

## Μελέτη κίνησης σωμάτων στη Φυσική και Μαθηματική μοντελοποίηση με χρήση εκπαιδευτικού λογισμικού

*Ευσταθίου Γ. Αγγελική Εκπ/κος Π.Ε.03 (Π.Π.Λ.Π.Π.) aefstath@sch.gr*  
*Σφαέλος Ε. Ιωάννης Εκπ/κος Π.Ε.04.01(Π.Π.Λ.Π.Π.) ioasfaelos@sch.gr*

### Περίληψη

Οι ανοιχτοί μικρόκοσμοι θεωρούνται ως τα πλέον σημαντικά εκπαιδευτικά λογισμικά, στα οποία ο χρήστης μπορεί να δημιουργήσει εκ του μηδενός ή συνδυαστικά, συνθετικά νέες οντότητες, νέα αντικείμενα, σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων και να μελετήσει τις αλληλεπιδράσεις τους. Στην παρούσα εργασία αξιοποιήσαμε τα λογισμικά **Function Probe**, **Sketchpad**, **Interactive Physics** και **Tracker**, προκειμένου να συνδέσουμε τους αλγεβρικούς συμβολισμούς με πραγματικές καταστάσεις και κατ' επέκταση δύο φαινομενικά ξένες για τους μαθητές περιοχές των Μαθηματικών και της Φυσικής. Στην εργασία αυτή μελετήσαμε ευθύγραμμες κινήσεις σωμάτων και την πλάγια βολή σώματος που αποτελεί μια σύνθετη κίνηση. Αυτές οι θεματικές ενότητες της Φυσικής απαιτούν από τους μαθητές κριτική σκέψη και συνδυαστική ικανότητα. Η μαθηματική μοντελοποίηση της κατακόρυφης βολής προς τα πάνω και της πλάγιας βολής ενός σώματος, δίνουν τη δυνατότητα, να συνδέσουν οι μαθητές ένα φυσικό φαινόμενο με τις μαθηματικές έννοιες που εμπλέκονται σε αυτό. Μέσω της γεωμετρικής εποπτείας με τη βοήθεια του λογισμικού **Sketchpad**, οι μαθητές φτάνουν από μόνοι τους στη διατύπωση του θεωρήματος Rolle και Μέσης Τιμής. Οι διαδικασίες για την μελέτη των κινήσεων των σωμάτων περιλαμβάνουν: Εκτέλεση προσομοίωσης της πτώσης ενός σώματος και κατακόρυφης βολής προς τα πάνω με το **Interactive Physics**. Πειραματικός προσδιορισμός της επιτάχυνσης σώματος κατά την κίνησή του σε κεκλιμένο επίπεδο στο Εργαστήριο Φυσικών Επιστημών με τη βοήθεια ηλεκτρονικού χρονομετρητή συνδεδεμένου με φωτοπύλη. Εκτέλεση πλάγιας βολής σώματος-λήψη video-επεξεργασία με το **Tracker**. Λήψη μετρήσεων και μαθηματική επεξεργασία αυτών (μελέτη και διερεύνηση των μετρήσεων και των γραφικών παραστάσεων που θα προκύψουν από το πείραμα), με τη βοήθεια του λογισμικού **Function Probe**.

**Λέξεις - κλειδιά:** Εκπαιδευτικά λογισμικά, Function Probe, Sketchpad, Tracker, Interactive Physics, ευθύγραμμες κινήσεις, πλάγια βολή, θεώρημα Μέσης Τιμής-Rolle.

### Εισαγωγή

Η Άλγεβρα και η Μηχανική αποτελούν μια περιοχή των Μαθηματικών και της Φυσικής αντίστοιχα, οι οποίες παρουσιάζουν ιδιαίτερες δυσκολίες που σχετίζονται με την κατανόηση των εννοιών τους, δυσκολίες που αφορούν τόσο το μαθητή όσο και το διδάσκοντα. Που όμως οφείλονται οι δυσκολίες αυτές; Ποια η φύση τους; Ποια εμπόδια καλείται να ξεπεράσει ο μαθητής και πώς η τεχνολογία μπορεί να υποστηρίξει τη διδασκαλία της;

Έχει θεωρηθεί ότι ένας τρόπος υπέρβασης της δυσκολίας κατανόησης εννοιών είναι η επίλυση λεκτικών προβλημάτων η οποία συνδέει τον αλγεβρικό συμβολισμό με πραγματικές καταστάσεις. Φαίνεται ότι η επίλυση προβλημάτων δεν έχει αποδώσει τα επιδιωκόμενα αποτελέ-

σματα, αφού παρατηρήθηκε το φαινόμενο οι μαθητές να περιορίζονται σε αποστήθιση κανόνων και μεθόδων αντιμετώπισης των προβλημάτων χωρίς να κατανοούν τις έννοιες που χρησιμοποιούν. Από την άλλη η κατανόηση μιας έννοιας είναι ανάλογη προς το πλήθος των συνδέσεων που διαθέτει με άλλες έννοιες στο χώρο των Μαθηματικών, της Φυσικής και άλλων επιστημών. Στο συγκεκριμένο θέμα δύο φαινομενικά ξένες περιοχές των Μαθηματικών και της Φυσικής, η γραμμική-τετραγωνική συνάρτηση και οι ευθύγραμμες ομαλά μεταβαλλόμενες κινήσεις, θα αλληλοεμπλακούν και θα συνδεθούν μέσα από τις δυνατότητες που παρέχει η τεχνολογία.

