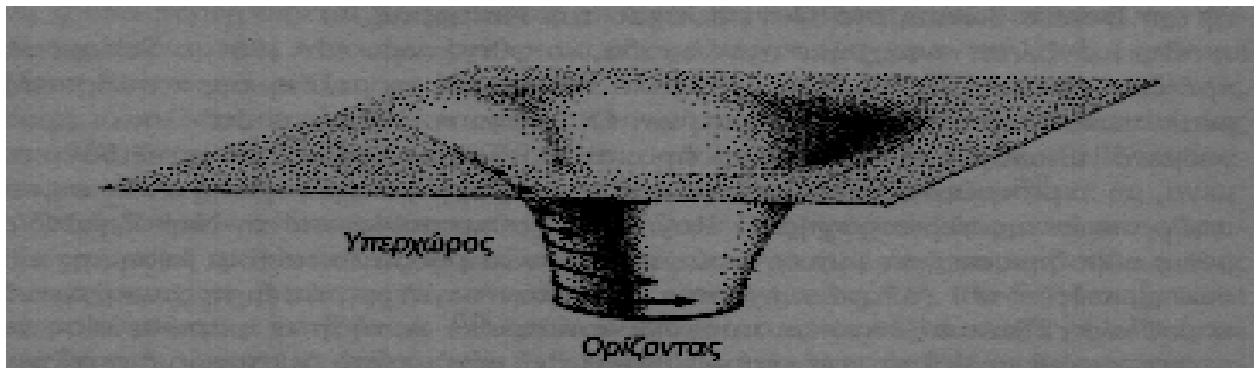




**ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΕΝΙΚΗ
ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ
ΚΑΙ ΤΗΝ ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΑ**



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ – ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
Στα πλαίσια του Μεταπτυχιακού προγράμματος σπουδών.
Πάτρα 02-07-2003

ΙΩΑΝΝΗΣ Ε. ΣΦΑΕΛΟΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

- 0.1. Βιβλιογραφία
- 0.2. Πρόλογος
- 0.3. Εισαγωγή

Κεφάλαιο 1

- 1.1. Αρχές της Γενικής θεωρίας της Σχετικότητας
- 1.2. Δομή του χωροχρόνου
- 1.3. Τανυστές
- 1.4. Η έννοια της γεωδαισιακής
- 1.5. Τανυστής καμπυλότητας Riemann
- 1.6. Τανυστής καμπυλότητας Ricci - Τανυστής Einstein
- 1.7. Τανυστής ενέργειας - ορμής
- 1.8. Κονιορτός - Ιδανικό ρευστό

Κεφάλαιο 2

- 2.1. Βασικές έννοιες
- 2.2. Πεδιακές εξισώσεις Einstein
- 2.3. Εξισώσεις Einstein για ασθενή βαρυτικά πεδία και το κενό.
Κύματα βαρύτητας
- 2.4. Μετασχηματισμοί βαθμίδας
- 2.5. Νευτώνειο όριο της θεωρίας του Einstein

Κεφάλαιο 3

- 3.1. Η λύση Schwarzschild
- 3.2. Ακτίνα Schwarzschild - Μαύρες οπές
- 3.3. Βαρυτική φασματική μετατόπιση

Κεφάλαιο 4

- 4.1. Η Κοσμολογική αρχή
- 4.2. Η αρχή του Weyl

- 4.3. Παρατηρήσεις Κοσμολογικής σπουδαιότητας
- 4.4. Μετρική Robertson - Walker
- 4.5. Δυναμικές εξισώσεις Κοσμολογίας
- 4.6. Συνέπειες των Κοσμολογικών Εξισώσεων
- 4.7. Εποχές του Σύμπαντος
- 4.8. Ο ρόλος της κοσμολογικής σταθεράς
- 4.9. Μοντέλα επίπεδων χώρων
- 4.10. Μοντέλα με μηδενική κοσμολογική σταθερά
- 4.11. Ταξινόμηση των μοντέλων Friedmann
- 4.12. Το πρόβλημα της χρονικής κλίμακας
- 4.13. Το πρόβλημα της ελλείπουσας μάζας
- 4.14. Ανοικτά προβλήματα
- 4.15. Το πρόβλημα του ορίζοντα
- 4.16. Το πληθωριστικό σενάριο
- 4.17. Η ανθρωπική αρχή

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. ΓΕΝΙΚΗ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑ (Bernard F. Schutz)
2. ΦΥΣΙΚΗ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΣΩΜΑΤΙΩΝ
(Παν. Τσιλιμίγκρας)
3. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ
(Νικόλαος Κ. Σπύρου)
4. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗ ΣΩΜΑΤΙΑ ΚΑΙ ΤΗΝ ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΑ
(Ι.Δ. Βέργαδος, Η. Τριανταφυλλόπουλος)
5. ΣΩΜΑΤΙΔΙΑΚΗ ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΑ
(Κ.Ε. Βαγιονάκης)
6. Παραδόσεις Ι. Μπάκα (καθηγητή Παν/μίου Πατρών-Τμ. Φυσικής) στο μάθημα " Θεωρία πεδίων "
7. ΤΟ ΧΡΟΝΙΚΟ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ (St. Hawking)
8. ΤΑ ΜΥΣΤΗΡΙΑ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ (John Gribbin)
9. ΜΑΥΡΕΣ ΤΡΥΠΕΣ ΚΑΙ ΣΤΡΕΒΛΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ
(Kip Thorne)
10. ΕΞΙ ΟΧΙ ΤΟΣΟ ΕΥΚΟΛΑ ΚΟΜΜΑΤΙΑ
(Richard P. Feynman)
11. LECTURE NOTES ON GENERAL RELATIVITY
(Sean M. Carroll)
12. INTRODUCING EINSTEIN`S RELATIVITY
(Ray D`Inverno)
13. COSMOLOGY "The Origin and Evolution of Cosmic Structure"
(P. Coles and F. Lucchin)
14. BASIC RELATIVITY (Richard A. Mould)
15. GRAVITATION AND COSMOLOGY (Steven Weinberg)
16. A SHORT COURSE IN GENERAL RELATIVITY
(J. Foster - J.D. Nightingale)
17. GENERAL RELATIVITY AND COSMOLOGY
(Tai L. Chow)

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Σ`αυτή την εργασία, καταγράφονται μερικές από τις προσπάθειές μου, για την όσο το δυνατόν καλύτερη κατανόηση της Γενικής θεωρίας της Σχετικότητας. Το ξεκίνημα γίνεται, με μια εκλαϊκευμένη αναφορά πάνω στα βασικά θέματα της Γ.Θ.Σ. και ειδικότερα στον καμπυλομένο χωροχρόνο. Ακολούθως, αναφέρονται οι βασικοί τανυστές, που χρησιμοποιούνται στις πεδιακές εξισώσεις του Einstein. Στο επόμενο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι εξισώσεις του Einstein, ακολουθεί το κεφάλαιο με την λύση Schwarzschild και τις μαύρες οπές και ολοκληρώνεται η εργασία με την μετρική Robertson-Walker και τα διάφορα κοσμολογικά μοντέλα.

