# ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ ΦΥΣΙΚΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

## Προσδιορισμός ροπής αδράνειας κυλίνδρου ή σφαίρας που κυλίεται χωρίς ολίσθηση σε κεκλιμένο επίπεδο

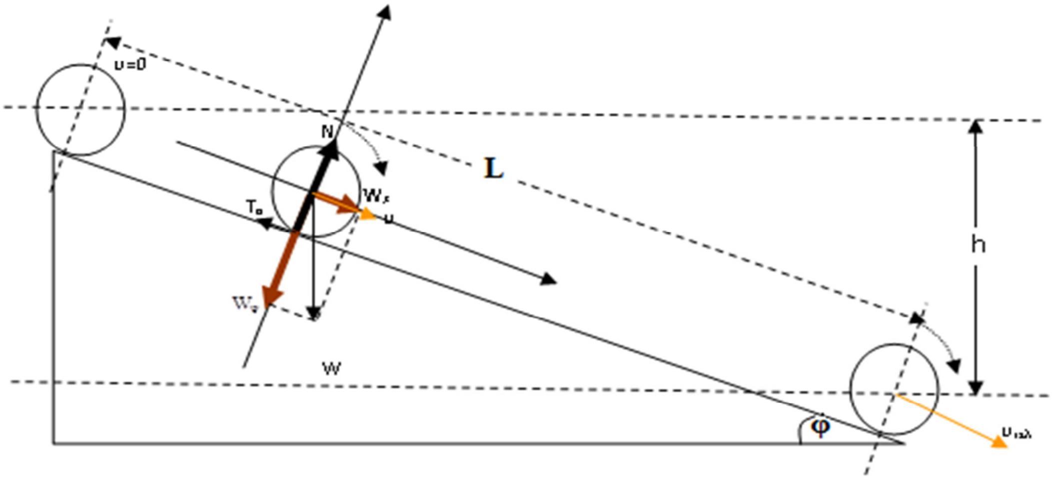
### ➢ Στόχοι

**1.** Σχεδιασμός και συναρμολόγηση απλών πειραματικών διατάξεων, στα πλαίσια ενός θεωρητικού μοντέλου.
**2.** Η εξοικείωση με μετρήσεις χρόνου και μήκους και η εκτίμηση των σφαλμάτων που υπεισέρχονται κατά τις μετρήσεις τους.
**3.** Σχεδιασμός γραφήματος με βάση πειραματικά δεδομένα. Έλεγχος των θεωρητικών προβλέψεων και υπολογισμός μεγεθών από πειραματική γραφική παράσταση.
**4.** Μέτρηση της ροπής αδράνειας ομοιογενούς κυλινδρικού σώματος με δύο διαφορετικές διαδικασίες.

### ➢ Απαραίτητα Όργανα & Υλικά

**1.** Κεκλιμένο επίπεδο
**2.** Ένας κύλινδρος ή μια σφαίρα
**3.** Μετροταινία 2m και βαθμονομημένος κανόνας 30cm
**4.** Παχύμετρο
**5.** Ηλεκτρονικός ζυγός
**6.** Ψηφιακό χρονόμετρο
**7.** Γωνιόμετρο
**8.** Υπολογιστής τσέπης

### ➢ Το Θεωρητικό Πλαίσιο



Το στερεό σώμα του σχήματος (κύλινδρος ή σφαίρα, του οποίου βλέπουμε το προφίλ), αφήνεται από το σημείο Ο του κεκλιμένου επιπέδου, η κλίση του οποίου μπορεί να μεταβάλλεται, και κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Αυτό σημαίνει ότι η μεταφορική ταχύτητα του κέντρου μάζας του είναι ίση με τη γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειάς του και επομένως ισχύει: $\mathbf{\upsilon_{cm} = \omega.R}$, όπου **R** η ακτίνα του κυλίνδρου και **ω** η γωνιακή ταχύτητα.
Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας από το Ο μέχρι το Α έχουμε:

$$\mathbf{mgh = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \rightarrow mgh = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}I\frac{\upsilon^2}{R^2} \rightarrow}$$

$$\mathbf{gh = \frac{1}{2}\upsilon^2\left(1 + \frac{I}{mR^2}\right) \rightarrow \frac{1}{2}\upsilon^2 = \frac{g}{1+\frac{I}{mR^2}}h} \qquad (1)$$