Η συγκεκριμένη εργασία φιλοδοξεί να συμβάλλει στην αλλαγή-βελτίωση της στάσης των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά-Φυσική και στη διαδικασία προσέγγισής τους. Οι μαθητές θα συνδέσουν τη μορφή της γραφικής παράστασης της γραμμικής -τετραγωνικής συνάρτησης με την εξέλιξη ενός φαινομένου κάτι που είναι αδύνατο να υλοποιηθεί σε μια συμβατική τάξη.

Μέσα από τις δυνατότητες του λογισμικού οι μαθητές θα εμπλακούν σε διαδικασίες μοντελοποίησης και στη συνέχεια σε υλοποίηση του μοντέλου. Αυτό θα τους επιτρέψει να πειραματιστούν με παραμέτρους κίνησης, να μελετήσουν την κίνηση και τέλος να βγάλουν συμπεράσματα για το φαινόμενο που μοντελοποίησαν.

Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις της συνάρτησης, στο μαθησιακό περιβάλλον που θα υλοποιηθούν οι δραστηριότητες, είναι δυναμικά συνδεδεμένες και η μετάβαση από τη μια στην άλλη γίνεται μέσα από τη δυνατότητα αλληλεπίδρασης των ψηφιακών εργαλείων.

Στη συγκεκριμένη εργασία και στα πλαίσια του αναλυτικού προγράμματος σπουδών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης μελετήσαμε την ευθύγραμμη κίνηση (πτώση σώματος από ένα ορισμένο ύψος θεωρώντας την αντίσταση του αέρα αμελητέα ή μη, κίνηση στο κεκλιμένο επίπεδο) και την πλάγια βολή.

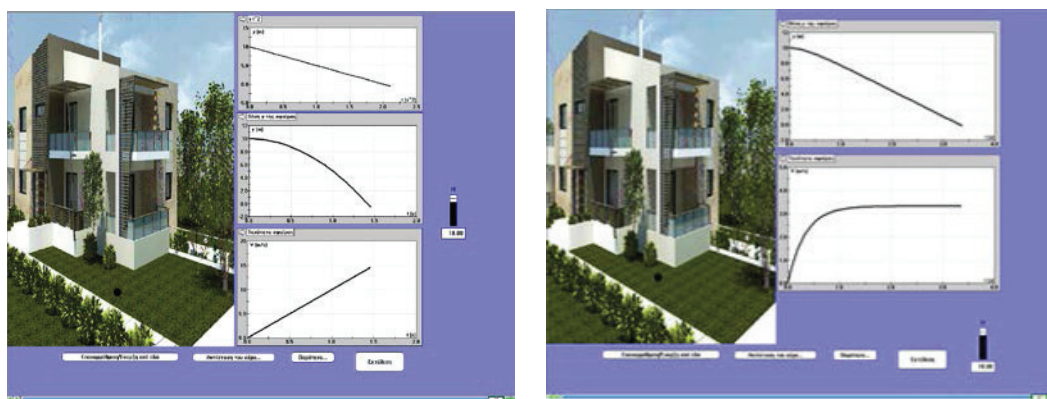
### **1<sup>η</sup> Δραστηριότητα: Μελέτη της πτώσης ενός σώματος – Κατακόρυφη βολή.**

Το προτεινόμενο σενάριο φιλοδοξεί να συμβάλλει στην αλλαγή-βελτίωση της στάσης των μαθητών απέναντι στη Φυσική και στα Μαθηματικά. Τους δίνεται δε η δυνατότητα να εμπλακούν με προβλήματα που απαιτούν διερεύνηση και πειραματισμό με αποτέλεσμα την δημιουργία εικασιών και ταυτόχρονα έλεγχο αυτών, και διατύπωση κανόνων και γενικεύσεων. Οι μαθητές, χωρίζονται σε ομάδες των 2-3 ατόμων όπου ο κάθε μαθητής έχει ένα συγκεκριμένο ρόλο μέσα στην ομάδα. Ο καθηγητής απευθύνεται άλλοτε σε όλες τις ομάδες και άλλοτε σε κάθε ομάδα ξεχωριστά, εξειδικεύοντας τις παρεμβάσεις του ανάλογα με τις ανάγκες που προκύπτουν κατά τη διαδικασία της διερεύνησης και διαχειρίζεται το χρόνο ώστε να μην υπάρχει μεγάλη διαφορά μεταξύ των ομάδων. Για την εφαρμογή του σεναρίου εκτιμάται ότι απαιτούνται 3 διδακτικές ώρες και απευθύνεται σε μαθητές Α΄ Λυκείου. Ο διδάσκων αφιερώνει ένα μικρό χρόνο ώστε να δώσει τις απαραίτητες οδηγίες για την εκτέλεση των προσομοιώσεων.

Οι γενικοί στόχοι που θέλουμε να επιτευχθούν είναι:

1. Οι μαθητές να ασκηθούν στην επιστημονική μέθοδο (παρατήρηση, περιγραφή και ερμηνεία των φυσικών φαινομένων).
2. Να εξοικειωθούν στη χρήση εκπαιδευτικού λογισμικού.
3. Να εξοικειωθούν με τις γραφικές παραστάσεις, η απεικόνιση μιας γραφικής παράστασης με βάση τη φυσική σημασία, καθώς και οι πληροφορίες που παρέχει.
4. Να καλλιεργήσουν το πνεύμα συνεργασίας στη διαδικασία κατάκτησης της γνώσης.
5. Να αγαπήσει ο μαθητής τη γνώση ως μέσον κατανόησης και βελτίωσης του εαυτού του και του κόσμου.

