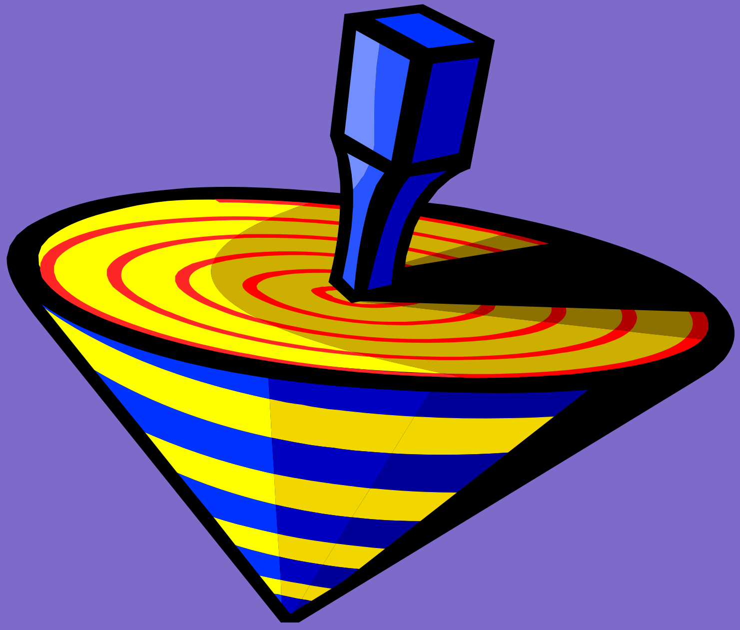
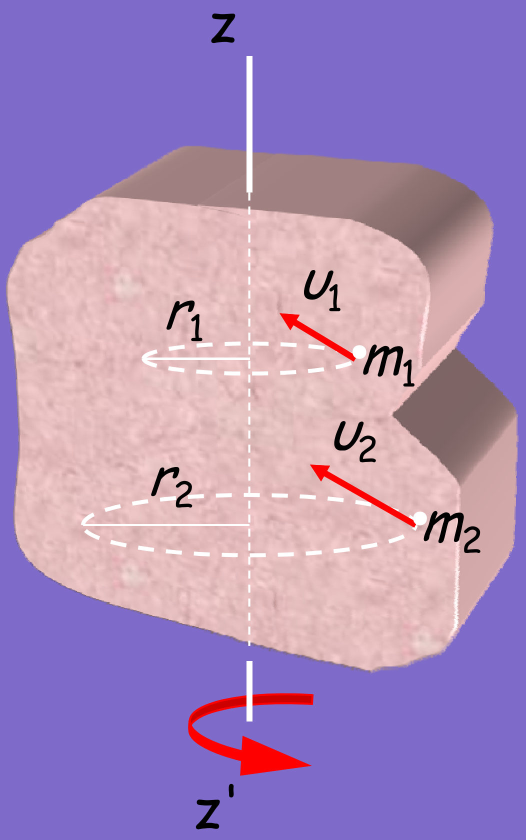


ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ



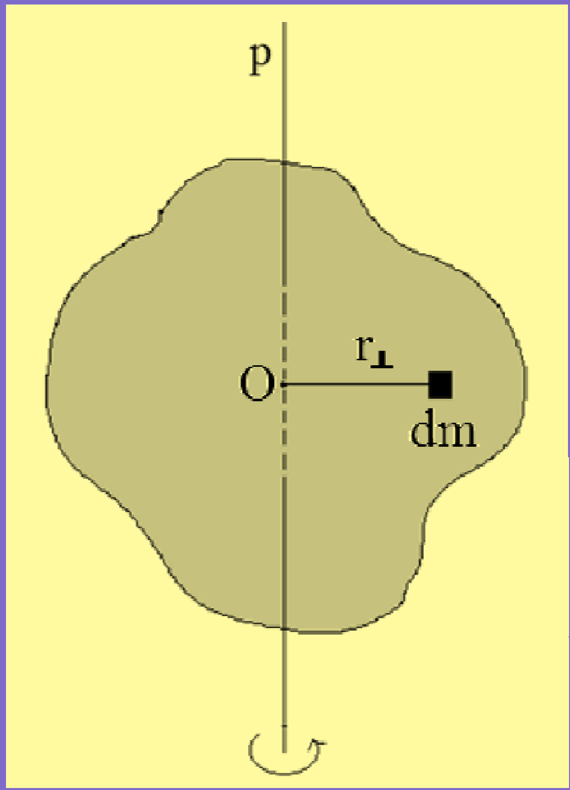
$$I = m_1.r_{\perp,1}^2 + m_2.r_{\perp,2}^2 + \ldots + m_\nu.r_{\perp,\nu}^2$$
$$= \sum_{i=1}^{\nu} m_i r_{\perp,i}^2$$