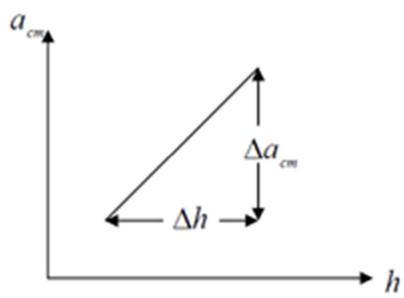
Το κέντρο μάζας του κυλίνδρου εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με την επίδραση της συνιστώσας του βάρους και την αντίδραση της τριβής κυλίσεως, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις: $\boldsymbol{\upsilon_{cm} = \alpha_{cm}.t}$ και $\mathbf{L = \frac{1}{2}\alpha_{cm}.t^2}$. Απαλείφοντας το χρόνο από τις δύο σχέσεις παίρνουμε:

$$\mathbf{\alpha_{cm} = \frac{\upsilon_{cm}^2}{2L}} \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε:

$$\mathbf{\alpha_{cm} = \frac{g}{(1+\frac{I}{mR^2})L}h} \qquad (3)$$

Από την (3) διαπιστώνουμε ότι η επιτάχυνση $\alpha_{cm}$ είναι ανάλογη με το ύψος **h**. Στη γραφική παράσταση $\mathbf{\alpha_{cm}=f(h)}$, από το συντελεστή αναλογίας $k=\mathbf{\frac{g}{(1+\frac{I}{mR^2})L}}$, που εκφράζει την κλίση της ευθείας μπορούμε να υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειας του στερεού.




$$(1 + \frac{I}{mR^2}).L = \frac{g}{k} \Rightarrow 1 + \frac{I}{mR^2} = \frac{g}{k.L} \Rightarrow \frac{I}{mR^2} = \frac{g}{k.L} - 1 \Rightarrow$$

$$\boxed{I = (\frac{g}{k.L} - 1).mR^2} \qquad (4)$$

Αν συνεπώς υπολογίσουμε την κλίση και με δεδομένο ότι τα υπόλοιπα μεγέθη είναι γνωστά βρίσκουμε εύκολα τη ροπή αδράνειας **I**. Για την κλίση όμως χρειάζεται η γραφική παράσταση $\mathbf{\alpha_{cm} = f(h)}$. Και για μεν το h αντιστοιχεί μια απλή μέτρηση, για το $\alpha_{cm}$ απαιτείται μέτρηση της στιγμιαίας ταχύτητας στο τέλος του κεκλιμένου επιπέδου. Η στιγμιαία ταχύτητα βρίσκεται από τη σχέση: $\mathbf{\upsilon_{cm}} = \mathbf{\frac{2R}{t}}$ (5), όπου **t** ο μέσος χρόνος φωτοσκίασης του σώματος (κυλίνδρου ή σφαίρας). Μέσα από πίνακα διαδοχικών μετρήσεων χρόνου υπολογίζουμε για διαφορετικά ύψη **h** την αντίστοιχη $\mathbf{\alpha_{cm}}$ και από το διάγραμμα την κλίση.

## ➢ Παρατηρήσεις

Αν ο κύλινδρος είναι ομογενής, η ροπή αδράνειάς του δίνεται από τη σχέση: $\mathbf{I = \frac{1}{2} mR^2}$
Η τιμή που προκύπτει μπορεί να συγκριθεί με αυτή που υπολογίζουμε πειραματικά και να σχολιάσουμε τις τυχόν αποκλίσεις.
Αν χρησιμοποιήσουμε ομογενή σφαίρα, η ροπή αδράνειάς του δίνεται από τη σχέση: $\mathbf{I = \frac{2}{5} mR^2}$

## ➢ Πειραματική Διαδικασία

**1. Ζυγίζουμε τον κύλινδρο και καταγράφουμε τη μάζα του:**

**m = …………. Kg**

**2. Μετράμε την ακτίνα του κυλίνδρου. Η μέτρηση μπορεί να γίνει με τρεις τρόπους:**

**α. Με παχύμετρο**

**β. Τυλίγουμε ένα λεπτό σπάγκο στην περιφέρειά του. Όταν τον ξετυλίξουμε μπορούμε να βρούμε το μήκος της περιφέρειάς του και από εκεί την ακτίνα του.**

**γ. Αν δεν έχουμε παχύμετρο, βάζουμε τον κύλινδρο ανάμεσα σε δύο σανίδια και μετράμε την απόσταση μεταξύ τους, η οποία αντιστοιχεί στη διάμετρο του κυλίνδρου:**

**R = …………. m**

**3. Προσδιορίζουμε με δύο ευθείες γραμμές (παράλληλες με τις οριζόντιες ακμές της πλάγιας σανίδας) την αρχή και το τέλος της διαδρομής του κυλίνδρου πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο, που θα χρονομετρήσουμε, και μετράμε το μήκος της. Είναι:**

**L = …………. m**

**4. Μετράμε την υψομετρική διαφορά h της αρχικής από την τελική θέση του κυλίνδρου, στη διαδρομή που έχουμε προσδιορίσει.**