Ο σκοπός μας σ' αυτή τη δραστηριότητα είναι η μελέτη της κίνησης ενός σώματος όταν αφή-



Σχήμα 1: α. Οθόνη του "Ελεύθερη πτώση.ip" β. Οθόνη του "Πτώση στον αέρα.ip"

νεται ελεύθερο από ορισμένο ύψος από την επιφάνεια του εδάφους μέσω προσομοιώσεων στο περιβάλλον του **Interactive Physics**.

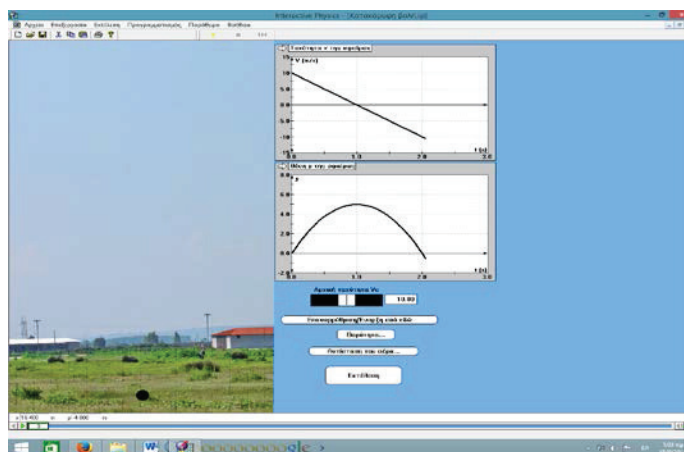
Αν η κίνηση γίνεται στον αέρα -όπως συμβαίνει στην πράξη- εκτός από το βάρος στο σώμα ασκείται και αντίσταση από τον αέρα, μια δύναμη που έχει πάντα φορά αντίθετη προς την ταχύτητά του. Το μέτρο αυτής της δύναμης εξαρτάται από την ταχύτητα. Επειδή το βάρος είναι σταθερή δύναμη αλλά η αντίσταση του αέρα αυξάνεται, για κάποια τιμή της ταχύτητας τα μέτρα αυτών των δυνάμεων εξισώνονται. Αυτό σημαίνει ότι -έκτοτε- το σώμα κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Η σταθερή ταχύτητα με την οποία πέφτει το σώμα στον αέρα λέγεται οριακή ταχύτητα.

Στο **σχήμα 1α**, φαίνεται το περιβάλλον προσομοίωσης που δημιουργήθηκε για τη μελέτη της πτώσης ενός σώματος (αρχείο "**Ελεύθερη πτώση.ip**"), θεωρώντας την αντίσταση του αέρα αμελητέα (ελεύθερη πτώση). Με το κουμπί "**Αντίσταση του αέρα...**", ανοίγει ένα παράθυρο στο οποίο επιλέγουμε '**Καμία**'. Με το κουμπί "**Βαρύτητα...**", από το παράθυρο που ανοίγει επιλέγουμε '**Κατακόρυφη**' και την τιμή της επιτάχυνσης βαρύτητας **g**, θέτοντας **10m/s<sup>2</sup>**. Τέλος, με το κουμπί '**Η**', επιλέγουμε το ύψος από το έδαφος από το οποίο αφήνουμε το σώμα να πέσει. Πατώντας το κουμπί '**Εκτέλεση**', οι μαθητές μπορούν να παρακολου-

θήσουν την ελεύθερη πτώση του σώματος όσες φορές επιθυμούν πατώντας το κουμπί **“Επαναρρύθμιση/Εναρξη από εδώ”** και να διαπιστώσουν ότι αν η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα, η συγκεκριμένη κίνηση (ελεύθερη πτώση), αποτελεί μια εφαρμογή της ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης χωρίς αρχική ταχύτητα. Ταυτόχρονα, μπορούν να αντλήσουν πληροφορίες από τα διαγράμματα  $y-t$  και  $v-t$ , που είναι οι γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων της ελεύθερης πτώσης  $y=H-1/2gt^2$  και  $v=gt$ , για τη θέση και την ταχύτητα του σώματος κάθε χρονική στιγμή και να επιβεβαιώσουν την τιμή της επιτάχυνσης βαρύτητας  $g$ , υπολογίζοντας την κλίση της ευθείας στο διάγραμμα  $v-t$ . Εναλλακτικά, οι μαθητές καλούνται από τον καθηγητή τους να υπολογίσουν την επιτάχυνση βαρύτητας  $g$ , με τη βοήθεια του διαγράμματος  $y-t^2$ .

Στο **σχήμα 1β**, έχουμε την περίπτωση της πτώσης ενός σώματος (αρχείο **“Πτώση στον αέρα.ip”**), όπου εκτός από το βάρος έχουμε και την επίδραση της αντίστασης του αέρα, μιας δύναμης που έχει πάντα φορά αντίθετη προς την ταχύτητά του και το μέτρο αυτής της δύναμης εξαρτάται από την ταχύτητα. Σ’ αυτή την περίπτωση με το κουμπί **“Αντίσταση του αέρα...”**, οι μαθητές επιλέγουν **“Συνήθης”**, που αντιπροσωπεύει την περίπτωση όπου η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη της ταχύτητας του σώματος.