Εξαρτάται από το «πώς κατανέμεται» η μάζα του στερεού σε σχέση με τον άξονα

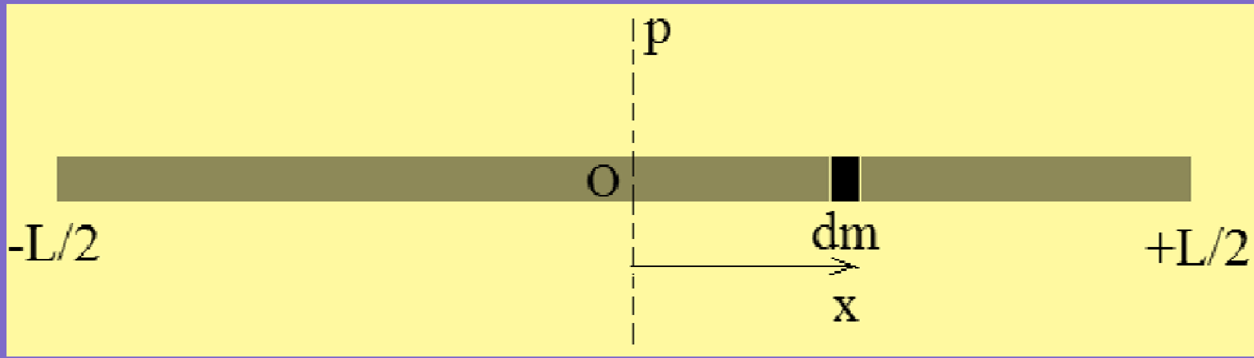
Εκφράζει την αδράνεια (δυσφορία) του σώματος κατά τη μεταβολή της στροφικής κινητικής του κατάστασης περί τον συγκεκριμένο άξονα

Για συνεχή κατανομή μάζας

$$I_p = \int_{(p)} r_\perp^2 \, dm$$



1. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΡΟΠΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΡΑΒΔΟΥ



$$dI_{(p)} = x^2 \cdot dm$$

$$I_{(p)} = \int x^2 \cdot dm$$

Ομογενής ράβδος

$$\frac{M}{L} = \frac{dm}{dx} \Rightarrow dm = \frac{M}{L} \cdot dx$$

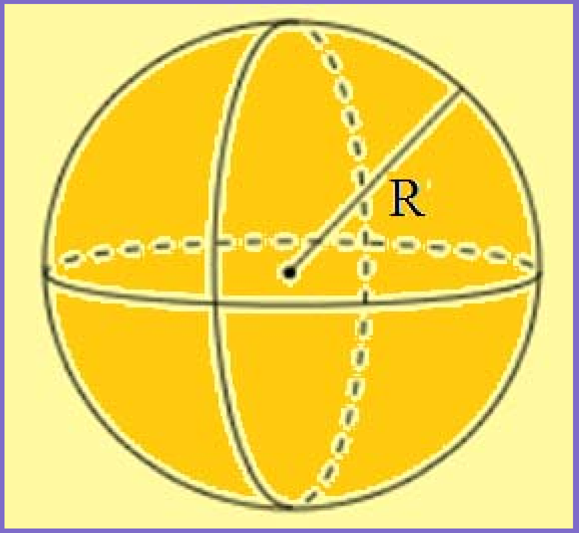
$$I_{(p)} = \int x^2 \cdot \frac{M}{L} \cdot dx = \frac{M}{L} \cdot \int x^2 \cdot dx$$

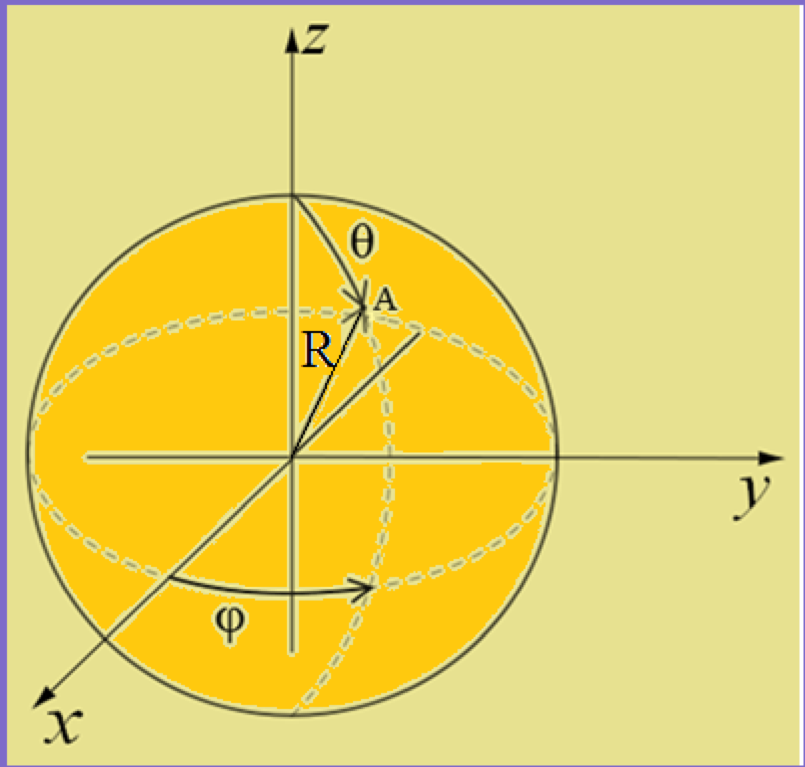
$$I_{(p)} = \frac{M}{L} \cdot \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \cdot dx = \frac{M}{L} \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-L/2}^{L/2} =$$

$$\frac{M}{3 \cdot L}\left(\frac{L^3}{8} + \frac{L^3}{8}\right) = \frac{M}{3 \cdot L} \cdot \frac{2 \cdot L^3}{8}$$

