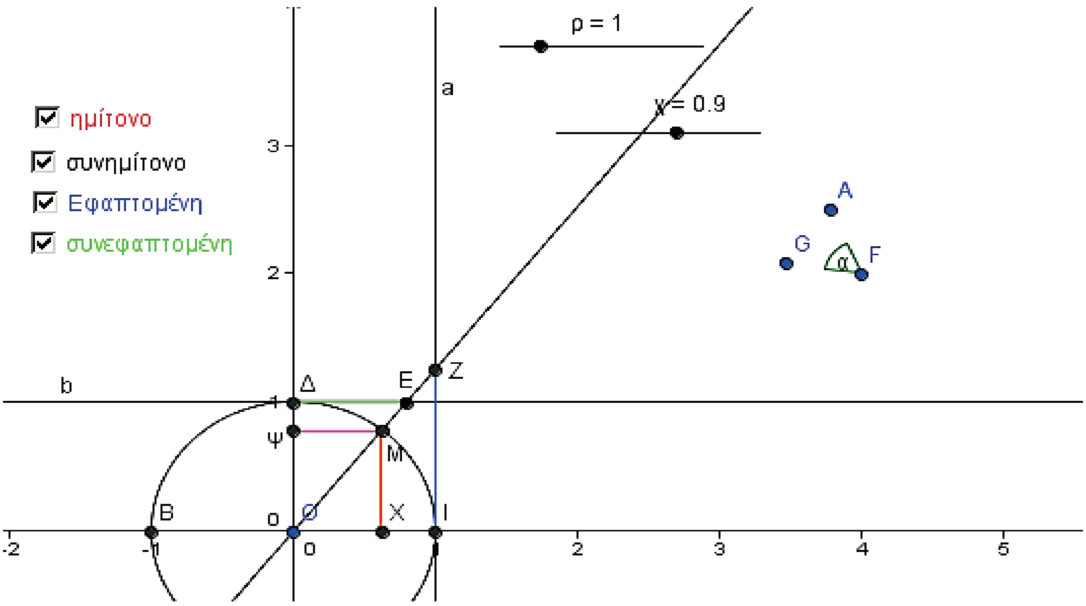
2η και 3η διδακτική ώρα

Τη δεύτερη διδακτική ώρα θα διευκολύνουμε τη μετάβαση των μαθητών, από την έννοια του τριγωνομετρικού αριθμού στην έννοια της τριγωνομετρικής συνάρτησης πραγματικής μεταβλητής, εμπλέκοντάς τους σε δραστηριότητες κατασκευής στο περιβάλλον του Geogebra. Συγκεκριμένα, θα μάθουν να κατασκευάζουν σημείο Μ σε κύκλο (Ο,ρ) καθώς μεταβάλλονται οι τιμές ενός δρομέα "χ". Τα τμήματα ΜΨ, ΜΧ, ΔΕ, ΖΙ που παριστάνουν γεωμετρικά το ημίτονο, συνημίτονο, εφαπτομένη και συνεφαπτομένη της γωνίας ω μεταβάλλονται σύροντας κατά μήκος του άξονα x' x το σημείο Κ(χ,0) (Σχήμα 6).