Σ’ αυτήν εδώ την προσομοίωση, οι μαθητές μπορούν μέσω των διαγραμμάτων  $y-t$  και  $v-t$  να διαπιστώσουν ότι εφόσον το βάρος είναι σταθερή δύναμη αλλά η αντίσταση του αέρα αυξάνεται, για κάποια τιμή της ταχύτητας τα μέτρα αυτών των δυνάμεων εξισώνονται. Αυτό σημαίνει ότι -έκτοτε- το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Η σταθερή αυτή ταχύτητα με την οποία πέφτει το σώμα στον αέρα λέγεται οριακή ταχύτητα.



Σχήμα 2: Οθόνη του **“Κατακόρυφη βολή.ip”**

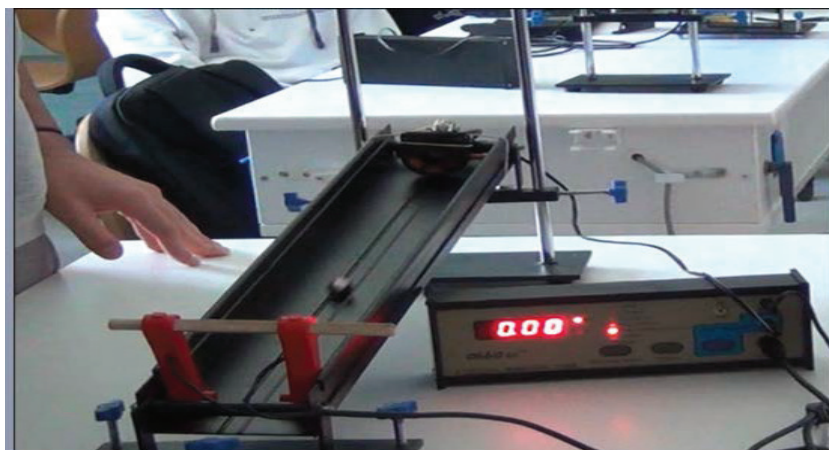
Ακολούθως, ο διδάσκων προτρέπει τους μαθητές να επιλέξουν με το κουμπί **“Αντίσταση του αέρα...”**, την περίπτωση **“Υψηλή”**, στην οποία η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας του σώματος. Παρακολουθώντας την προσομοίωση καλούνται να εντοπίσουν τις διαφορές με την προηγούμενη περίπτωση.

Τέλος, ανοίγοντας οι μαθητές το αρχείο **“Κατακόρυφη βολή.ip”** (Σχ. 2) και επιλέγοντας την αρχική ταχύτητα εκτόξευσης  $v_0 = 10\text{m/s}$ , την τιμή της επιτάχυνσης βαρύτητας  $g=10\text{m/s}^2$  με την αντίσταση του αέρα αμελητέα, μπορούν να διαπιστώσουν με την βοήθεια των δια-

γραμμάτων  $y-t$  και  $v-t$ , ότι η κατακόρυφη βολή ενός σώματος προς τα πάνω αποτελείται από μια ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση μέχρι το μέγιστο ύψος και μια ελεύθερη πτώση κατά την κάθοδο.

Το σενάριο ολοκληρώνεται με τη συμπλήρωση 2 φύλλων εργασίας από τους μαθητές.

**2<sup>η</sup> Δραστηριότητα: Πειραματικός προσδιορισμός της επιτάχυνσης σώματος κατά την κίνησή του σε κεκλιμένο επίπεδο.**



*Σχήμα 3: Πειραματική διάταξη για τον υπολογισμό της επιτάχυνσης*

Το πείραμα στο εργαστήριο του σχολείου είναι μια διαδικασία μετασχηματισμού της πραγματικότητας σε ελεγχόμενες συνθήκες χώρου και αναπαραγωγής ενός φαινομένου ρυθμίζοντας τις συνθήκες εξέλιξής του, σύμφωνα με το σκοπό μας. Κατά τη διεξαγωγή του πειράματος ο μαθητής παρακολουθεί με όλες του τις αισθήσεις τα αντικείμενα και τα φαινόμενα σε πραγματικές συνθήκες, κάτι που δεν μπορεί να συμβεί χρησιμοποιώντας αποκλειστικά και μόνο ένα λογισμικό προσομοίωσης καθότι αυτό προσφέρει μια εικονική πραγματικότητα.

Το σχέδιο αυτό του μαθήματος έχει διάρκεια 2 διδακτικών ωρών και απευθύνεται σε μαθητές της Α' Λυκείου. Ο αριθμός των μαθητών είναι 20 και χωρίζονται σε ομάδες των 3-4 ατόμων. Κάθε ομάδα εκτελεί στον δικό της πάγκο την εργαστηριακή άσκηση και επεξεργάζεται τις μετρήσεις.

Η διαδικασία ξεκινά με τη μέτρηση της διαμέτρου  $d$  του σφαιριδίου που θα κινηθεί στο κεκλιμένο επίπεδο, με τη βοήθεια ενός παχύμετρου.