Η εργασία αυτή είναι προϊόν της παρακολούθησης, του προγράμματος Μεταπτυχιακών σπουδών του τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών. Έλαβε χώρα κατά το έτος 2003, στα πλαίσια του μαθήματος "Ειδικά θέματα Κοσμολογίας" με την επίβλεψη και καθοδήγηση του κ. Β. Γερογιάννη, τον οποίο και ευχαριστώ θερμά.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

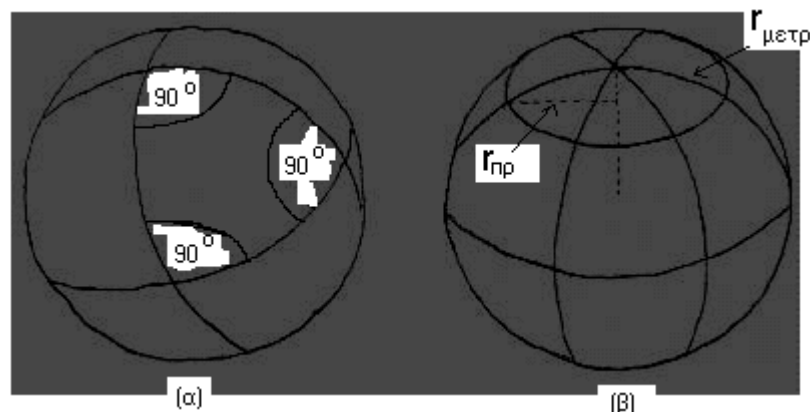
Ο 20ος αιώνας άρχισε δυναμικά για την Φυσική. Η μορφή που καθορίζει την πορεία της εξέλιξης της σύγχρονης φυσικής είναι αυτή του Einstein. Αρχικά εισήγαγε το 1905 την Ειδική θεωρία της Σχετικότητας, στην οποία προσπάθησε να ενοποιήσει την Μηχανική και την Ηλεκτρομαγνητική θεωρία. Η θεωρία της ειδικής σχετικότητας αναφέρεται σε τομείς που δεν υπάρχει πεδίο βαρύτητας. Σ' αυτή την θεωρία καταργείται η έννοια του χώρου και του χρόνου της κλασσικής φυσικής. Ο χώρος και ο χρόνος ενοποιούνται στην έννοια του "χωροχρόνου", που έχει τέσσερις διαστάσεις.

Το 1915 ο Einstein δημοσιεύει την Γενική θεωρία της Σχετικότητας, στην οποία συμπεριέλαβε την βαρύτητα. Σύμφωνα με αυτήν την θεωρία, η βαρύτητα επιδρά στο χωροχρόνο και τον κάνει κυρτό. Πρόκειται για μια διατύπωση που δεν συλλαμβάνεται εύκολα από την ανθρώπινη φαντασία. Ο John Archibald Wheeler συνοψίζει με τα παρακάτω την θεωρία του Einstein : " Ο χώρος επιδρά πάνω στην ύλη λέγοντάς της πώς να κινηθεί. Στην συνέχεια, η ύλη επιδρά στον χώρο, λέγοντάς του πώς να καμπυλωθεί ".

Ας κάνουμε όμως μια προσπάθεια, για να αντιληφθούμε την καμπύλωση του χωροχρόνου, με το παράδειγμα των δύο εντόμων : Ας συγκρίνουμε τη γεωμετρική συλλογιστική ενός εντόμου που ζει πάνω σε μια επίπεδη επιφάνεια, μ' εκείνη ενός άλλου παρόμοιου εντόμου που ζει στην επιφάνεια μιας σφαίρας. Το έντομο που ζει πάνω στην επίπεδη επιφάνεια θα διαπιστώσει πως το άθροισμα των γωνιών οποιουδήποτε τριγώνου είναι πάντα 180° . Αντίθετα, το έντομο που ζει πάνω στη σφαίρα, θα ανακαλύψει πως το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι πάντα μεγαλύτερο από 180° και σε ακραίες περιπτώσεις είναι ίσο με 270° . Το πρώτο επίσης έντομο θα διαπιστώσει, ότι το μήκος της περιφέρειας κύκλου είναι ίσο με $2\pi r$, όπου r η ακτίνα του κύκλου. Αντίθετα, το έντομο που ζει πάνω στη σφαίρα θα διαπιστώσει ότι η περιφέρεια κύκλου έχει πάντα μήκος μικρότερο από $2\pi r$.

Οι γεωμετρικές μελέτες των 2 εντόμων θα τα οδηγήσουν σε εντελώς διαφορετικούς δρόμους. Το πρώτο έντομο θα καταλήξει στα αξιώματα και τους νόμους της Ευκλείδειας γεωμετρίας, ενώ το δεύτερο θα καταλήξει στις αρχές της σφαιρικής γεωμετρίας. Οι διαφορές τους σε μικρά μεγέθη θα είναι ασήμαντες, αλλά θα μεγαλώνουν συνεχώς, όσο τα έντομα θ' ασχολούνται συνεχώς με όλο και μεγαλύτερα σχήματα. Ας υποθέσουμε τώρα ότι το έντομο που ζει πάνω στην σφαίρα μπορεί να σχεδιάσει ένα κύκλο σαν εκείνον της εικ. 1 (β). Αν έχει εντρυφήσει στην Ευκλείδεια γεωμετρία, αποφασίζει να υπολογίσει την προβλεπόμενη ακτίνα $r_{\pi\rho}$, διαιρώντας το μήκος της περιφέρειας C με το 2π και καταλήγει στο αποτέλεσμα :

$$r_{\pi\rho} = C/2\pi$$



Εικ. 1

Επομένως, βρίσκει ότι η ακτίνα που μέτρησε $r_{\text{μετρ}}$ ήταν μεγαλύτερη από την προβλεπόμενη $r_{\pi\rho}$. Αν το ζήτημα του κινήσει το ενδιαφέρον και θελήσει να εμβαθύνει περισσότερο, πιθανόν να ορίσει ως "υπεροχή ακτίνας" την διαφορά των δύο τιμών και να γράψει :

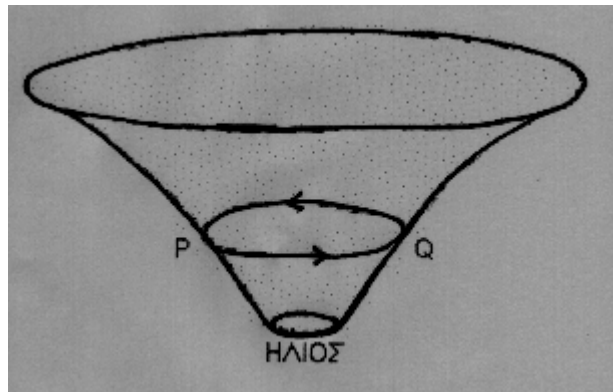
$$r_{\text{μετρ}} - r_{\pi\rho} = r_{\text{υπερ}}$$

ώστε να μελετήσει στην συνέχεια πως εξαρτάται η εν λόγω διαφορά από το μέγεθος του κύκλου.

Η βαρυτική θεωρία του Einstein

Σύμφωνα με τη θεωρία της γενικής σχετικότητας, η βαρύτητα δεν αντιμετωπίζεται σαν δύναμη όπως οι άλλες, αλλά είναι συνέπεια του γεγονότος της καμπυλότητας του χωροχρόνου από την παρουσία μέσα του ύλης και ενέργειας. Μικρά σώματα σαν τους πλανήτες κινούνται σε τροχιές γύρω από τον ήλιο όχι από την έλξη του ήλιου, αλλά επειδή απλούστατα ακολουθούν τις πιο "ευθείες" διαδρομές στον καμπυλωμένο χωροχρόνο, που ονομάζονται γεωδαισιακές. Μια ευθεία γραμμή μπορεί να οριστεί σαν η συντομότερη απόσταση ανάμεσα σε 2 σημεία στον Ευκλείδειο χώρο. Μια γεωδαισιακή καμπύλη είναι η διαδρομή με το μικρότερο ή το μεγαλύτερο μήκος ανάμεσα σε δύο γειτονικά σημεία.