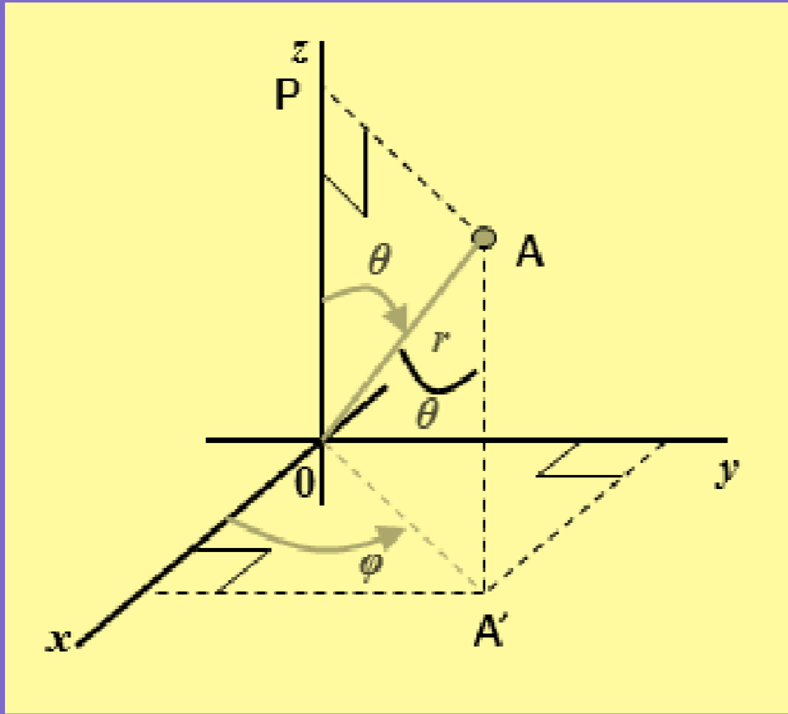
$$I_{(p)} = \frac{1}{12} M L^2$$

2. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΡΟΠΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΣΥΜΠΑΓΟΥΣ ΣΦΑΙΡΑΣ





Θα κάνουμε μετατροπή των Καρτεσιανών συντεταγμένων (x,y,z) σε σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, φ)



$$0 \le r < \infty$$
$$0 \le \varphi < 2\pi$$
$$0 \le \theta \le \pi$$

$$x = (OA')\cos\varphi$$
$$y = (OA')\sin\varphi$$
$$z = (OP) = r\cos\theta$$
$$(OA') = r\sin\theta$$

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\theta$$

$$I = \int r_{\perp}^{2} dm = \rho \int \left(r \sin\theta \right)^{2} dV$$

$$dV = r^{2} \sin\theta \, dr \, d\varphi \, d\theta$$

$$I = \rho \int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{0}^{\pi} \sin^{3}\theta \, d\theta \int_{0}^{R} r^{4} dr =$$