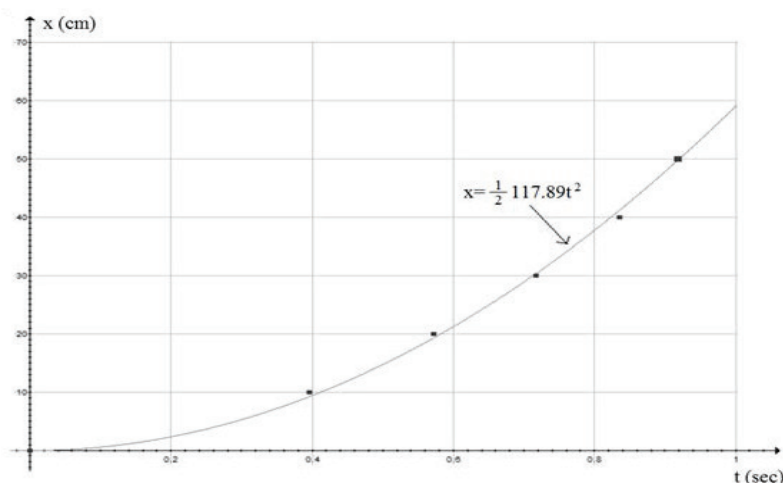
Αφήνουμε το σώμα να ξεκινήσει χωρίς αρχική ταχύτητα από το ανώτερο μέρος της διαδρομής του διανύοντας μια απόσταση  $x$ , στο κεκλιμένο επίπεδο και καταγράφουμε το χρόνο φωτοσκίασης του σώματος (δηλαδή του χρόνου  $ts$ , που απαιτείται για να διανύσει η σφαι-

ρα απόσταση ίση με τη διάμετρό της από τη φωτοπύλη) με ψηφιακό χρονόμετρο συνδεδεμένο με τη φωτοπύλη (Σχ. 3). Ο διδάσκων αφιερώνει λίγο χρόνο ώστε να εξηγήσει στους μαθητές την λειτουργία της παραπάνω διάταξης όπως και τη χρήση του λογισμικού Function Probe, με τη βοήθεια του οποίου οι μαθητές υπολογίζουν τις στιγμιαίες ταχύτητες  $v$ , του σφαιριδίου στις θέσεις  $x$ , που έχουν επιλέξει, οπότε προκύπτει ο Πίνακας 1. Στο παράθυρο «Γράφημα», στέλνουμε το σύνολο των σημείων ( $t$ - $x$ ) και με την κατάλληλη προσαρμογή που

t	x	z	ts	δ	v
sec	cm	$z = t^2/2$	χρόνος σκίασης(ms)	διάμετρος(cm)	$v = \delta/ts$ (cm/s)
0	0	0	0		0
0.396	10	0.078	32.71		48.92
0.572	20	0.164	21.41		74.73
0.717	30	0.257	19.13	1.6	83.64
0.835	40	0.349	17.4		91.95
0.918	50	0.421	15.6		102.56

Πίνακας 1: Μετρήσεις και υπολογισμοί στο Function Probe

εκτελούμε παίρνουμε τη γραφική παράσταση  $x$ - $t$  (Σχήμα 4). Γνωρίζοντας το συντελεστή του  $t^2$ , καλούνται οι μαθητές να υπολογίσουν την επιτάχυνση  $a$  του σώματος (1<sup>η</sup> μέθοδος).

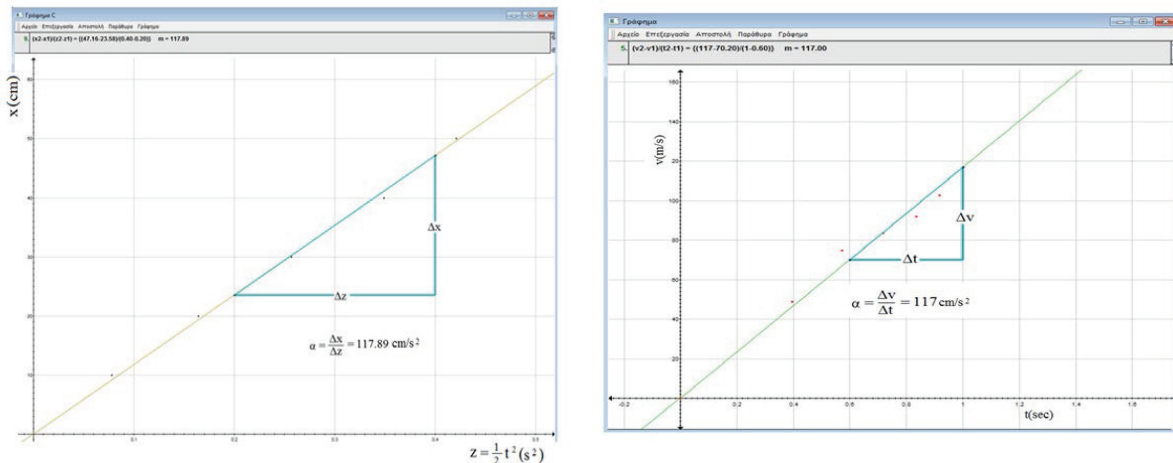


Σχήμα 4: Διάγραμμα  $x$ - $t$

Στο **σχήμα 5α**, έχουμε το διάγραμμα  $x$ - $t^2/2$ , που είναι μια ευθεία και ο διδάσκων προτρέπει τους μαθητές να αιτιολογήσουν τη μορφή της και να υπολογίσουν με τη βοήθεια του την επιτάχυνση