Δύο εικόνες ίσως μας βοηθήσουν: στην εικ. 2 φαίνεται πάνω στη σελίδα μας ο τρισδιάστατος χώρος γύρω από τον ήλιο, καμπυλωμένος από τη βαρύτητα (με την καμπυλότητα υπερβολικά τονισμένη). Εξαιτίας της καμπυλότητας, ένας πλανήτης στο P που έχει την τάση να κινηθεί προς τα δεξιά πάνω σε ευθεία γραμμή, αντί να κινηθεί έτσι, θ' ακολουθήσει κάποια καμπύλη τροχιά PQ. Έτσι, μπορούμε ίσως ν' αντιληφθούμε γιατί ένας πλανήτης διαγράφει μια τροχιά γύρω από τον ήλιο. Η εικόνα όμως αυτή είναι ελαττωματική, γιατί δεν δείχνει ούτε τον χρόνο ούτε την καμπυλότητά του. Έτσι είναι παραπλανητική, γιατί η κύρια αιτία της πλανητικής κίνησης δεν είναι τόσο η καμπύλωση του χώρου, όσο η καμπύλωση του χρόνου, που



Εικ. 2

όπως είδαμε, συνδέεται με τη μεταβολή της ταχύτητας του φωτός σ' ένα βαρυτικό πεδίο.

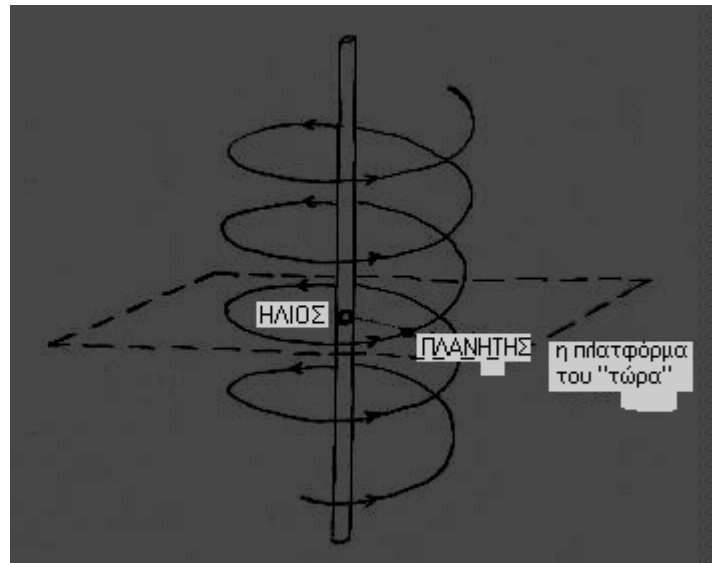
Η καμπυλότητα του χρόνου δεν μπορεί εύκολα να παρασταθεί γραφικά. Χωρίς να τη δείξουμε, ας δούμε στη συνέχεια και την εικ. 3, με τον χρόνο σαν κατακόρυφο άξονα πάνω στη σελίδα μας.

Η διπλή γραμμή είναι η κοσμική γραμμή του ήλιου μέσα στο χρόνο. Η ελικοειδής γραμμή παριστάνει την κοσμική γραμμή ενός πλανήτη, μια γεωδαισιακή γραμμή του καμπυλωμένου χωροχρόνου γύρω από τον ήλιο. Ας φανταστούμε ότι είμαστε πάνω σε μια πλατφόρμα που παριστά το “παρόν” μας. Επειδή το παρόν μας κινείται προς το μέλλον, η πλατφόρμα στο διάγραμμα θα ανυψωθεί, αφού παραστήσαμε τον χρόνο με διεύθυνση προς τα πάνω. Καθώς η πλατφόρμα ανυψώνεται, η έλικα θα τη συναντήσει σε διαδοχικά σημεία, που από την πλατφόρμα θα φαίνονται σαν ένα μοναδικό σημείο της τροχιάς γύρω από τον ήλιο.

Κάθε μία από αυτές τις δυο εικόνες ήταν εν γνώσει μας ελαττωματική. Παρόλ' αυτά, η κάθε μία με τον τρόπο της μας δίνει κάποια ένδειξη περί τίνος πρόκειται και αν τις συγκρατήσουμε - έστω και ασαφή - στο μυαλό μας, θα έχουμε μια όχι και τόσο κακή εικόνα του βαρυτικού κόσμου του Einstein.

Όπου υπάρχει ένα σώμα με μεγάλη μάζα, το διάστημα γύρω του είναι κυρτό και ο βαθμός της κυρτότητας, δηλαδή ο βαθμός της απόκλισης από την Ευκλείδεια γεωμετρία, εξαρτάται πάντα από τη μάζα του αντικειμένου. Ο νόμος που διατύπωσε ο Einstein για την καμπυλότητα συνίσταται στην εξής πρόταση :

" Έστω ότι χάριν απλότητας η ύλη παρουσιάζει συνεχή κατανομή με ορισμένη πυκνότητα, που ωστόσο ενδέχεται να μεταβάλλεται από περιοχή σε περιοχή. Αν σε μια περιοχή του χώρου υπάρχει ύλη και θεωρήσουμε μια σφαίρα αρκετά μικρή, ώστε η πυκνότητα ρ της ύλης στο εσωτερικό της να παραμένει ουσιαστικά σταθερή, τότε η σφαίρα θα παρουσιάζει υπεροχή ακτίνας ανάλογη της μάζας που περιέχεται στο εσωτερικό της. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της υπεροχής ακτίνας έχουμε :



Εικ. 3

$$r_{\text{υπερ}} = r_{\text{μετρ}} - \sqrt{\frac{A}{4\pi}} = \frac{G}{3c^2} M$$

όπου G η σταθερά παγκόσμιας έλξης, c η ταχύτητα του φωτός, $M = 4\pi r^3/3$ η μάζα της ύλης στο εσωτερικό της σφαίρας και $A = 4\pi r^2$ το εμβαδόν της σφαιρικής επιφάνειας.

Η βαρύτητα δεν μπορεί να περιοριστεί στα όρια του τρισδιάστατου χώρου, αλλά εκτείνεται στην περιοχή του τετραδιάστατου χωροχρόνου. Στην περιοχή του κυρτού χωροχρόνου, οι παραμορφώσεις που προκαλεί η βαρύτητα, δεν αφορούν μόνον τις χωρικές σχέσεις που περιγράφει η γεωμετρία του Riemann, αλλά και τις χρονικές σχέσεις, δηλαδή τα χρονικά διαστήματα. Η ροή του χρόνου δεν ακολουθεί σταθερό ρυθμό, αλλά μεταβάλλεται ανάλογα με την κυρτότητα της κάθε περιοχής και σύμφωνα με τη κατανομή των μαζών των σωμάτων.

