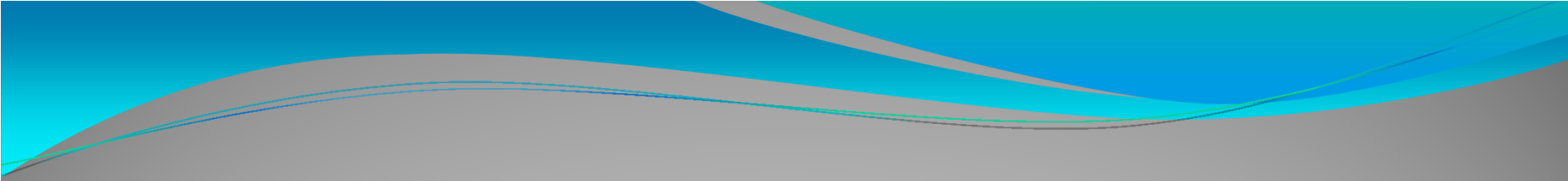




**Το άπειρο και
τα παράδοξα
του Ζήνωνα**

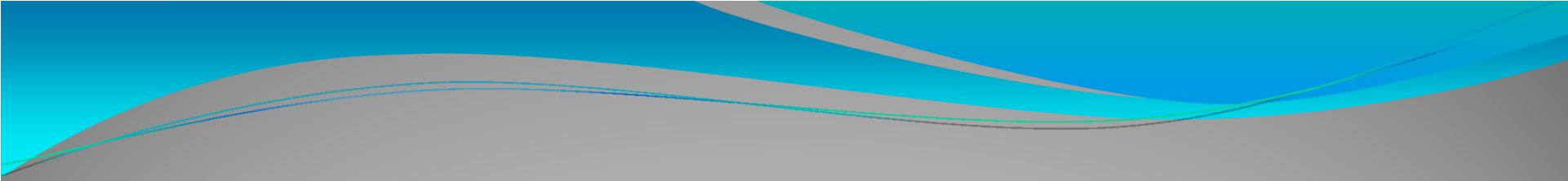


Το άπειρο το συναντάμε σε πολλά
θεμελιώδη ανθρώπινα ερωτήματα,
όπως:

Υπάρχει αιώνια ζωή;

Το σύμπαν έχει αρχή και τέλος;

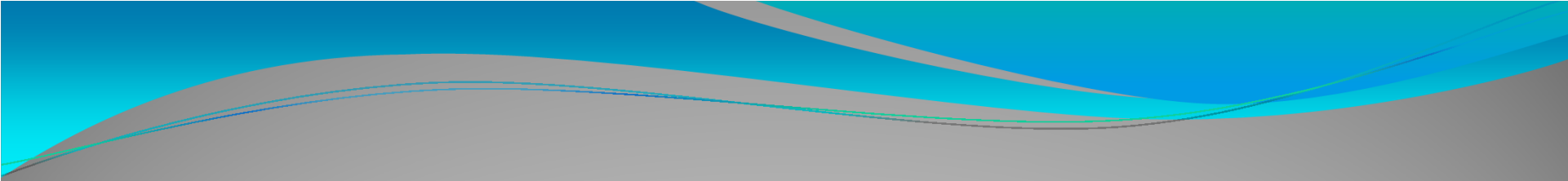
Έχει κάποιο «σύνορο» ή η έκτασή του
είναι απεριόριστη;