**α (2η μέθοδος).**

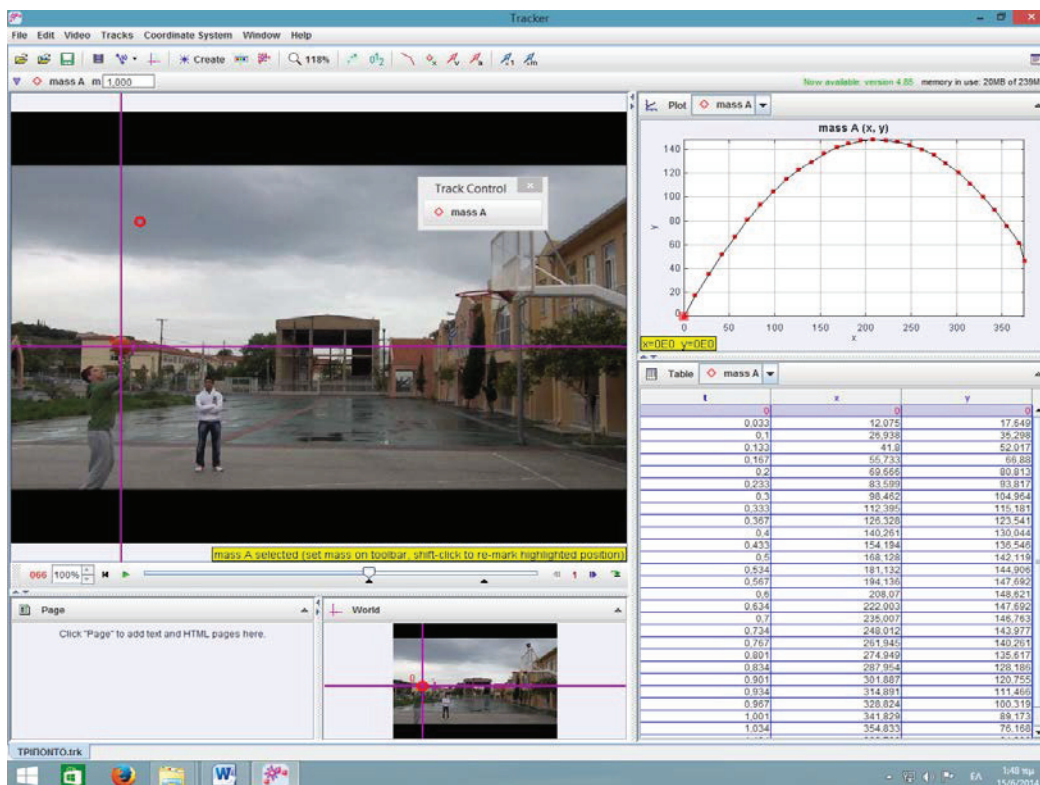
Επίσης, με τη βοήθεια του διαγράμματος  $v$ - $t$  (Σχήμα 5β), οι μαθητές καλούνται να υπολογίσουν και πάλι την επιτάχυνση  $a$  (3<sup>η</sup> μέθοδος). Τέλος, συγκρίνουν τα αποτελέσματα και για τις τρεις μεθόδους.



Σχήμα 5: α. Διάγραμμα  $x-t^2/2$  β. Διάγραμμα  $v-t$

### 1. Πειραματική εκτέλεση πλάγιας βολής σώματος.

Η διδασκαλία της πλάγιας βολής στοχεύει:



Σχήμα 6: Οθόνη του "Πλάγια βολή μπάλας.trk" του Tracker

- Στην κατανόηση του γεγονότος ότι η πλάγια βολή είναι σύνθετη κίνηση, δηλαδή αποτελείται απλής σύνθεσης δύο ανεξάρτητων κινήσεων που μπορούμε να τις προσδιορίσουμε ξεχωριστά.

- Στην παρατήρηση, περιγραφή και ερμηνεία από τους μαθητές ολόκληρου του φαινομένου της πλάγιας βολής.

Οι μαθητές της Β΄ Λυκείου στους οποίους απευθύνεται το συγκεκριμένο σχέδιο μαθήματος διάρκειας 1 διδακτικής ώρας, μελετούν το φαινόμενο ο καθένας ξεχωριστά αλλά και συνεργατικά. Ακολούθως, με τη θεωρητική προσέγγιση της πλάγιας βολής οδηγούνται στην εξίσωση τροχιάς, αναζητούν και συζητούν τις παραμέτρους που επηρεάζουν την πλάγια βολή.

Η πλάγια βολή σώματος μελετήθηκε με τη βιντεοσκόπηση στο γήπεδο του σχολείου, μιας προσπάθειας εκτόξευσης μπάλας του μπάσκετ από ένα μαθητή που βρήκε το στόχο. Η επεξεργασία του παραπάνω video έγινε με χρήση του λογισμικού **Tracker** από τον διδάσκοντα, ανοίγοντας το αρχείο "**Πλάγια βολή μπάλας.trk**", το οποίο δίνει τη δυνατότητα προσδιορισμού της θέσης ( $x,y$ ), της μπάλας σε σταθερά χρονικά διαστήματα κατά τη κίνησή της και τη δημιουργία του διαγράμματος  $y-x$  (Σχ. 6). Η όλη διαδικασία προβάλλεται μέσω βιντεοπροβολέα στο εργαστήριο Φυσικών Επιστημών. Έχουμε επίσης τη δυνατότητα να καταχωρήσουμε τις μετρήσεις  $x,y,t$ , σε πίνακα του **Function Probe** και να επεξεργαστούμε καλύτερα τις μετρήσεις. Στους μαθητές δίνεται τελικά η δυνατότητα να υπολογίσουν κάποια χαρακτηριστικά της πλάγιας βολής όπως το βεληνεκές, την οριζόντια και κατακόρυφη ταχύτητα και το συνολικό χρόνο ανόδου και καθόδου. Γνωρίζοντας τις σχέσεις που περιγράφουν την κίνηση κατά την πλάγια βολή της μπάλας μπορούν να υπολογίσουν τη αρχική ταχύτητα και τη γωνία βολής ώστε να είναι εύστοχη η προσπάθεια.