Ήταν όμως οι 10 τανυστικές βαρυτικές εξισώσεις πεδίου του Einstein, που διαμορφώνουν την καμπυλότητα του χωροχρόνου, αξιόπιστες; Αυτό μπορούσε να ελεγχθεί αμέσως. Η κίνηση του πλανήτη Ερμή δεν συμμορφωνόταν τέλεια στη Νευτώνεια θεωρία. Το περιήλιό του (το πλησιέστερο στον ήλιο σημείο της τροχιάς του) είχε παρατηρηθεί ότι προχωρούσε 5600'' κάθε αιώνα και παρόλο που το μεγαλύτερο μέρος μπορούσε να εξηγηθεί με τη Νευτώνεια θεωρία, έμενε κάποιο υπόλοιπο 45'' χωρίς κάλυψη. Η θεωρία της γενικής σχετικότητας μπόρεσε να καλύψει το έλλειμμα αυτό, υπολογίζοντας 43'' πρόσθετη προώθηση του περιήλιου του Ερμή ανά αιώνα. Ας σημειωθεί, ότι σύμφωνα με τη θεωρία της γενικής σχετικότητας, που απομακρύνεται λίγο από αυτήν του Newton, υπάρχει μια μικρή διαφορά από τον νόμο της τροχιακής κίνησης των Kepler-Newton, έτσι που η γωνία που διαγράφει η ακτίνα ήλιος-πλανήτης, ανάμεσα σ' ένα περιήλιο και στο επόμενο, διαφέρει από τη γωνία της ολοκληρωμένης περιφοράς (δηλαδή από τις 360°), διότι ο

μεγάλος άξονας της έλλειψης γυρίζει γύρω από τον ήλιο στην κατεύθυνση της τροχιακής κίνησης του πλανήτη. Αυτή όμως η περιστροφή για τους άλλους πλανήτες του ηλιακού μας συστήματος είναι τόσο μικρή, που δεν μπορεί να διαπιστωθεί με τα όργανα μετρήσεων.

Απεδείχθη επίσης η εκτροπή του φωτός από το πεδίο βαρύτητας, παίρνοντας φωτογραφίες των άστρων που γειτονεύουν στον ήλιο, κατά τη διάρκεια μιας ολικής του έκλειψης και μια φορά που ο ήλιος έλειπε από τη συγκεκριμένη θέση του ουρανού, όπου βρισκόταν όταν τραβήχτηκε η πρώτη φωτογραφία.

Αν οι εξισώσεις της θεωρίας της γενικής σχετικότητας περιορισθούν στην περίπτωση όπου τα πεδία βαρύτητας πρέπει να θεωρούνται αδύνατα και όπου όλες οι μάζες μετακινούνται, σε σχέση με το σύστημα συντεταγμένων, με ταχύτητες που είναι πολύ μικρές συγκρινόμενες μ' αυτή του φωτός, έχουμε τη θεωρία του Newton σαν πρώτη πολύ καλή προσέγγιση, η οποία έτσι βγαίνει χωρίς καμία υπόθεση, ενώ ο Newton ήταν υποχρεωμένος να υποθέσει ότι η έλξη ανάμεσα σε υλικά σημεία είναι αντιστρόφως ανάλογη με το τετράγωνο της απόστασής τους. Αν αυξηθεί η ακρίβεια υπολογισμού, διαπιστώνονται διαφορές από τη θεωρία του Newton, που βέβαια ξεφεύγουν ακόμη όλες από την παρατήρηση εξαιτίας της μικρότητάς τους. Αυτή η συμφωνία πάει τόσο μακριά, που δεν βρέθηκαν ως τώρα παρά λίγες συνέπειες της θεωρίας της σχετικότητας προσιτές στο πείραμα όπου δεν οδηγεί η προ της σχετικότητας Νευτώνεια φυσική, παρά τη βαθιά διαφορά των βασικών υποθέσεων των δύο θεωριών. Η θεωρία της σχετικότητας βρήκε τεράστια εφαρμογή στον υποατομικό κόσμο των ιλιγγιωδών ταχυτήτων.

Ας συνοψίσουμε λοιπόν όσα είπαμε ως τώρα.

Οι ατομικές αντιλήψεις τόσο του Δημόκριτου όσο και του Newton βασίστηκαν στη θεμελιώδη διάκριση ανάμεσα στην ύλη και τον “κενό” χώρο. Από την άποψη της γενικής σχετικότητας, η διάκριση αυτή καταργείται. Όπου υπάρχει ένα σώμα με μεγάλη μάζα, εκεί θα υπάρχει αναγκαστικά κι ένα πεδίο βαρύτητας. Και αυτό το πεδίο εκδηλώνεται σαν η κυρτότητα του χώρου που περιβάλλει το σώμα αυτό. Ωστόσο δεν θα πρέπει να νομίζουμε ότι το πεδίο “γεμίζει” τον χώρο και τον υποχρεώνει να “γίνει” κυρτός. Δεν υπάρχει διάκριση ανάμεσα στις 2 έννοιες: Το πεδίο είναι ο κυρτός χώρος.

Ο Einstein διατύπωσε δύο νόμους για την βαρύτητα :

- (1) Ο πρώτος περιγράφει πως τροποποιεί την γεωμετρία του χωροχρόνου η παρουσία της ύλης. Ο νόμος αυτός ορίζει ότι η μέση καμπυλότητα, εκφρασμένη βάσει της υπεροχής ακτίνας, είναι ανάλογη της μάζας που περιέχεται στο εσωτερικό μιας σφαίρας.
- (2) Ο δεύτερος περιγράφει πως κινούνται τα αντικείμενα στα οποία ασκούνται αποκλειστικά και μόνο βαρυτικές δυνάμεις και ορίζει ότι μεταβαίνουν από το ένα σημείο του χωροχρόνου στο άλλο ακολουθώντας τις τροχιές εκείνες που μεγιστοποιούν τον ιδιοχρόνο. Το μέγιστο πλεονέκτημα που παρουσιάζει αυτός ο νόμος έγκειται στο ότι δεν εξαρτάται από το σύστημα συντεταγμένων ούτε από οποιονδήποτε άλλο τρόπο περιγραφής της κατάστασης.