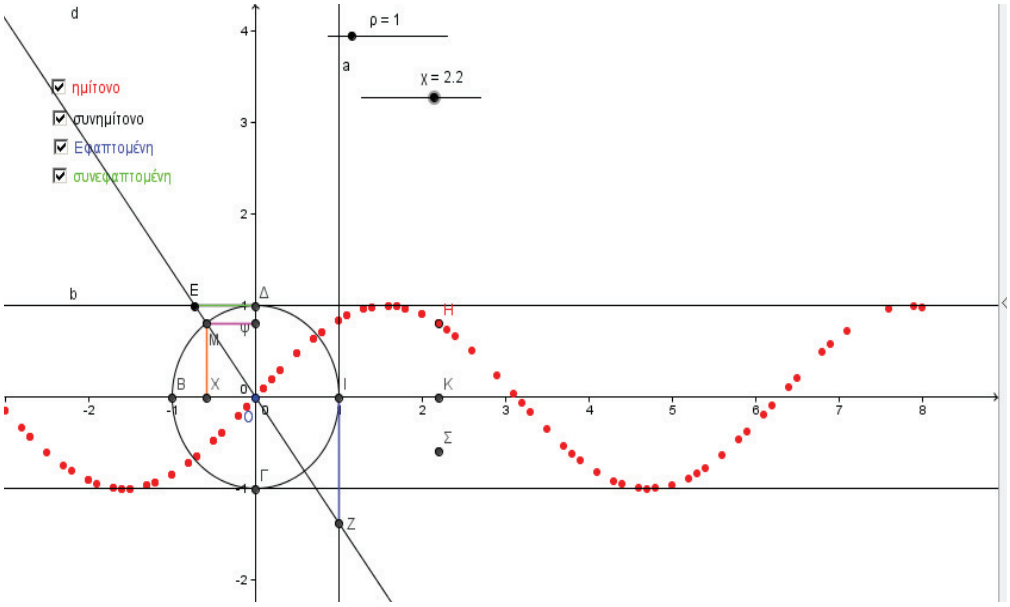
Στη συνέχεια βοηθάμε τους μαθητές να παραστήσουν το γεωμετρικό τόπο των σημείων Η(χ, χ(Μ)), Σ(χ, x(M)), ΕΦ(χ, x(Z)), ΣΦ(χ, x(E)) οπότε θα έχουν τη δυνατότητα να παρατηρήσουν τη μορφή των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων y=ρημ(ωx), y=ρσυν(ωx), y=ρεφ(ωx) και y=ρσφ(ωx). Ενδεικτικά μπορούμε να δούμε τη γραφική παράσταση της y=ρημ(ωx) (Σχήμα 7).

Στο φύλλο εργασίας οι μαθητές καλούνται να πειραματιστούν, μετακινώντας τους δρομείς, με τις τιμές των ρ και ω προκειμένου να διαπιστώσουν το ρόλο τους στη μορφή των παραπάνω γραφικών παραστάσεων και να επανανακαλύψουν βασικές ιδιότητές τους, όπως μέγιστα, ελάχιστα και περιοδικότητα.

Ακολουθεί διατύπωση και παρουσίαση των αποτελεσμάτων.



Σχήμα 6. Κατασκευή σημείου Μ



Σχήμα 7. Η συνάρτηση y=ρημ(ωx)

4η διδακτική ώρα

Προτρέπουμε τους μαθητές να ανοίξουν το αρχείο «**Φ.Ε. Τριγ.συν.**» και ατομικά να το συμπληρώσουν. Έτσι, ο διδάσκων θα έχει τη δυνατότητα να ελέγξει αν η όλη διαδικασία απέδωσε τα αναμενόμενα αποτελέσματα. Θα ακολουθήσει συζήτηση των απαντήσεων μέσα στην τάξη. Ως εργασία για το σπίτι αναθέτουμε στους μαθητές τις ερωτήσεις ανοικτού και κλειστού τύπου της αντίστοιχης ενότητας του σχολικού εγχειριδίου.

Συμπεράσματα

Η προτεινόμενη διδακτική πρόταση έδειξε ότι οι μαθητές ανέπτυξαν την ικανότητα τους να ερμηνεύουν και να κάνουν προβλέψεις με χρήση γραφικών παραστάσεων. Επιπλέον, βοήθησε τους μαθητές να κατανοήσουν, να συνδέσουν και να θυμηθούν έννοιες της ΑΑΤ και των τριγωνομετρικών συναρτήσεων αναδεικνύοντας για ακόμα μια φορά τη σημαντικότητα της διδασκαλίας εννοιών μέσω γραφημάτων, προσομοιώσεων και πειραματικών διαδικασιών. Ειδικότερα, με την επιτυχή εκτέλεση του προβλήματος, του "Φύλλο εργασίας", οι μαθητές κατάφεραν να μετατρέψουν ένα πραγματικό πρόβλημα σε μαθηματικό και να εφαρμόσουν σε αυτό όσα διδάχθηκαν για τη συμπεριφορά των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Ιδιαίτερα ικανοποιητική ήταν η συμμετοχή και το ενδιαφέρον από τους μαθητές που δεν είχαν ιδιαίτερα υψηλές επιδόσεις στο μάθημα της Φυσικής και των Μαθηματικών.