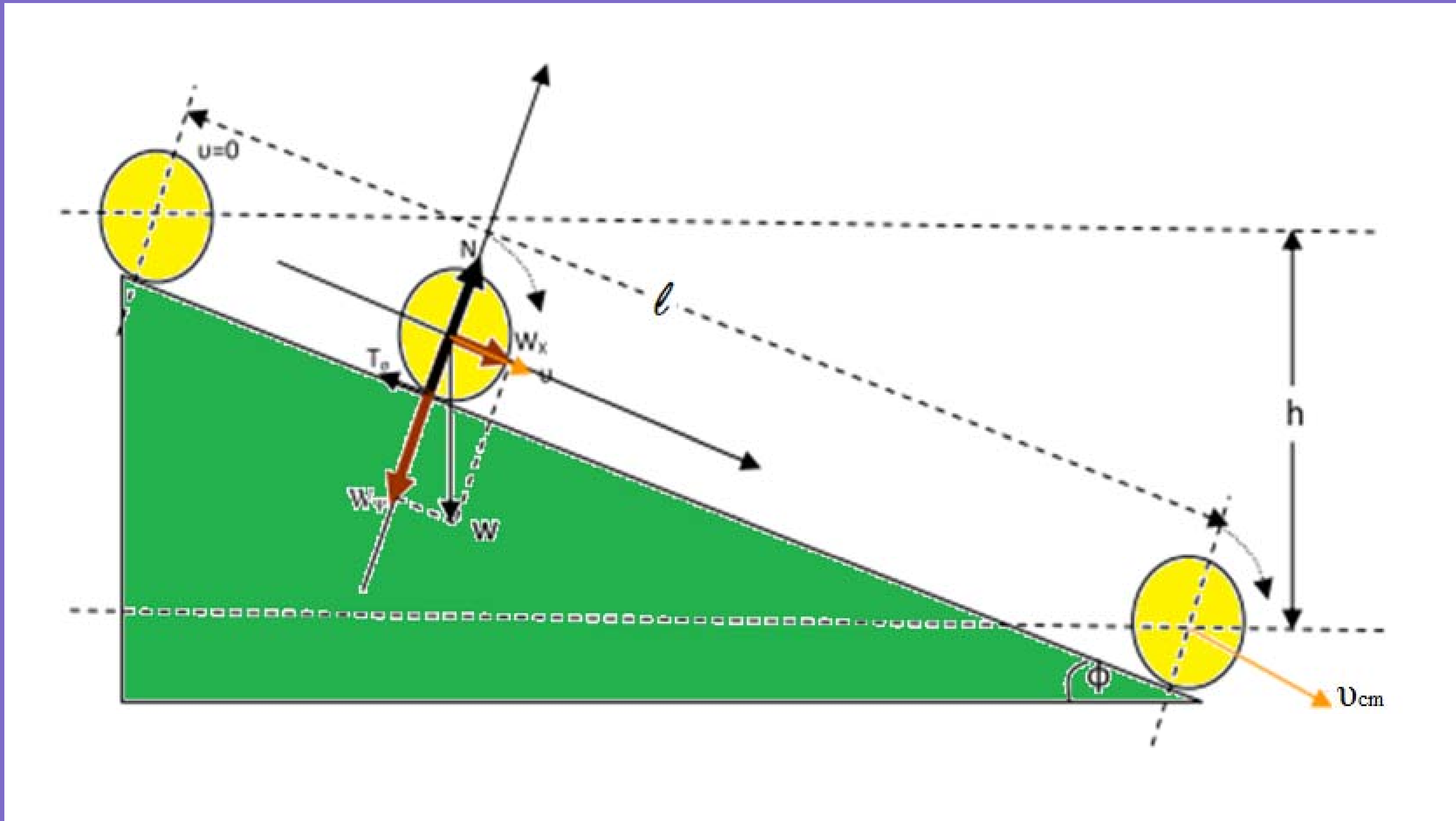
$$\rho (2\pi) \left(\frac{4}{3} \right) \left(\frac{R^{5}}{5} \right) =$$

$$\frac{8 \pi \rho R^{5}}{15}$$

$$M = \rho V = \frac{4\pi\rho R^3}{3}$$

$$I = \frac{2}{5} M R^2$$

Προσδιορισμός ροπής αδράνειας συμπαγούς σφαίρας με φωτοπύλες και ηλεκτρονικό χρονόμετρο


υ=0
N
Wx
Tσ
υ
ℓ
h
Wy
W
φ
υcm

Συνθήκη κύλισης χωρίς ολίσθηση

$$\Sigma F = m\alpha_{cm} \Rightarrow mg\eta\mu\varphi - T_{\sigma} = m\alpha_{cm}$$

$$\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma} \Rightarrow T_{\sigma} = I\frac{\alpha_{cm}}{r^2} \quad (\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma}\cdot r)$$

$$\alpha_{cm} = \frac{mg\eta\mu\varphi}{m + \dfrac{I}{r^2}}$$

$\Rightarrow$

$$T_{\sigma} = \frac{mg\eta\mu\varphi}{1 + \dfrac{mr^2}{I}}$$

Για να κυλίεται το σώμα χωρίς να ολισθαίνει πρέπει :

$$T_\sigma \leq T_{o\rho} \Rightarrow T_\sigma \leq \mu_s m g \sigma \upsilon \nu \varphi$$

$$\Downarrow$$

$$\varepsilon\varphi\varphi \leq \mu_s \left(1 + \frac{m r^2}{I}\right)$$

Θεωρητική ανάλυση

$$mgh = \tfrac{1}{2} m\upsilon_{cm}^2 + \tfrac{1}{2} I\omega_{\tau\varepsilon\lambda}^2$$

$$\upsilon_{cm} = \omega \cdot r, \qquad \alpha_{cm} = \alpha_{\gamma} \cdot r$$

$$I = mD^2 \quad (D = \text{ακτίνα αδράνειας})$$

$$gh = \frac{\upsilon_{cm}^2}{2}\left(1 + \frac{D^2}{r^2}\right)$$

$$\ell = \frac{1}{2}\alpha_{cm} t^2$$

$$\upsilon_{cm} = \alpha_{cm} t$$

$$\upsilon_{cm}^2 = 2\ell\alpha_{cm}$$

$$\alpha_{cm} = \frac{g}{\ell\left(1+\frac{D^2}{r^2}\right)} h$$

$$k = \frac{g}{\ell\left(1 + \frac{D^2}{r^2}\right)}$$

$$\alpha_{cm} = k \cdot h$$

Υπολογισμός α_{cm} για διάφορες τιμές του ύψους h

1. Με μέτρηση του χρόνου καθόδου της σφαίρας στο κεκλιμένο επίπεδο,

$$\alpha_{cm} = \frac{2\ell}{t^2} \quad (1^{\eta} \text{ μέθοδος με μία φωτοπύλη})$$