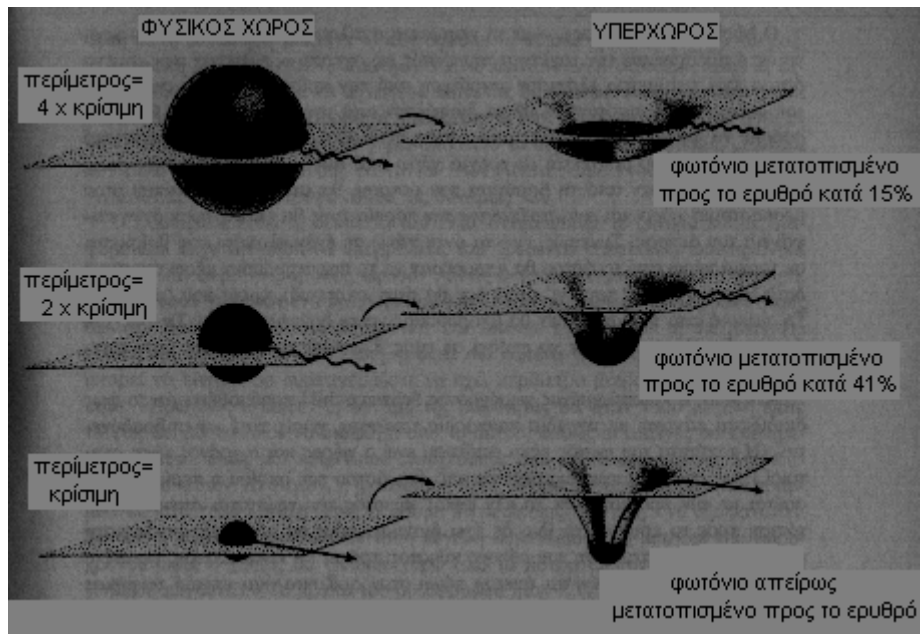
Στη γενική σχετικότητα, το πεδίο βαρύτητας και η δομή ή η γεωμετρία του χώρου ταυτίζονται. Στις εξισώσεις πεδίου του Einstein εκφράζονται με την ίδια μαθηματική ποσότητα. Λέει σχετικά ο Einstein: “Είμαστε υποχρεωμένοι να δούμε την ύλη σαν σύνθεση των περιοχών του χώρου, όπου το πεδίο εμφανίζει μια ιδιαίτερη ένταση. Σε αυτό το νέο είδος φυσικής δεν υπάρχει θέση για το πεδίο και την ύλη. Η μόνη πραγματικότητα είναι το πεδίο”. Η ανακάλυψη πως η μάζα δεν είναι τίποτα περισσότερο παρά μια μορφή ενέργειας μας υποχρέωσε να μεταβάλουμε ριζικά τις απόψεις μας ως προς τα σωματίδια. Στη σύγχρονη φυσική, η μάζα δεν συνδέεται πλέον με την υλική ουσία, και, κατά συνέπεια, τα σωματίδια δεν θεωρούνται πλέον σαν τα θεμελιώδη συστατικά της ύλης, αλλά σαν συμπυκνώσεις ενέργειας. Τα σωματίδια δεν πρέπει να απεικονίζονται σαν στατικά τρισδιάστατα αντικείμενα, σαν αναρίθμητες μικροσκοπικές μπαλίτσες ή κόκκοι άμμου, αλλά σαν τετραδιάστατες οντότητες του χωροχρόνου. Από την άποψη του χώρου μοιάζουν με αντικείμενα που διαθέτουν κάποια μάζα, ενώ από την άποψη του χρόνου μοιάζουν περισσότερο σαν εξελικτικές διαδικασίες που απαιτούν την αντίστοιχη για την πραγματοποίησή τους ενέργεια. Η θεωρία των κβάντα απέδειξε ότι τα σωματίδια δεν είναι απομονωμένοι κόκκοι ύλης, αλλά πρότυπα πιθανοτήτων, δεσμοί ενός αδιάσπαστου κοσμικού πλέγματος. Η θεωρία του πεδίου, που μας προτείνει η σύγχρονη φυσική, μας υποχρεώνει να εγκαταλείψουμε την κλασική διάκριση ανάμεσα στο κενό και στην ύλη, μάλιστα δε από τη στιγμή που αποδείχθηκε πως τα στοιχειώδη σωματίδια μπορούν να γεννηθούν αυθόρμητα από το κενό, χωρίς την παρουσία νουκλεονίου ή άλλου ισχυρού σωματιδίου. Το κενό δεν είναι κενό! Αντίθετα περιέχει έναν απεριόριστο αριθμό σωματιδίων που δημιουργούνται και εξαφανίζονται ασταμάτητα.

Όσον αφορά τον χρόνο, οι περισσότεροι άνθρωποι πιστεύουν ότι ο χρόνος κυλάει. Στην πραγματικότητα μένει εκεί που βρίσκεται. Για το απόλυτο δεν υπάρχει ούτε χρόνος, ούτε χώρος, ούτε αιτιότητα.

Μαύρες τρύπες

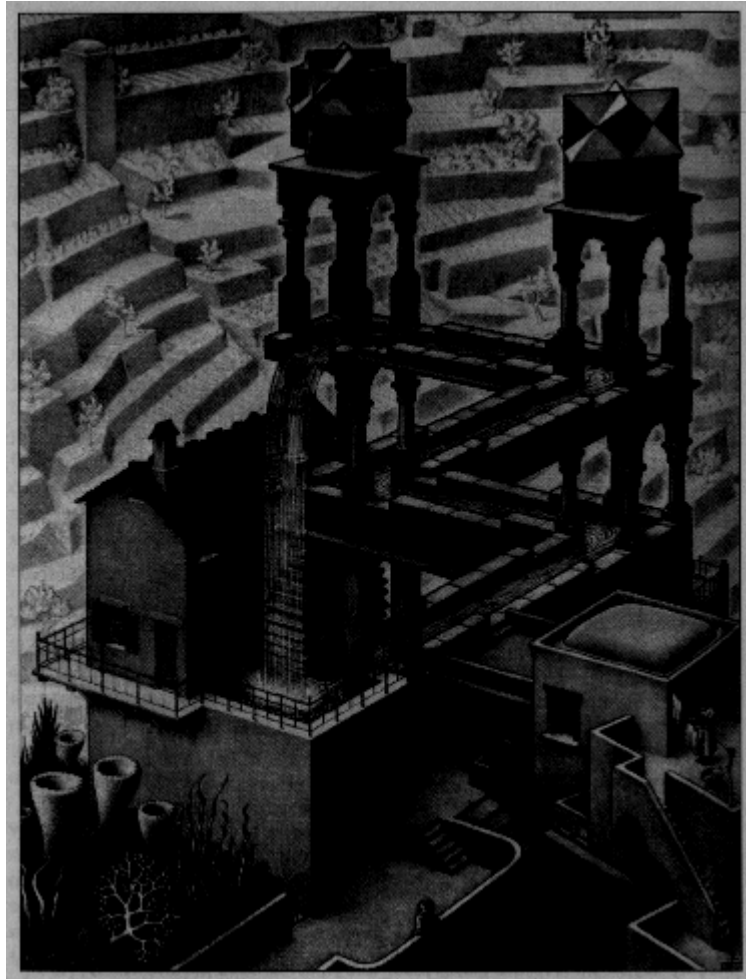
Το πιο εντυπωσιακό αποτέλεσμα της κυρτότητας του χωροχρόνου, στην περιοχή της αστροφυσικής είναι ο θάνατος των άστρων. Πεθαίνοντας από βαρύτητα, το άστρο γίνεται όλο και πιο πυκνό. Η δύναμη της βαρύτητας στην επιφάνειά του γίνεται συνεχώς ισχυρότερη και, κατά συνέπεια, ο χωροχρόνος γύρω του υιοθετεί μια όλο και μεγαλύτερη κυρτότητα. Η αυξανόμενη βαρύτητα στην επιφάνεια του άστρου εμποδίζει οποιαδήποτε διαφυγή σωματιδίων ή ενέργειας προς το διάστημα. Από ένα σημείο κι έπειτα, ακόμη και το φως δεν μπορεί να ξεφύγει από την επιφάνειά του, εφόσον η βαρύτητα είναι ισχυρότερη από την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία. Η επικοινωνία με τα άλλα άστρα, και γενικά με τον εξωτερικό χώρο, παύει να υφίσταται. Πράγμα που σημαίνει ότι μας είναι αδύνατο να δούμε ένα τέτοιο άστρο και για τον λόγο αυτό το ονομάζουμε μαύρη τρύπα. Οι μαύρες τρύπες αντιπροσωπεύουν τις ιδανικές εκφράσεις της σχετικιστικής θεωρίας. Η ισχυρή κυρτότητα του χωροχρόνου στην περιοχή τους δεν περιορίζει μόνο την εκπομπή του