## 2. Θεώρημα Μέσης Τιμής - Θεώρημα Rolle.

Το σενάριο με τίτλο "**Θεώρημα Μέσης Τιμής - Θ. Rolle**" είναι διάρκειας 5 διδακτικών ωρών και απευθύνεται στους μαθητές Γ΄ Λυκείου (Θετικής & Τεχνολογικής Κατεύθυνσης). Οι μαθητές μέσω της γεωμετρικής εποπτείας που έχουν από τη γραφική παράσταση  $y-t$  ενός σώματος που εκτελεί κατακόρυφη βολή προς τα πάνω, θα φτάσουν στη διατύπωση των συνθηκών των παραπάνω θεωρημάτων, ενώ παράλληλα θα συνδέσουν ένα φυσικό φαινόμενο με τις μαθηματικές έννοιες που εμπλέκονται σε αυτό. Η διεξαγωγή του σεναρίου θα πραγματοποιηθεί στο εργαστήριο Η/Υ του σχολείου και το προβλεπόμενο διδακτικό μοντέλο είναι αυτό της διερευνητικής συνεργατικής μάθησης. Οι μαθητές θα είναι χωρισμένοι σε ομάδες των δύο ατόμων, και ο διδάσκων εξειδικεύει τις παρεμβάσεις του ανάλογα με τις ανάγκες που προκύπτουν κατά την εκτέλεση των δραστηριοτήτων που ο ίδιος έχει εκπονήσει στο φύλλο εργασίας που θα μοιράσει.

### Σύντομη ανάλυση της αναμενόμενης διδακτικής πορείας:

#### 1η διδακτική ώρα

Αρχικά προτρέπουμε τους μαθητές να ανοίξουν το αρχείο "**Κατακόρυφη βολή.ip**" (Σχ. 2) και να περιγράψουν το φαινόμενο που εξελίσσεται στην οθόνη του υπολογιστή τους. Οι μαθητές εύκολα θα διαπιστώσουν το φαινόμενο της κατακόρυφης βολής, προς τα πάνω, ενός σώματος με αρχική ταχύτητα 10m/s και επιστροφή του στο σημείο βολής, ενώ συγχρόνως καλούνται να συμπληρώσουν έναν πίνακα με τις ταχύτητες που έχει το σώμα σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές που έχει επιλέξει ο διδάσκων.



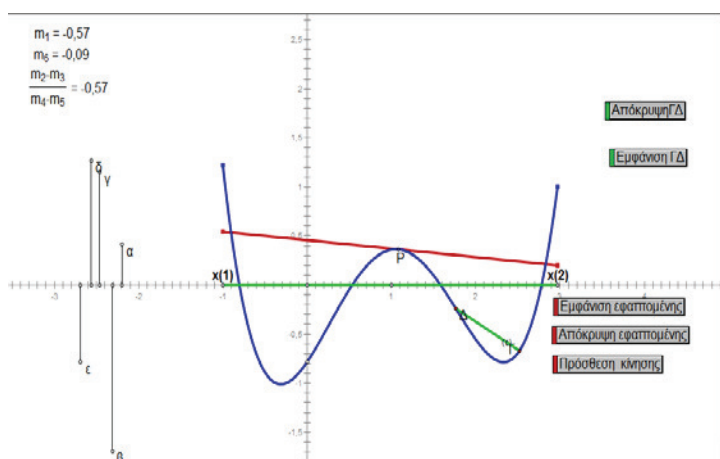
Στη συνέχεια με κατάλληλα σχεδιασμένες δραστηριότητες επαναφέρουμε στη μνήμη των μαθητών τη φυσική και γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου συνάρτησης σε σημείο, καλλιεργώντας παράλληλα στους μαθητές τον προβληματισμό της ύπαρξης σημείων στη γραφική παράσταση συνάρτησης στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα  $x'$  καθώς και οριζώντιου ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει δύο διαφορετικά σημεία της με την ίδια τεταγμένη.

Προκειμένου να ενισχύσουμε τον παραπάνω προβληματισμό τους, προτρέπουμε τους μαθητές, σε επόμενη δραστηριότητα, να ανοίξουν το αρχείο **“Rolle.gsp”** του Sketchpad (Σχ. 7) και να πειραματιστούν με διαφορετικές συναρτήσεις (σύροντας μεταβολείς) και πατώντας τα κουμπιά εμφάνισης και απόκρυψης εφαπτομένης.

Στη συνέχεια τους ζητάμε να εκφράσουν τις παρατηρήσεις τους, με δικά τους λόγια, διατυπώνοντας μια εικασία. Οι προσπάθειές τους έχουν σαν αποτέλεσμα να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι: «Μπορούμε να βρούμε ένα τουλάχιστον σημείο πάνω στην καμπύλη, στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον  $x'$  και στην ευθεία που ενώνει δύο διαφορετικά σημεία της καμπύλης με ίδια τεταγμένη».