2. Με μέτρηση της υ_{cm} στο κατώτερο σημείο του κεκλιμένου επίπεδου από τη σχέση

$$\upsilon_{cm} = \frac{2R}{\delta t}$$

$$\upsilon_{cm}^2 = 2\ell\alpha_{cm}$$

$$\alpha_{cm} = \frac{\upsilon_{cm}^2}{2\ell}$$

(2^η μέθοδος με μία φωτοπύλη)

3. Με μέτρηση των x_1, x_2, Δt

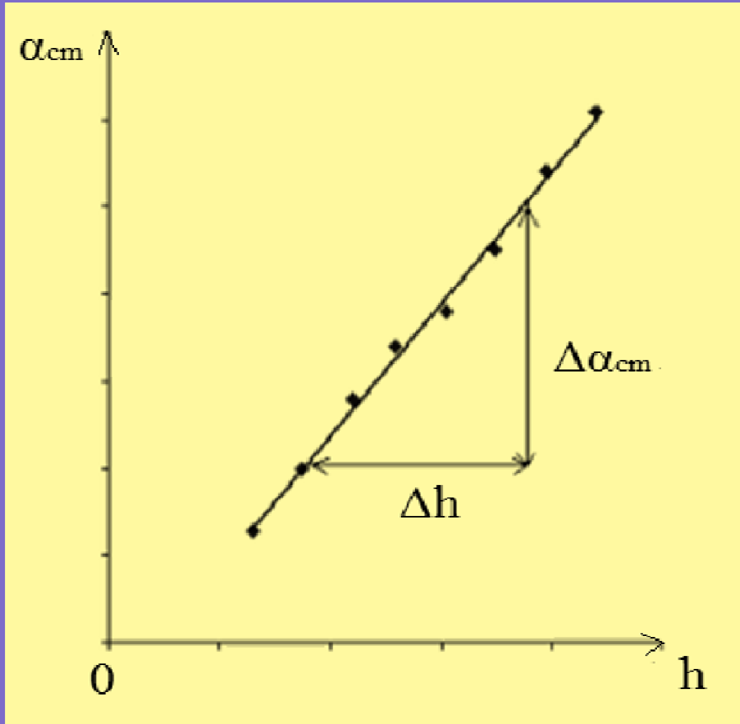
$$\left.\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}\alpha_{cm} t_1^2 \\ x_2 = \dfrac{1}{2}\alpha_{cm} t_2^2 \end{cases}\right\} \Rightarrow \Delta t = t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{2}{\alpha_{cm}}}\left(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}\right)$$

$$\alpha_{cm} = \frac{2\left(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}\right)^2}{\Delta t^2}$$ (Μέθοδος με δύο φωτοπύλες)

Το εκάστοτε ύψος h
υπολογίζεται μέσω
της γωνίας κλίσης φ
του κεκλιμένου επιπέδου

$$h = \ell . \eta\mu\varphi$$

Κατασκευή του διαγράμματος $\alpha_{cm} = f(h)$



Από την κλίση της ευθείας υπολογίζουμε το k, συνεπώς έχουμε :

$$k = \frac{g}{\ell(1+\frac{D^2}{r^2})} \quad \text{ή} \quad D^2 = r^2(\frac{g}{k\ell}-1)$$