φωτός, αλλά παράλληλα εξαφανίζει την έννοια του χρόνου. Αν υποθεθεί ότι είχαμε στη διάθεσή μας ένα εκπληκτικό ρολόι, ικανό να τοποθετηθεί και να λειτουργήσει στην επιφάνεια ενός άστρου που πεθαίνει, θα βλέπαμε πως, μετά τη διακοπή της εκπομπής του φωτός, θα σταματούσαν και οι χτύποι του ρολογιού, όχι εξαιτίας κάποιας βλάβης, αλλά επειδή στα πλαίσια ενός τόσο κυρτού και τόσο πυκνού σώματος όπως η μαύρη τρύπα, η ροή του χρόνου χάνει τη σημασία της και παύει να υφίσταται. Το όλο θέμα και πάλι ανάγεται στη φύση και στη θέση του παρατηρητή. Και αυτό, γιατί στο εσωτερικό του άστρου που πεθαίνει δεν παρατηρείται τίποτε το αφύσικο, ακόμη και όταν η εκπομπή του φωτός γίνει αδύνατη. Ο χρόνος στο εσωτερικό της μαύρης τρύπας συνεχίζει ν' ακολουθεί τη φυσιολογική του ροή. Ας θέσουμε τώρα το ερώτημα: Πότε πεθαίνει ένα άστρο στην πραγματικότητα; Από την άποψη της σχετικιστικής θεωρίας που μας προσέφερε την παραπάνω περιγραφή, το ερώτημα αυτό δεν έχει απάντηση ούτε νόημα. Η διάρκεια της ζωής ενός άστρου που πεθαίνει είναι σχετική και εξαρτάται από το πλαίσιο αναφοράς που χρησιμοποιεί ο παρατηρητής. Στη γενική θεωρία της σχετικότητας οι κλασικές έννοιες του χώρου και του χρόνου, σαν απόλυτες και ανεξάρτητες φυσικές οντότητες, διαγράφονται οριστικά. Από τη μια μεριά, όλες οι μετρήσεις που αφορούν το χώρο και το χρόνο είναι σχετικές και εξαρτώνται από την κατάσταση της κίνησης του παρατηρητή. Από την άλλη μεριά, η όλη δομή του χωροχρόνου συνδέεται άμεσα και αδιαχώριστα με τη διανομή της μάζας. Ο χώρος είναι κυρτός σε μian ανεξάρτητη ποικιλία καμπυλότητας και ο χρόνος ακολουθεί διαφορετικούς ρυθμούς ροής στα διαφορετικά σημεία του σύμπαντος. Επίσης, εφόσον τα υποατομικά σωματίδια μπορούν να κινηθούν σύμφωνα ή αντίθετα με τη ροή του χρόνου, όπως μπορούν να κινηθούν δεξιά και αριστερά μέσα στον χώρο, η μονοδρομική αντίληψη του χρόνου χάνει τη σημασία της!



Εικ. 4

Στην εικ. 4, βλέπουμε τις προβλέψεις της Γ.Θ.Σ. για την καμπύλωση του χώρου και την βαρυτική μετατόπιση προς το ερυθρό του φωτός από τρία συμπαγή άστρα με ίσες μάζες, αλλά διαφορετικές περιμέτρους. Το πρώτο έχει περίμετρο τέσσερις φορές μεγαλύτερη από την κρίσιμη, το δεύτερο δύο φορές μεγαλύτερη και το τρίτο έχει περίμετρο ακριβώς ίση με την κρίσιμη. Δηλαδή, η επιφάνεια του τρίτου άστρου συμπίπτει με τον ορίζοντα γεγονότων μιας μαύρης τρύπας. Η γεωμετρία Schwarzschild προβλέπει ότι για κάθε άστρο υπάρχει μία κρίσιμη περίμετρος, η οποία εξαρτάται από την μάζα του. Ένα άστρο του οποίου η περίμετρος ισούται με την κρίσιμη πρέπει να φαίνεται απολύτως σκοτεινό όταν το κοιτάζουμε από επαρκώς μακριά.



Εικ. 5

Στην εικ. 5 ("αέναη κίνηση" του M.C. Escher), παρατηρούμε ότι αν κοιτάξουμε τον πίνακα από διαφορετικές οπτικές γωνίες - λόγω χάρη, θεωρώντας αρχικά ότι το ρεύμα του νερού βρίσκεται στο ίδιο ύψος με την κορυφή της υδατόπτωσης, ενώ στη συνέχεια ότι βρίσκεται στο ίδιο ύψος με την βάση της υδατόπτωσης - , μεταπηδούμε από την μία "εικόνα" στην άλλη, κάτι που μπορεί να παραλληλιστεί με αυτό που βιώνει ένας θεωρητικός φυσικός όταν μεταπηδά από το παράδειγμα του καμπυλωμένου χωροχρόνου στο παράδειγμα του επίπεδου χωροχρόνου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1. 1. ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Η Γενική θεωρία της Σχετικότητας βασίζεται σε μερικές βασικές αρχές, που οδήγησαν τον Einstein σε μια νέα θεωρία που θα συμπεριλάμβανε και την βαρύτητα. Αυτές είναι :

Η αρχή του Mach, η αρχή της ισοδυναμίας, η αρχή του συναλλοιώτου, η αρχή της γενικής αμεταβλητότητας, η γεωδαισιακή υπόθεση και η αρχή της αντιστοιχίας.

1) Αρχή του Mach:

Οι νόμοι του Newton ισχύουν σε αδρανειακά συστήματα. Άραγε, ποια μορφή παίρνουν αυτοί οι νόμοι σε μη αδρανειακά συστήματα; Την απάντηση στο ερώτημα έδωσε ο Mach και συμπεριλαμβάνεται σε τρία αξιώματα που διατύπωσε.

I) Η κατανομή της ύλης καθορίζει την γεωμετρία του χώρου.

II) Αν δεν υπάρχει ύλη, τότε δεν υπάρχει γεωμετρία. Σύμφωνα με αυτό, δεν μπορούμε να μιλάμε για κίνηση ή γεωμετρία σε κενό Σύμπαν.

III) Ένα σώμα σε κενό Σύμπαν δεν μπορεί να έχει αδρανειακές ιδιότητες. Σύμφωνα με αυτό, αν το Σύμπαν περιλαμβάνει ένα μόνο σώμα, το σώμα αυτό εφόσον δεν υπάρχει τίποτα με το οποίο μπορεί να αλληλεπιδράσει, δεν θα πρέπει να κατέχει οποιαδήποτε αδρανειακή ιδιότητα.

2) Αρχή της ισοδυναμίας (principle of equivalence) :

Δεν μπορούμε να διακρίνουμε τις αδρανειακές δυνάμεις από τις δυνάμεις βαρύτητας, κατά συνέπεια ένα ομογενές βαρυτικό πεδίο είναι ισοδύναμο ως προς όλα τα φαινόμενα με ένα ομαλά επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς. Με πιο απλά λόγια : "Κάθε σύστημα που εκτελεί ελεύθερη πτώση είναι τοπικά ισοδύναμο μ' ένα αδρανειακό σύστημα".

Η βαρύτητα ως δύναμη διακρίνεται από όλες τις άλλες δυνάμεις στο εξής : η κίνηση ενός σώματος σε ένα πεδίο βαρύτητας είναι ανεξάρτητη από τη μάζα και τη σύνθεσή του (αρχή της ισχυρής ισοδυναμίας). Οι ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις επηρεάζουν μόνο τα φορτισμένα σώματα και οι τροχιές που διαγράφουν αυτά εξαρτάται από τον λόγο του φορτίου προς την μάζα. Επίσης και οι άλλες δύο δυνάμεις της Φύσης, όπως η ισχυρή και η ασθενής αλληλεπίδραση επηρεάζουν με διαφορετικό τρόπο διαφορετικά σωματίδια.