## 2η διδακτική ώρα

Με τον σχεδιασμό κατάλληλης δραστηριότητας επιχειρείται η αποσταθεροποίηση της βεβαιότητας που μέχρι τώρα υπάρχει. Στη συνέχεια προτρέπουμε τους μαθητές να ανοίξουν σταδιακά τα αρχεία **“σχέδιο1.gsp”**, **“σχέδιο2.gsp”**, **“σχέδιο3.gsp”** του Sketchpad και να εκτελέσουν εκείνες τις δραστηριότητες του φύλλου εργασίας από όπου μόνοι τους ανακαλύπτουν τις συνθήκες που πρέπει να πληρούνται προκειμένου να ισχύει πάντα η προηγούμενη εικασία τους. Διατυπώνεται το τελικό θεώρημα Rolle ως εξής: «Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[x_1, x_2]$ , παραγωγίσιμη στο  $(x_1, x_2)$  και  $f(x_1)=f(x_2)$ , τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο  $\xi$  στο διάστημα  $(x_1, x_2)$ , τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο  $(\xi, f(\xi))$  να είναι παράλληλη στον  $x'$ ». Στη συνέχεια προτρέπουμε τους μαθητές να επαναδιατυπώσουν το παραπάνω θεώρημα σε πιο τυπική γλώσσα.



Σχήμα 7: Οθόνη του **“Rolle.gsp”** του Sketchpad

Με επόμενη δραστηριότητα στοχεύουμε να συνδέσουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής με το Θεώρημα Rolle. Προτρέπουμε και πάλι τους μαθητές να κάνουν μια διατύπωση αυτού πρώτα σε γεωμετρική και έπειτα σε αλγεβρική γλώσσα.

### **3 η διδακτική ώρα**

Προτρέπουμε τους μαθητές να ανοίξουν το αρχείο "Ερωτήσεις ανοικτού και κλειστού τύπου" και ατομικά να το συμπληρώσουν. Έτσι, ο διδάσκων θα έχει τη δυνατότητα να ελέγξει αν η όλη διαδικασία απέδωσε τα αναμενόμενα αποτελέσματα. Θα ακολουθήσει συζήτηση των απαντήσεων μέσα στην τάξη. Ως εργασία για το σπίτι αναθέτουμε στους μαθητές τις ερωτήσεις ανοικτού και κλειστού τύπου της αντίστοιχης ενότητας του σχολικού εγχειριδίου.

### **4η -5η διδακτική ώρα**

Μοιράζουμε στους μαθητές το φύλλο εργασίας II όπου παρουσιάζονται κάποιες βασικές εφαρμογές αυτών των δύο θεωρημάτων σε διάφορα θέματα όπως:

- α) Ύπαρξη ρίζας της παραγώγου συνάρτησης.
- β) Υπολογισμός της παραγώγου συνάρτησης σε σημείο της (όταν δεν γνωρίζουμε τον τύπο της).
- γ) Πλήθος ριζών συνάρτησης.
- δ) Απόδειξη ανισοτικών σχέσεων

### **Βιβλιογραφία**

- Finney R.L., Weir M.D., Giordano F.R. - THOMAS "Απειροστικός Λογισμός" Α-Τόμος.
- Αλαχιώτης, Σ. (2002). Για ένα σύγχρονο εκπαιδευτικό σύστημα. Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων, 7, 7-18.
- Κυνηγός Χ., Δημαράκη Ε. (2002). Νοητικά εργαλεία και πληροφοριακά μέσα. Παιδαγωγική αξιοποίηση της Σύγχρονης Τεχνολογίας για τη Μετεξέλιξη της Εκπαιδευτικής Πρακτικής.
- Μπαρκάτσας Αν. (2004). Τα Μαθηματικά στην εποχή των τεχνολογιών της πληροφορίας και της επικοινωνίας.
- Θεοφιλίδης Χ., (1997), Διαθεματική προσέγγιση της διδασκαλίας, έκδ. 2η, Αθήνα, Γρηγόρης.
- Kay, Alan Doing with Images Makes Symbols Pt 1 Video presentation by Alan Kay that demonstrates Sketchpad.
- Walter G. S., Review of Research in Education, University of Wisconsin – Madison.
- David Hestenes, Modeling methodology for physics teachers, Department of Physics and Astronomy, Arizona State University.

Ορφανός, Σ. & Δημητρακοπούλου, Α. (2004). Σχεδιασμός Φύλλων Δραστηριοτήτων Μαθητών για Διερευνητικά Τεχνολογικά Περιβάλλοντα στις Φυσικές Επιστήμες: Η περίπτωση σχεδιασμού Δραστηριοτήτων Μοντελοποίησης.

Orfanos S. & Dimitracopoulou A. (2003). Technology based modelling activities in learning concepts relations in kinematics.

Ματσαγγούρας Η., (2000), Ομαδοσυνεργατική διδασκαλία και μάθηση, έκδ. 2η , Αθήνα, Γρηγόρης.

Ματσαγγούρας Η., (2003), Η διαθεματικότητα στη σχολική γνώση, Αθήνα, Γρηγόρης.

Σπυροπούλου- Κατσάνη, Δ. (2000), Διδακτικές και παιδαγωγικές προσεγγίσεις στις Φυσικές Επιστήμες, Εκδόσεις Τυπωθήτω, Αθήνα.

Dillenbourg, P., (2000). Virtual Learning Environments. EUN conference 2000: Learning in the new millennium: building new education strategies for schools.