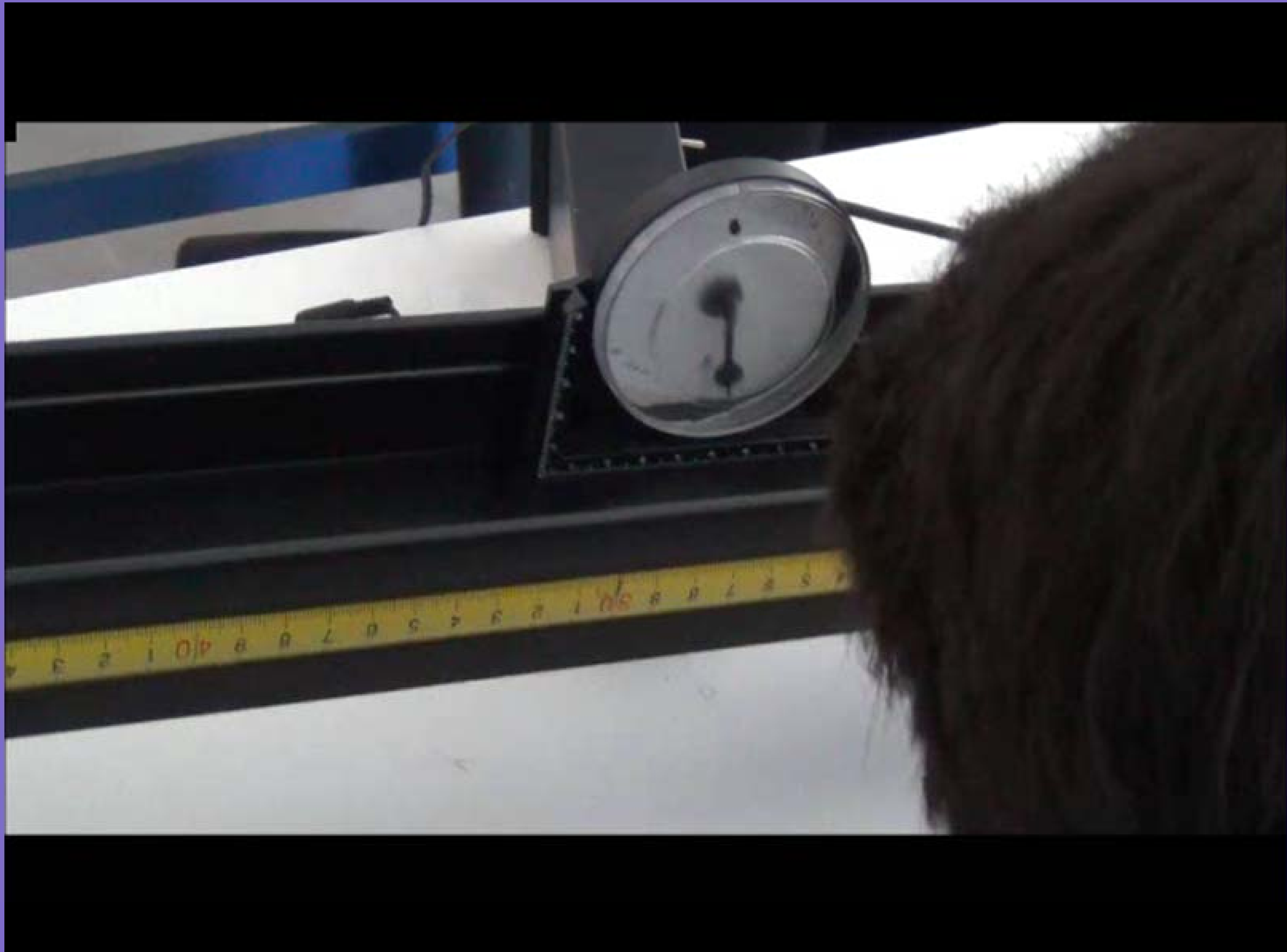
Στη συνέχεια μπορούμε να υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειας της σφαίρας από τη σχέση :

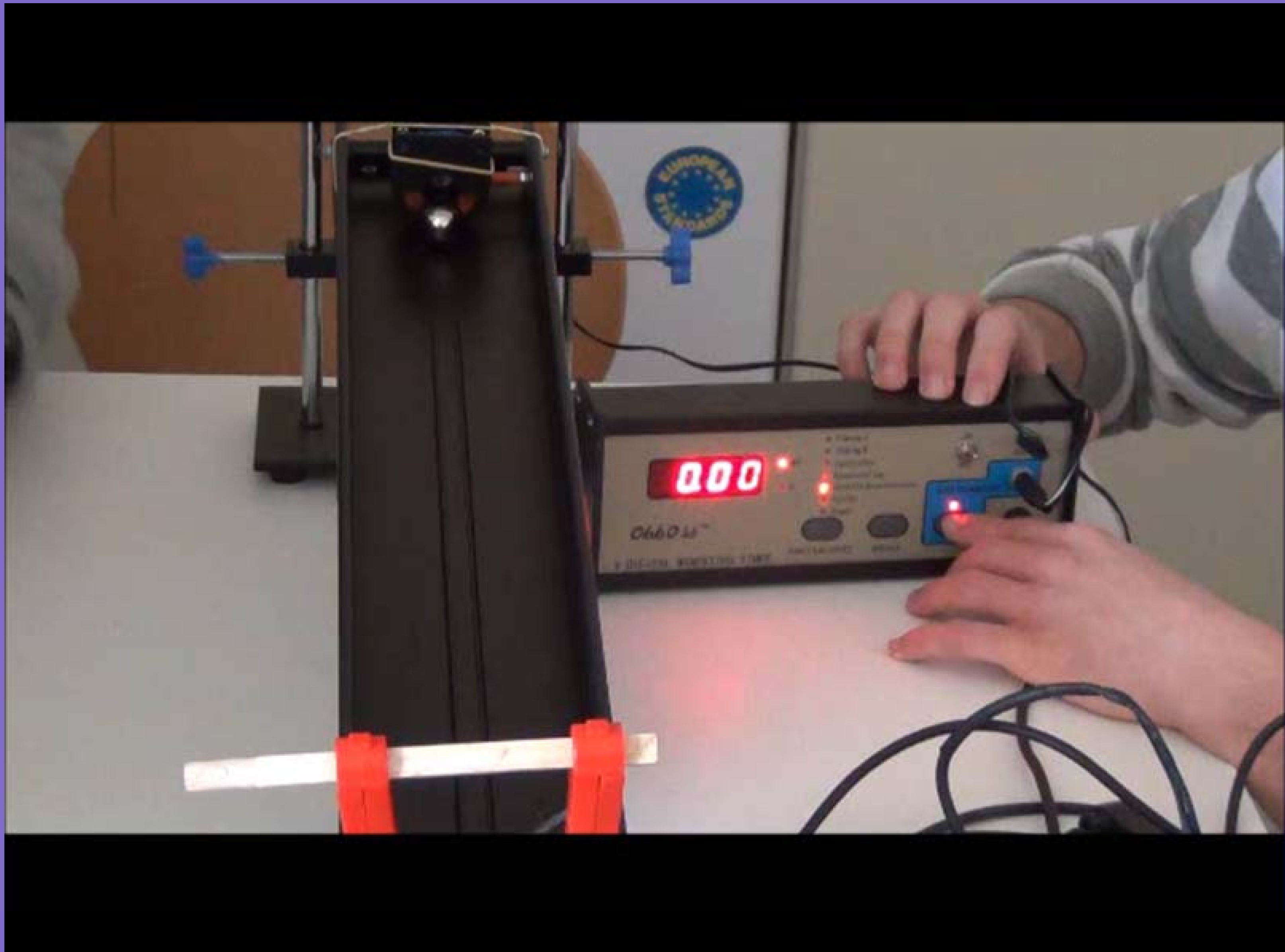
$$I = m r^2 \left(\frac{g}{k \ell} - 1 \right)$$