Σε κάθε σώμα, η βαρυτική μάζα μιας φυσικής βαρυτικής πηγής δημιουργεί ένα βαρυτικό πεδίο, ενώ η μάζα αδράνειας αντιδρά σε κάθε μεταβολή της κινητικής κατάστασης της πηγής. Η βαρυτική μάζα m_B εμφανίζεται στον νόμο της παγκόσμιας

έλξης του Newton : $\mathbf{F} = \mathbf{GMm}_g/r^2$, ενώ η αδρανειακή μάζα m_a εμφανίζεται στην σχέση : $\mathbf{F} = \mathbf{m}_a\mathbf{a}$. Η ισότητα των δύο αυτών μαζών ονομάζεται αρχή της ασθενούς ισοδυναμίας. Η έννοια ασθενής ισοδυναμία διατυπώνεται λόγω του ότι αναφέρεται μόνο στην βαρύτητα. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η ισοδυναμία ενός βαρυτικού πεδίου με ένα επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς εμφανίζεται μόνο σε ειδικές περιπτώσεις, όπως του ομογενούς βαρυτικού πεδίου. Στην περίπτωση τυχαίου βαρυτικού πεδίου περιοριζόμαστε στην μεταφορική κίνηση υλικών σημείων. Ένα φαινόμενο το οποίο προβλέπεται από την αρχή της ισοδυναμίας είναι η καμπύλωση μιας φωτεινής ακτίνας εξαιτίας της βαρύτητας.

3) Αρχή του συναλλοιώτου (covariance principle) :

Όλοι οι νόμοι της Φυσικής πρέπει να εκφράζονται από συναλλοιώτες εξισώσεις, δηλαδή να έχουν τανυστική μορφή.

Σύμφωνα με αυτή την αρχή όταν μετασχηματίζονται οι συντεταγμένες δεν αλλάζει η συναρτησιακή μορφή των εξισώσεων. Εξ' άλλου οι φυσικοί νόμοι πρέπει να είναι δυνατόν να εκφράζονται σε κάθε σύστημα συντεταγμένων.

4) Αρχή της γενικής αμεταβλητότητας (principle of general invariance) :

Όταν μετασχηματίζονται οι συντεταγμένες παραμένουν αμετάβλητες οι αριθμητικές τιμές των αριθμητικών σταθερών, π.χ. η ταχύτητα φωτός, ο τανυστής Minkowski κ.ά.

5) Γεωδαισιακή υπόθεση (geodesic principle):

Αυτή καθορίζει το είδος των επιτρεπτών τροχιών των ελεύθερα κινούμενων υλικών σωματιδίων και φωτεινών ακτίνων.

Την καμπυλότητα του χώρου την προκαλεί η παρουσία της ύλης, δηλαδή της μάζας (ή της ενέργειας). Έτσι τα σώματα κινούνται όχι λόγω κάποιας βαρυτικής δύναμης αλλά κινούνται στις τροχιές του καμπύλου χωροχρόνου, που λέγονται γεωδαισιακές. Η γεωδαισιακή είναι η καμπύλη με το μικρότερο (ή το μεγαλύτερο) μήκος ανάμεσα σε δύο γειτονικά σημεία, όπως η ευθεία στον επίπεδο Ευκλείδειο χώρο.

6) Αρχή της αντιστοιχίας (correspondence principle) :

Για ασθενή βαρυτικά πεδία και για πολύ μικρές ταχύτητες συγκριτικά με την ταχύτητα του φωτός, οι εξισώσεις της Γενικής θεωρίας της Σχετικότητας πρέπει να ανάγονται στις εξισώσεις της Νευτώνειας μηχανικής.

1.2. ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΧΩΡΟΧΡΟΝΟΥ

Κάθε γεγονός μπορεί να περιγραφεί όταν καθοριστούν το πότε και το που έγινε. Κατά συνέπεια, μπορούμε να περιγράψουμε τα γεγονότα με σημεία στον τετραδιάστατο χώρο, χρησιμοποιώντας τις συντεταγμένες : (t,x,y,z) . Συχνά μπορούμε

να δώσουμε τον εναλλακτικό συμβολισμό : (x^0, x^1, x^2, x^3) όπου $x^0 = ct$. Οι συνιστώσες x^0, x^1, x^2, x^3 ονομάζονται ανταλλοιώτες (contravariant) συνιστώσες του διανύσματος θέσης.

Έστω δύο γειτονικά σημεία του χωροχρόνου που χωρίζονται από ένα μικρό διάστημα (dt, dx, dy, dz) . Για να ορίσουμε την γεωμετρία του χωροχρόνου πρέπει να ορίσουμε την στοιχειώδη απόσταση μεταξύ των γειτονικών αυτών σημείων. Αυτή η χωροχρονική απόσταση (που εκφράζει και το πυθαγόρειο θεώρημα στον τετραδιάστατο χώρο) δίνεται από την σχέση :

$$ds^2 = - dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 - 1 \quad (1)$$

ή κατ' άλλον τρόπο :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - 2 \quad (2)$$

Η σχέση (1-2), αν χρησιμοποιήσουμε την σύμβαση του Einstein (κάθε επαναλαμβανόμενος δείκτης που εμφανίζεται σε πάνω και κάτω θέση υποδηλώνει άθροιση ως προς τις τιμές που μπορεί να πάρει ο δείκτης, στην προκειμένη περίπτωση από 0 μέχρι 3) γράφεται ως εξής πιο κομψά :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - 3 \quad (3)$$

Οι δείκτες μ, ν ως προς τους οποίους γίνεται η άθροιση, λέγονται βωβοί δείκτες ή δείκτες άθροισης. Το σύμβολο $g_{\mu\nu}(x)$ είναι ένας συμμετρικός πίνακας 4×4 , που εν γένει εξαρτάται από τις συντεταγμένες x^μ και ονομάζεται μετρικός τανυστής του χώρου ή μετρική, περιγράφει δε το βαρυτικό πεδίο στην θεωρία του Einstein. Η μορφή του στον χώρο Minkowski είναι :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

και γι' αυτό το λόγο ονομάζεται τανυστής Minkowski. Ο χωρόχρονος με αυτήν την μετρική, στον οποίο δεν εμφανίζεται το πεδίο βαρύτητας ονομάζεται επίπεδος. Αν δεν υπάρχει σύστημα συντεταγμένων, στο οποίο ο μετρικός τανυστής να περιγράφεται με την μετρική που αναφέρθηκε προηγουμένως, τότε ο χωρόχρονος αυτός ονομάζεται καμπύλος ή καμπυλωμένος.

Να σημειώσουμε ότι εκτός από τις ανταλλοιώτες συνιστώσες που αναφέρθηκαν πριν, έχουμε και τις συναλλοιώτες (covariant) συνιστώσες x_0, x_1, x_2, x_3 . Η σχέση μεταξύ ανταλλοιώτων και συναλλοιώτων συνιστωσών είναι : $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$. Άρα η σχέση (1-3) γράφεται επίσης : $ds^2 = dx^\mu dx_\mu$. Οι τανυστές $g_{\mu\nu}$ και $g^{\mu\nu}$ (όπου $g^{\mu\nu}$ ο αντίστροφος του μετρικού τανυστή), χρησιμοποιούνται για την ανύψωση των συναλλοιώτων και την καταβίβαση των ανταλλοιώτων δεικτών ενός τανυστή αντίστοιχα, π.χ. $A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$, $A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu$.

Η σχέση μεταξύ των $g^{\mu\nu}$ και $g_{\mu\nu}$ είναι :

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\kappa} = \delta_\mu^\kappa$$

Αναφέρουμε μερικά παραδείγματα μετρικών:

i) σε ένα χώρο δύο διαστάσεων με καρτεσιανές συντεταγμένες x^1, x^2 για την στοιχειώδη απόσταση δύο γειτονικών σημείων έχουμε : $ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2$, και η μετρική είναι : $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$, όπου $\mu, \nu = 1, 2$ και υπό μορφή πίνακα :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Αν χρησιμοποιήσω πολικές συντεταγμένες έχω : $x^1 = r, x^2 = \theta$, οπότε : $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$, και η μετρική γίνεται :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

ii) Στον Ευκλείδειο χώρο (χωρόχρονος Newton) αν χρησιμοποιήσω σφαιρικές συντεταγμένες r, θ, ϕ θα έχω : $ds^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$, και η μετρική του θα είναι :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Γενικά : Αν η μετρική έχει διαγώνια στοιχεία που είναι όλα θετικά : (+ + + +), τότε λέμε ότι ο χώρος είναι χώρος Riemann. Αν η μετρική έχει διαγώνια στοιχεία : (- + + +), τότε είναι ψευδο- Riemann (ή Lorentzian).