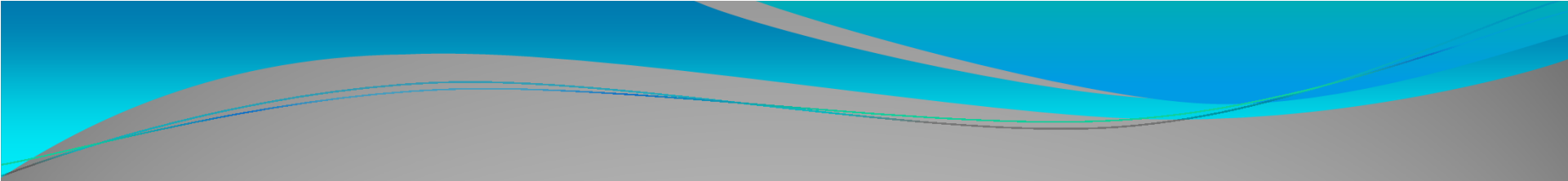
Ενώ μας φαίνεται πολύ φυσικό
μια αριθμητική ακολουθία
να συνεχίζεται επ' άπειρο,
υπάρχουν άπειρα
που ο ανθρώπινος νους
αδυνατεί να συλλάβει.

Για παράδειγμα,
πώς θα αντιλαμβανόσασταν
τις έννοιες άπειρη θερμοκρασία
ή άπειρη λαμπρότητα;

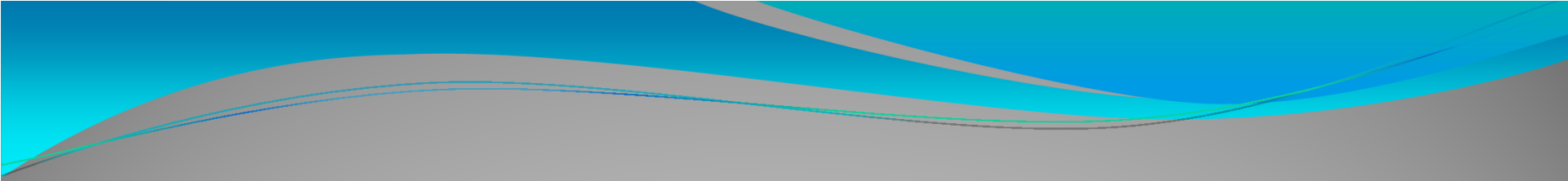
Θα μπορούσε ένα τέτοιο φυσικό μέγεθος
να είναι πραγματικά άπειρο;



Ένα άλλο άπειρο
είναι αυτό που έχει τις ρίζες του
στη θρησκεία
και που συνδέεται με την πίστη
στην οποία βασίζονται
πολλές Δυτικές Θρησκείες.

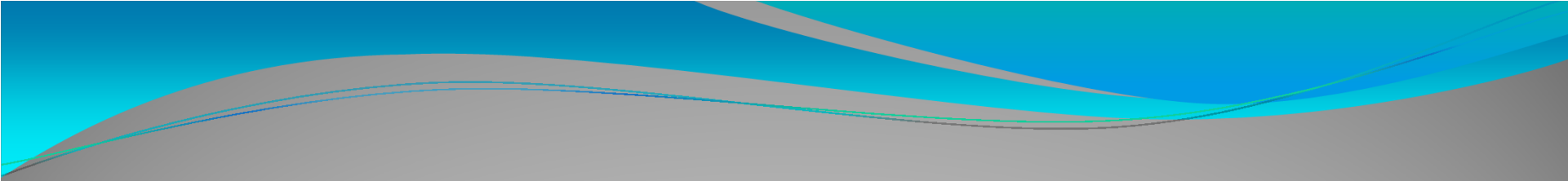


Για χιλιάδες χρόνια το άπειρο
ήταν σε αντίθεση
με τις αντιλήψεις της Δύσης
που θεωρούσαν το Θεό
ως το μοναδικό άπειρο όν,
και τη Γη
στο κέντρο του Σύμπαντος.



Υπάρχει και ένα άλλο άπειρο
που για την κατανόησή του
χρειάζεται να γνωρίζουμε
λίγα Μαθηματικά.

Όλοι ξέρουμε
ότι οι αριθμοί συνθέτουν
μια ατελείωτη ακολουθία.



Το άπειρο θα πρέπει να είναι
το σημείο στο οποίο
θα έφταναν οι αριθμοί
αν συνεχίζαμε το μέτρημα
για πάντα;

Αυτό όμως δε γίνεται ποτέ
και έτσι το άπειρο
παραμένει ένας
άπιαστος αριθμός.