Γενικότερα η μαθηματικοποίηση των προβλημάτων της Φυσικής μπορεί να βοηθήσει στην προσπάθεια των μαθητών για καλύτερη κατανόηση μαθηματικών θεμάτων. Το σύνολο των προβλημάτων αυτών μπορεί να χρησιμοποιηθεί κατά τη διδασκαλία των

Μαθηματικών και Φυσικών επιστημών διαμέσου της οποίας θα γίνεται, όσο είναι δυνατό, φανερή η διάσταση της συσχέτισης Μαθηματικών και Φυσικής.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Dimitriadis, P., Papatsimpa L, Imvroti D., Skalohoritis M., Kalkanis G., A constructivist approach of teaching interactions at primary school based on experiment, modeling and simulations, International Conference on Physics education, Physics Beyond 2000, Barcelona, August 27 - September 1, 2000, Proceedings.

Doerr H., (1997). Experiment, simulation and analysis: an integrated instructional approach to the concept of force. Int. Journal of science Education 19, 3, 265 . 282.

David Hestenes, (1996). Modeling methodology for physics teachers, Department of Physics and Astronomy, Arizona State University.

Θεοχάρης Δ., (2012). "Η σχέση αλληλεπίδρασης μεταξύ της φυσικής και των μαθηματικών στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση", Διπλωματική εργασία, Τμήμα Μαθηματικών, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Interactive Physics Version 5.0, User's Manual (1999), A-5

Κεϊσογλου Στ., (2006). Θέματα Διδακτικής των Μαθηματικών. Εκδόσεις: Πανεπιστημιακά Φροντιστήρια Δ. Μπόνια

Κόκκοτας, Π. (2002). Διδακτική των Φυσικών Επιστημών ΙΙ. Σύγχρονες προσεγγίσεις στη διδασκαλία των Φυσικών Επιστημών, 3η έκδοση βελτιωμένη, εκδ. Γρηγόρη, Αθήνα.

Κουλαϊδής Β., Ράπτης Ν. Ο υπολογιστής ως εργαλείο μάθησης: Η περίπτωση διδασκαλίας των Φυσικών Επιστημών. Νέα Παιδεία, τχ.61(1992) σσ.141-53.

Κυνηγός Χ., Δημαράκη Ε. (2002). Νοητικά εργαλεία και πληροφοριακά μέσα. Παιδαγωγική αξιοποίηση της Σύγχρονης Τεχνολογίας για τη Μετεξέλιξη της Εκπαιδευτικής Πρακτικής.

Markus Hohenwarter και Judith Preiner, (2007). Βοήθεια GeoGebra, Εγχειρίδιο χρήσης 3.0.

Μπαρκάτσας Αν. (2004). Τα Μαθηματικά στην εποχή των τεχνολογιών της πληροφορίας και της επικοινωνίας.

Ορφανός, Σ. & Δημητρακοπούλου, Α. (2004). Σχεδιασμός Φύλλων Δραστηριοτήτων Μαθητών για Διερευνητικά Τεχνολογικά Περιβάλλοντα στις Φυσικές Επιστήμες: Η περίπτωση σχεδιασμού Δραστηριοτήτων Μοντελοποίησης.

Σπυροπούλου-Κατσάνη, Δ. (2000). Διδακτικές και παιδαγωγικές προσεγγίσεις στις Φυσικές Επιστήμες, Εκδόσεις Τυπωθήτω, Αθήνα.

Τσαλακός, Γ. (2010). Εγχειρίδιο χρήσης του προγράμματος ανάλυσης βίντεο Tracker 3.10.