Πειραματική διαδικασία

ΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΑ ΥΛΙΚΑ ΚΑΙ ΟΡΓΑΝΑ

- Κεκλιμένο επίπεδο
- Σφαίρα από χάλυβα
- Μετροταινία
- Φωτοπύλη συνδεδεμένη με χρονομετρητή που βρίσκεται στην θέση “Gravity acceleration”
- Παχύμετρο
- Ηλεκτρονικός ζυγός
- Γωνιόμετρο




EUROPEAN
STANDARDS
0.00

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

1. Η μάζα της σφαίρας βρέθηκε

   $m = 28\ g$

2. Η ακτίνα της σφαίρας βρέθηκε

   $r = 0.7cm$

3. Η σφαίρα διανύει στο πλάγιο επίπεδο απόσταση

   $\ell = 54cm$

4. Για το χρόνο κίνησης της σφαίρας βρέθηκαν οι εξής τιμές

   α) Όταν η κατακόρυφη μετατόπισή της στο πλάγιο επίπεδο είναι

   $h_1 = 6.9cm$

	1η μέτρηση	2η μέτρηση	3η μέτρηση	4η μέτρηση	5η μέτρηση
Χρόνος σε ms	1090	1091	1091	1091	1092

Η μέση τιμή του χρόνου κίνησης της σφαίρας για το ύψος h_1 είναι

$\overline{t_1} = 1091\ ms$

β) Όταν η κατακόρυφη μετατόπισή της στο πλάγιο επίπεδο είναι
$h_2 = 8.4\text{cm}$

	1η μέτρηση	2η μέτρηση	3η μέτρηση	4η μέτρηση	5η μέτρηση
Χρόνος σε ms	988	989	989	990	989

Η μέση τιμή του χρόνου κίνησης της σφαίρας για το ύψος h_1 είναι

$\overline{t}_2 = 989\ \text{ms}$

γ) Όταν η κατακόρυφη μετατόπισή της στο πλάγιο επίπεδο είναι
$h_3 = 10.3\text{cm}$

	1η μέτρηση	2η μέτρηση	3η μέτρηση	4η μέτρηση	5η μέτρηση
Χρόνος σε ms	900	902	898	899	901

Η μέση τιμή του χρόνου κίνησης της σφαίρας για το ύψος h_1 είναι

$\overline{t}_3 = 900\ \text{ms}$

δ) Όταν η κατακόρυφη μετατόπισή της στο πλάγιο επίπεδο είναι

$h_4 = 13.9\text{cm}$

	1η μέτρηση	2η μέτρηση	3η μέτρηση	4η μέτρηση	5η μέτρηση
Χρόνος σε ms	782	780	781	783	784

Η μέση τιμή του χρόνου κίνησης της σφαίρας για το ύψος h_1 είναι

$\overline{t}_4 = 782\text{ms}$

ε) Όταν η κατακόρυφη μετατόπισή της στο πλάγιο επίπεδο είναι

$h_5 = 16.7\text{cm}$

	1η μέτρηση	2η μέτρηση	3η μέτρηση	4η μέτρηση	5η μέτρηση
Χρόνος σε ms	709	708	707	709	707

Η μέση τιμή του χρόνου κίνησης της σφαίρας για το ύψος h_1 είναι

$\overline{t}_5 = 708\text{ms}$

5. $\ell = \dfrac{1}{2}\alpha\,\overline{t}^{\,2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \dfrac{2\ell}{\overline{t}^{\,2}}$

οπότε συμπληρώνουμε τον παρακάτω πίνακα του Function_Probe.