Μερικά στοιχεία για το άπειρο

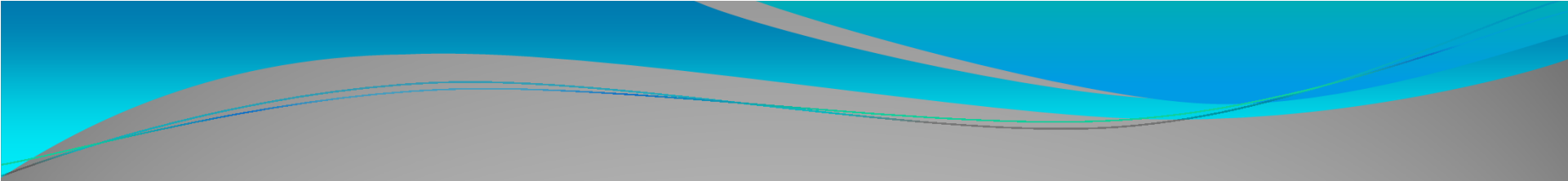
Το σύμβολο του απείρου ∞ , χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά το 1655 από το Μαθηματικό John Wallis. Ουσιαστικά πρόκειται για παραλλαγή του ρωμαϊκού συμβόλου (∞) που χρησιμοποιούσαν οι Ρωμαίοι αντί του M, του γράμματος με το οποίο συμβόλιζαν τον (μεγάλο για αυτούς) αριθμό 1000.

Πώς προέκυψε η ιδέα του απείρου;

Τα μονοπάτια που ακολούθησε
ο ανθρώπινος νους
για να συλλάβει την έννοια του απείρου
έχουν μια κοινή αρχή.

Αυτή είναι η ιδιαιτερότητα
της ανθρώπινης συνείδησης
να αναγνωρίζει στον κόσμο μας
σταθερά πρότυπα.

Αυτό οδηγεί στη συμπύεση εμπειριών
σε τύπους και σύμβολα.



Τα Μαθηματικά μας επιτρέπουν
να απομονώνουμε πρότυπα
και να τα παριστάνουμε
με αλληλουχίες συμβόλων ή αριθμών,
οι οποίες δε χρειάζεται απαραίτητα
να τελειώνουν κάπου.

Η ώρα του Ζήνωνα

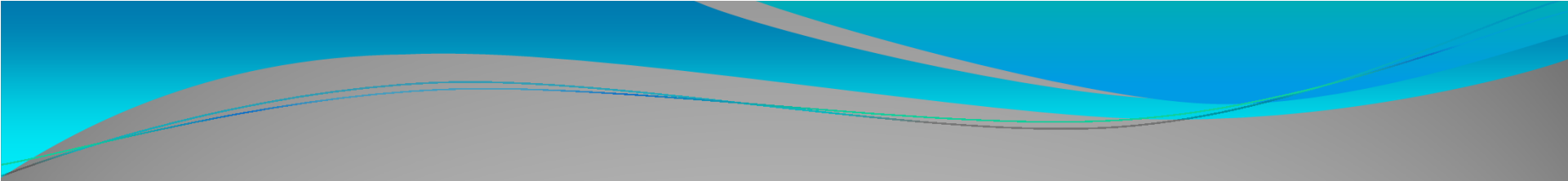
Η έννοια του απείρου βρίσκεται σε μια σειρά από παράδοξα. Τα αρχαιότερα και από τα πιο γνωστά είναι αυτά που διατύπωσε γύρω στα 450π.Χ. ο Ζήνων ο Ελεάτης, ο οποίος υπήρξε μαθητής ενός άλλου φιλοσόφου από την Ελέα, του Παρμενίδη.

Ο Παρμενίδης θεωρούσε ότι το Σύμπαν
αποτελείται από μια μοναδική ουσία
το «εν»,
που είναι άχρονο και αμετάβλητο.
Γι' αυτόν τίποτε δεν κινείται,
αφού αυτό προϋποθέτει
ότι υπάρχουν περισσότερες
από μία καταστάσεις:
Μία προτού συντελεστεί η κίνηση
και μια αφού ολοκληρωθεί.