**Άλλος τρόπος είναι να βρούμε την γωνία κλίσης του κεκλιμένου επιπέδου θ, οπότε h=L.ημθ.**

**5. Αφήνουμε τον κύλινδρο να ξεκινήσει, χωρίς αρχική ταχύτητα, από το ανώτερο μέρος της διαδρομής του και μετράμε το χρόνο που χρειάζεται για να φθάσει στο άλλο άκρο της.**

## ➢ Παρατηρήσεις

**α. Προσέχουμε ώστε ο κύλινδρος να κινείται παράλληλα με τις οριζόντιες ακμές της πλάγιας σανίδας.**

**β. Η μέτρηση απαιτεί δύο μαθητές. Ο ένας θα χειρίζεται το χρονόμετρο, ενώ ο άλλος θα κρατάει τον κύλινδρο στην αρχική του θέση και θα δώσει το σύνθημα για την έναρξη λειτουργίας του χρονομέτρου. Ο πρώτος θα σταματήσει το χρονόμετρο όταν παρατηρήσει ότι ο κύλινδρος διέρχεται από το χαμηλότερο σημείο της διαδρομής του.**

**γ. Επειδή η μέτρηση του χρόνου εμπεριέχει σημαντικό υποκειμενικό σφάλμα, προτείνεται να γίνουν πέντε χρονομετρήσεις για κάθε τιμή του h , και να υπολογιστεί η μέση τιμή τους.**

Επιπλέον οι μετρήσεις να ξεκινήσουν από μικρές κλίσεις προς τις μεγαλύτερες, ώστε να αποκτηθεί σταδιακά μια εξοικείωση με τη χρονομέτρηση και να προηγούνται μερικές δοκιμαστικές μετρήσεις.

6. Καταγράφουμε όλες τις μετρήσεις μας στον πίνακα μετρήσεων που ακολουθεί, υπολογίζοντας κάθε φορά την αντίστοιχη μέση τιμή του χρόνου καθώς και την επιτάχυνση $\alpha_{cm}$, από τη σχέση (2), αφού προηγουμένως υπολογίσουμε τη στιγμιαία ταχύτητα $\upsilon_{cm}$, από τη σχέση (5).

| ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| h m | $t_1$ s | $t_2$ s | $t_3$ s | $t_4$ s | $t_5$ s | $\bar{t}$ s | $\upsilon_{cm}$(m/s) | $\alpha_{cm}$ m/s$^2$ |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |

7. Αλλάζουμε την κλίση του πλαγίου επιπέδου, προσθαφαιρώντας ή μετακινώντας στηρίγματα και επαναλαμβάνουμε την προηγούμενη διαδικασία των βημάτων 5 & 6.

8. Σχεδιάζουμε την ευθεία $\alpha_{cm} - h$ στο χιλιοστομετρικό χαρτί που ακολουθεί.

Υπολογίζουμε την κλίση της ευθείας αυτής $k = \frac{\Delta\alpha_{cm}}{\Delta h}$, βρίσκοντας από τη γραφική παράσταση το μήκος που αντιστοιχεί στη μεταβολή της γραμμικής επιτάχυνσης του κ.μ. και

$$\Delta\alpha_{cm} = \ldots\ldots\ldots\ (m/s^2) \qquad \Delta h = \ldots\ldots\ldots\ (m)$$

το μήκος που αντιστοιχεί στη μεταβολή του ύψους. Έτσι είναι:

$$k = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε τη ροπή αδράνειας από τη σχέση (4), βάζοντας στη θέση της επιτάχυνσης της βαρύτητας $g = 9{,}81 m/s^2$ ή την τιμή που έχει βρεθεί από τον πειραματικό υπολογισμό στην προηγούμενη τάξη. Έτσι, μετά τις πράξεις μπορούμε να γράψουμε:

$$I = \ldots\ldots\ldots\ldots Kg.m^2$$

9. Υπολογίζουμε τη ροπή αδράνειας του κυλίνδρου με βάση τη σχέση $I = \frac{1}{2} mR^2$ (κύλινδρος) ή $I = \frac{2}{5} mR^2$ (σφαίρα) και βρίσκουμε:

$$I_{\theta\epsilon\omega\rho} = \ldots\ldots\ldots\ldots Kg.m^2$$

και τη συγκρίνουμε με αυτή που προέκυψε πειραματικά στο προηγούμενο βήμα.

**Υπολογίζουμε το % σχετικό σφάλμα:**

$$\boldsymbol{\delta = \frac{|\Delta I|}{I_{\theta\varepsilon\omega\rho}}.100\%}$$

**των δύο τιμών αφού $|\Delta I| = |I_{\theta\varepsilon\omega\rho} - I|$ = .............Kg.m$^2$, οπότε:**

**δ = ............%**

**και καταγράφουμε τις αιτίες αυτής της διαφοροποίησης. Παραθέτουμε, δηλαδή, τους παράγοντες οι οποίοι αλλοιώνουν τους θεωρητικούς υπολογισμούς.**