Πίνακας

Αρχείο Επεξεργασία Αποστολή Παράθυρα Πίνακας

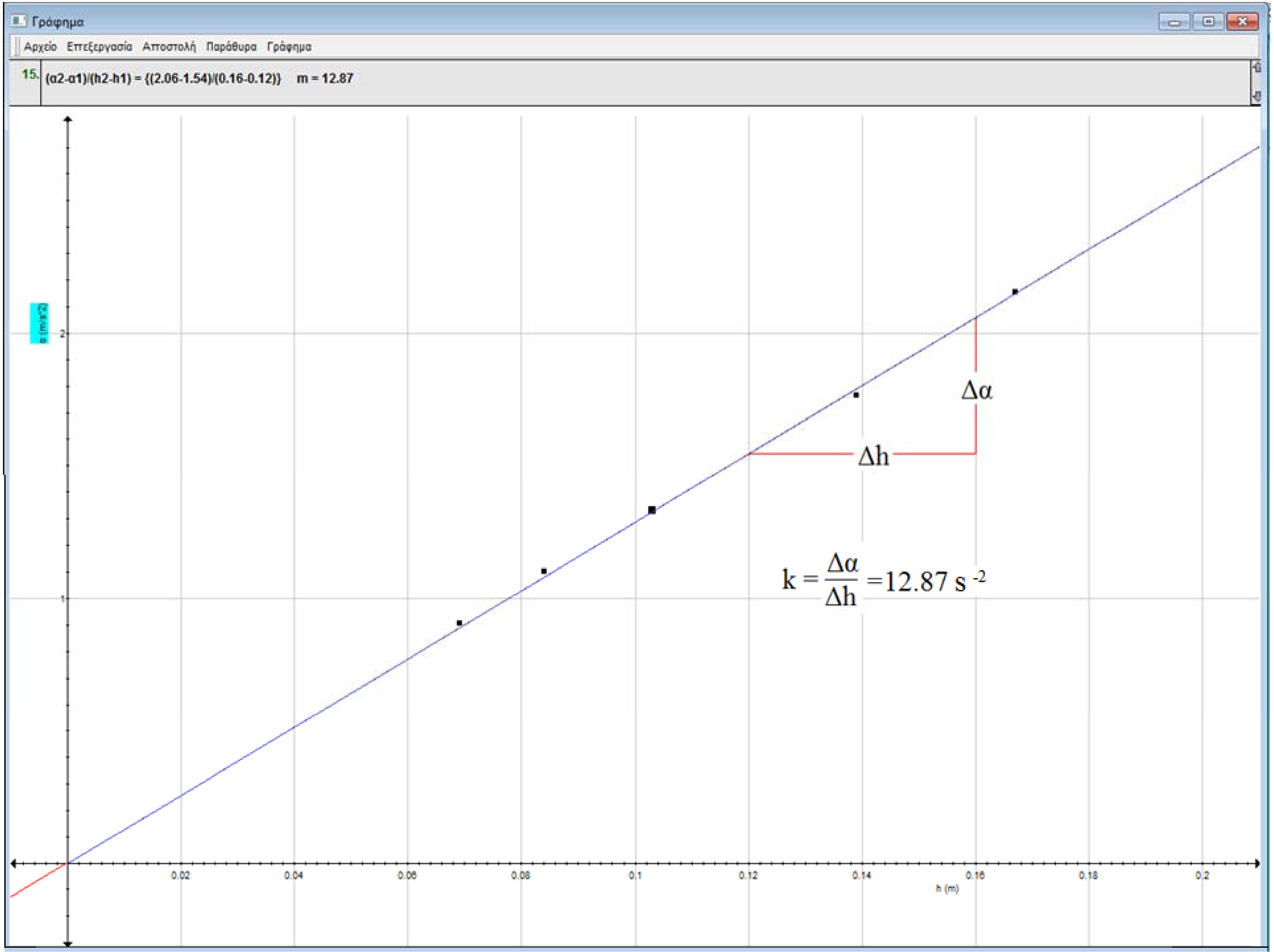
φ	t	h	α		
μοίρες	ms	m	m/s^2		
7	1091	0.069	0.907		
9	989	0.084	1.104		
11	900	0.103	1.333		
15	782	0.139	1.766		
18	708	0.167	2.155		

6. Κατασκευή του διαγράμματος

$$\alpha = f(h)$$

και εύρεση της κλίσης k

με το λογισμικό Function_Probe.


Γράφημα
Αρχείο Επεξεργασία Αποστολή Παράθυρα Γράφημα
15. (α2-α1)/(h2-h1) = ((2.06-1.54)/(0.16-0.12)) m = 12.87
Δα
Δh
k = Δα/Δh = 12.87 s -2
0.02
0.04
0.06
0.08
0.1
0.12
0.14
0.16
0.18
0.2
h (m)
1
2

7. $$I_{\pi\varepsilon\iota\rho} = mr^2\left(\frac{g}{k\ell} - 1\right)$$

$$I_{\pi\varepsilon\iota\rho} = 5.65 \times 10^{-7}\,\mathrm{kg.m^2}$$

$$\mathbf{8.}\quad I_{\theta\varepsilon\omega\rho} = \frac{2}{5}mr^2$$

$$I_{\theta\varepsilon\omega\rho} = 5.49 \times 10^{-7}\,kg.m^2$$

9. Απόκλιση πειραματικής από θεωρητική τιμή της ροπής αδράνειας της σφαίρας

$$\varepsilon = \frac{\left|I_{\theta\varepsilon\omega\rho} - I_{\pi\varepsilon\iota\rho}\right|}{I_{\theta\varepsilon\omega\rho}} \times 100\% \approx 2.9\%$$

Τ Ε Λ Ο Σ