Ο Ζήνων διατύπωσε
τέσσερις συλλογισμούς που έδειχναν
ότι η κίνηση είναι αδύνατη.
Οι συλλογισμοί αυτοί είναι γνωστοί
ως «**παράδοξα του Ζήωνα**»,
δεν καταρρίφθηκαν ποτέ στην αρχαιότητα
και εξακολουθούν
να προσελκύουν το ενδιαφέρον.
Οι δύο πρώτοι αναφέρονται στο άπειρο.

Το Παράδοξο της Διχοτομίας (1^ο παράδοξο του Ζήνωνα)

Αν ένα ευθύγραμμο τμήμα είναι απείρως διαιρετό τότε η κίνηση είναι αδύνατη, γιατί για να διανύσει ένας δρομέας ένα μοναδιαίο ευθύγραμμο τμήμα, πρέπει πρώτα να πέρασει από το μέσο του, αλλά πριν το κάνει αυτό, πρέπει πρώτα να περάσει από το μέσο του μέσου, και για να το κάνει αυτό πρέπει πρώτα να περάσει από το μέσο του μέσου του μέσου, κ.ο.κ., επ' άπειρον.



Για να κινηθούμε
από το ένα σημείο στο άλλο
πρέπει να κάνουμε
άπειρο αριθμό βημάτων.

*Ο Ζήνων όμως απέρριπτε το άπειρο,
οπότε απέρριψε και την κίνηση.*

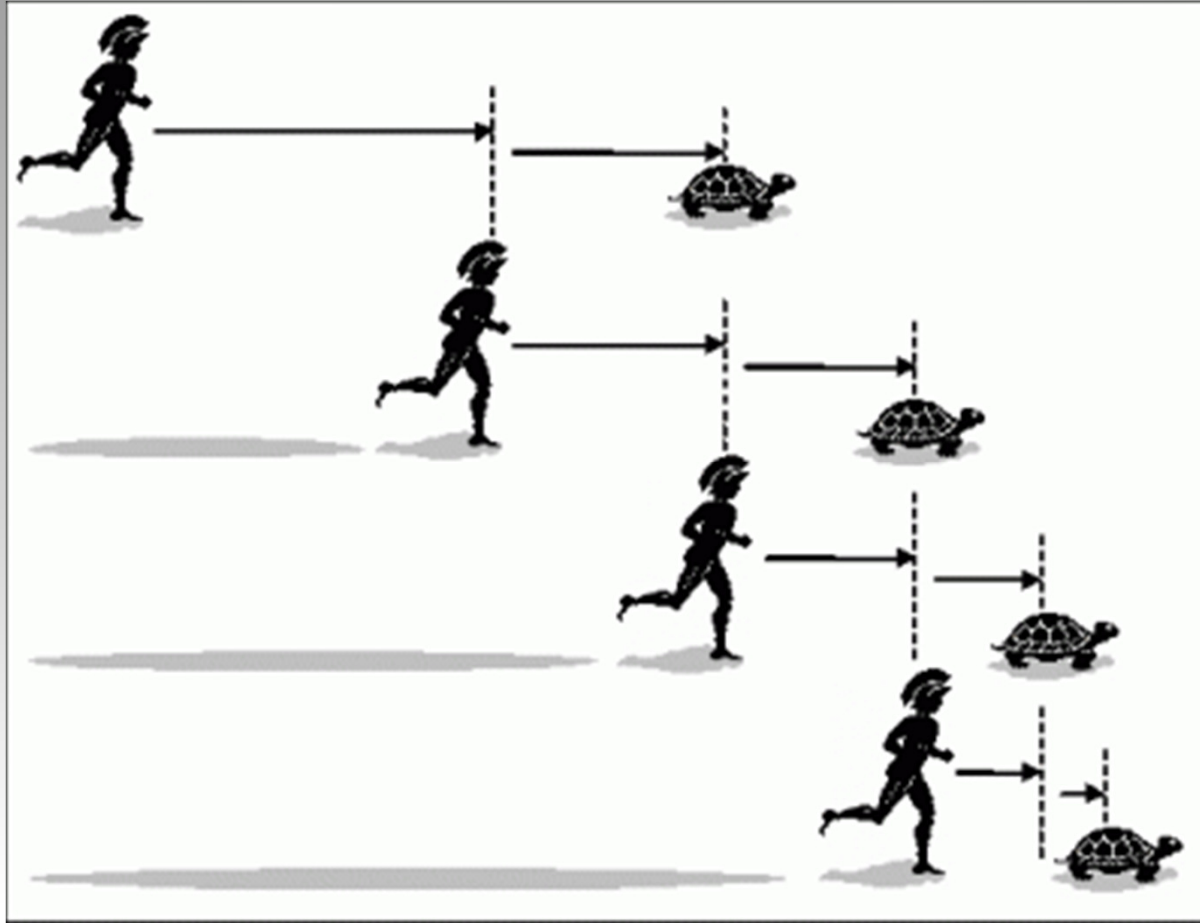
Ο Αχιλλέας και η Χελώνα (2^ο παράδοξο Ζήνωνα)

Αν ο Αχιλλέας αφήσει μια χελώνα να ξεκινήσει από ένα σημείο που βρίσκεται πιο μπροστά απ' αυτόν, τότε

(αν και ξεκινούν την ίδια χρονική στιγμή) ο Αχιλλέας δεν φτάνει ποτέ την χελώνα.

Και αυτό γιατί:

Ο Αχιλλέας πρέπει πρώτα να φτάσει
το μέρος απ' όπου ξεκίνησε η χελώνα.
Κατά το χρόνο αυτό, όμως, η χελώνα θα έχει πάει
σε ένα άλλο σημείο, πιο μπροστά.
Ο Αχιλλέας τότε θα πρέπει να πάει
σ' αυτό το σημείο,
αλλά πάλι η χελώνα θα έχει πάει πιο μπροστά.
Έτσι, ο Αχιλλέας θα πρέπει πάντα
να πηγαίνει πρώτα στο σημείο
από το οποίο η χελώνα μόλις έφυγε,
και κατ' αυτόν τον τρόπο, πάντα
η χελώνα θα προπορεύεται.



Άποψη του Gauss για το 2^ο παράδοξο

Ο Gauss, όταν ήταν ακόμα μαθητής, συζητώντας με τον φίλο του Martin Bartels δίνει μια απάντηση στο περίφημο παράδοξο του Ζήνωνος (του Αχιλλέα και της χελώνας), λέγοντας τα παρακάτω:



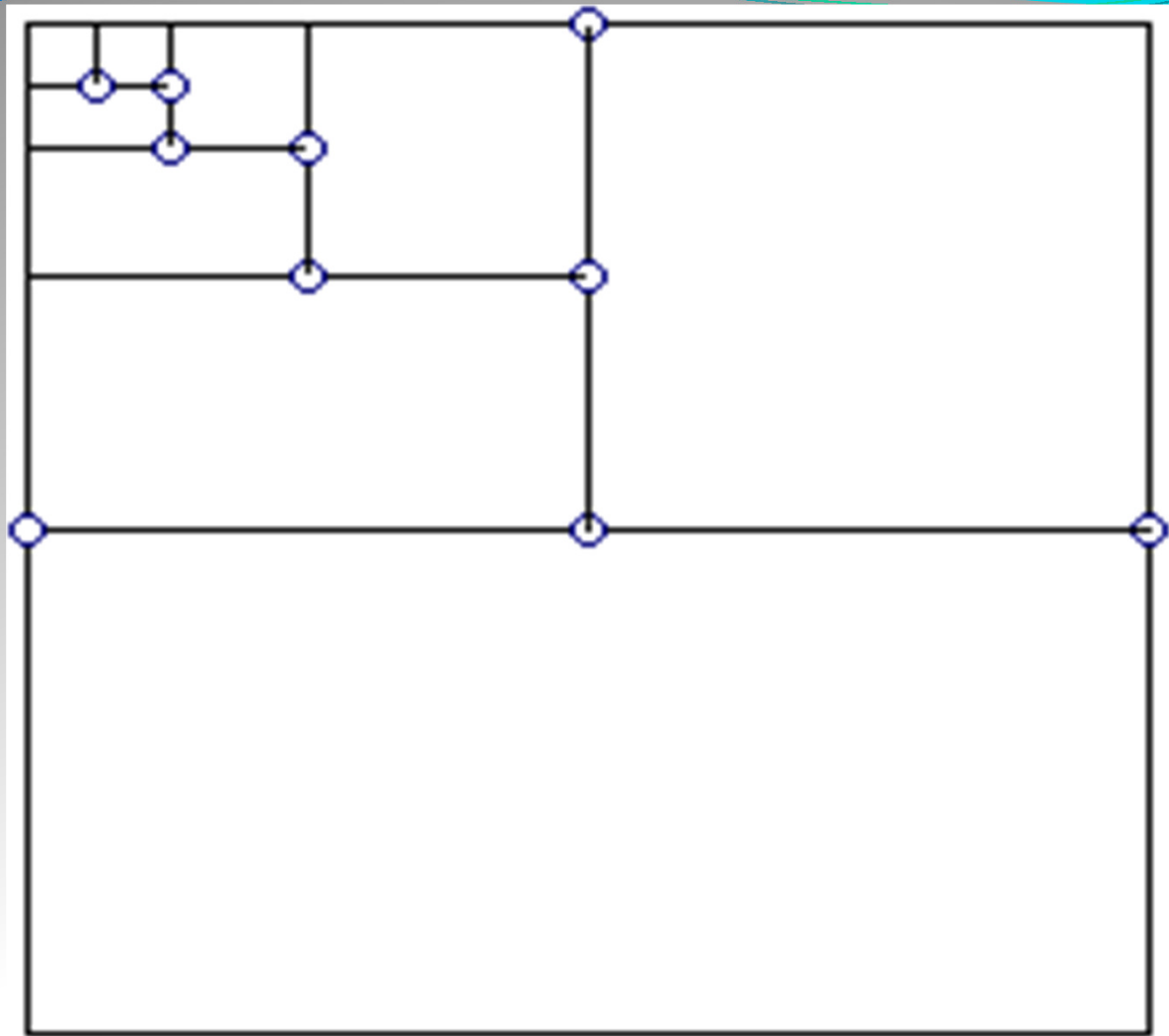
«...φαντάσου Martin, ότι κόβουμε
ένα χαρτί στη μέση.

Κρατάμε το μισό και το άλλο μισό
το κόβουμε πάλι στη μέση.

Βάζουμε στην άκρη πάλι το ένα από τα δύο
μισά και το ξανακόβουμε στη μέση.

Αν είχαμε τη δυνατότητα να συνεχίσουμε
αυτή τη διαδικασία για πάντα, αυτό που
θα είχαμε τελικώς πάνω στο τραπέζι μας,
θα είναι ολόκληρο το αρχικό φύλλο
χαρτιού κομμένο σε άπειρα κομματάκια
που το καθένα από αυτά θα είναι ίσο
με το μισό του κομματιού
από το οποίο προέκυψε.»

Το άθροισμά τους θα είναι ίσο με ένα.



$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^8} + \dots = 1$$

Ο Ζήνων ισχυρίστηκε ότι ο Αχιλλέας
κάλυπτε κάθε φορά το κενό
κατά το ήμισυ.

Το λάθος του ήταν ότι αναφερόταν
σε μια πεπερασμένη μόνο έκταση
της διαδρομής,

εντός πεπερασμένου χρόνου.

Αν υπήρχε άπλετος χρόνος,
η χελώνα θα έτρωγε
τη σκόνη του Αχιλλέα!»