Αν γενικεύσουμε το πυθαγόρειο θεώρημα σ'ένα χώρο M διαστάσεων n , με ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων x^1, x^2, \dots, x^n τότε η έκφραση :

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu \quad (1-4)$$

δίνει το διάστημα μεταξύ ενός γεγονότος x^μ και ενός γεγονότος $x^\mu + dx^\mu$. Το πλήθος των συναρτήσεων $g_{\mu\nu}(x)$ είναι δέκα (γιατί $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$) και αποτελούν ένα συμμετρικό τανυστή δεύτερης τάξης. Κάθε γεωμετρία, της οποίας η σύνδεση μεταξύ των ds^2 και dx^μ δίνεται από μια σχέση της μορφής (1-4) ονομάζεται γεωμετρία Riemann.

1.3. ΤΑΝΥΣΤΕΣ

Στην Νευτώνεια θεωρία, τα διανύσματα είναι αποτελούν βασικά εργαλεία. Αυτό γιατί, τα διανύσματα συνοψίζουν ένα σύνολο τριών εξισώσεων σε ένα και παράλληλα φανερώνουν την γεωμετρία του προβλήματος.

Στα πλαίσια της γεωμετρίας Riemann, που είναι απαραίτητη στην Γ.Θ.Σ. κεντρικό ρόλο παίζουν οι τανυστές. Ο λόγος που μία εξίσωση είναι γραμμένη σε τανυστική μορφή είναι ότι θα ισχύει σε όλα τα συστήματα συντεταγμένων, αδρανειακά ή μη.

Σε ένα χώρο n διαστάσεων, τανυστές είναι σύνολα συναρτήσεων, που όταν μετασχηματίζονται οι συντεταγμένες, μετασχηματίζονται με ένα συγκεκριμένο νόμο. Ένας τανυστής μηδενικής τάξης είναι μια απλή συνάρτηση των συντεταγμένων όπου η αριθμητική της τιμή είναι ίδια σε όλα τα συστήματα συντεταγμένων, δηλαδή

ο τανυστής μηδενικής τάξης είναι ένα βαθμωτό μέγεθος. Ένας τανυστής πρώτης τάξης είναι ένα σύνολο n συναρτήσεων, δηλαδή ένα διάνυσμα n διαστάσεων, όπου οι n συναρτήσεις αποτελούν τις n συνιστώσες του. Ένας τανυστής δεύτερης τάξης είναι ένα σύνολο n^2 συναρτήσεων, όπως για παράδειγμα ο μετρικός τανυστής.

Οι τανυστές μετασχηματίζονται κάτω από ένα γενικό μετασχηματισμό των παλαιών συντεταγμένων x^μ στις νέες συντεταγμένες x'^μ . Οι στοιχειώδεις μεταβολές των συντεταγμένων μετασχηματίζονται ως :

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu, \quad dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} dx'^\nu \quad \blacksquare - 5 \blacksquare$$

Οι μερικές παράγωγοι μετασχηματίζονται ως εξής :

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}, \quad \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \quad \blacksquare - 6 \blacksquare$$

Συμβολισμός παραγώγων : Στο εξής οι παράγωγοι θα συμβολίζονται μέσω των συνήθων κάτω δεικτών και ενός κόμματος, δηλαδή :

$$\frac{\partial f}{\partial x^\mu} \equiv f_{,\mu}, \quad \frac{\partial f}{\partial x'^\mu} \equiv f_{,\mu}$$

Γενικότερα ορίζω τανυστές ως προς γενικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων :

$$f_{,\mu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = f'_{,\nu}$$

Τανυστής μηδενικής τάξης :

$$A_{,\mu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = A'_{,\nu}$$

Τανυστής πρώτης τάξης :

$$A_{,\mu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = A'_{,\nu}$$

Τανυστής πρώτης τάξης :

$$A_{,\mu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} = A'_{\alpha\beta}$$

Τανυστής δεύτερης τάξης :

$$A_{,\mu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^d} \frac{\partial x'^e}{\partial x^b} \frac{\partial x'^f}{\partial x^c} = A'_{def}$$

Τριπλός τανυστής τρίτης τάξης αντισυμμετρικός πρώτης τάξης και συναλλοίωτος δεύτερης τάξης :

κ.ο.κ.

Συναλλοίωτη παράγωγος : Έστω ότι $\Phi(x)$ βαθμωτό πεδίο. Τότε αφού:

$$x^\mu \text{ TM } x'^\mu \text{ ” } \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} = \frac{\partial \phi}{\partial x'^\mu}$$

” $\frac{\partial \phi}{\partial x'^\mu}$ αλλοιώτος ταυυστής 1^{ης} τάξης

Έστω $V_\mu(x)$ ένας ταυυστής 1^{ης} τάξης. Τότε :

$$\frac{\partial V_\mu}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu} \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\kappa} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\mu} \frac{\partial V_\lambda}{\partial x^\kappa}$$

” $\frac{\partial V_\mu}{\partial x'^\nu}$ ορίζεται ταυυστή αφού ο πρώτος όρος του αθροίσματος είναι διάφορος του μηδενός.

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες και γενικά όποτε οι συνιστώσες της μετρικής $g_{\mu\nu}$ είναι σταθεροί αριθμοί, το διαφορικό dA^μ ενός ανταλλοιώτου ταυυστή A^μ και οι μερικές παράγωγοί του $A^\mu_{;\nu}$ είναι συνιστώσες ταυυστή. Σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες όμως, δεν ισχύει αυτό, αφού το dA^μ είναι διαφορά δύο διανυσμάτων που βρίσκονται σε δύο διαφορετικά σημεία με συντεταγμένες x^μ και $x^\mu + dx^\mu$. Έστω ότι οι συνιστώσες ενός ανταλλοιώτου διανύσματος στις γειτονικές θέσεις x^μ και $x^\mu + dx^\mu$ είναι A^μ και $A^\mu + dA^\mu$ αντίστοιχα. Με απειροστή παράλληλη μετατόπιση του διανύσματος από την θέση x^μ στην θέση $x^\mu + dx^\mu$ το διάνυσμα A^μ θα μεταβληθεί κατά δA^μ . Άρα η διαφορά των διανυσμάτων που προκύπτει μετά την μετατόπιση είναι το διάνυσμα :

$$dA^\mu = dA^\mu - \delta A^\mu = \Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\lambda dx^\nu$$

$$A^\mu_{;\nu} \equiv \frac{dA^\mu}{dx^\nu} = A^\mu_{,\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\lambda$$

Αντίστοιχα, για ένα συναλλοιώτο διάνυσμα A_μ θα έχουμε :

$$A_{\mu;\nu} \equiv \frac{dA_\mu}{dx^\nu} = A_{\mu,\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} A_\lambda$$

Οι ποσότητες $A^\mu_{;\nu}$ και $A_{\mu;\nu}$ είναι ταυυστές και ονομάζονται συναλλοιώτες παράγωγοι των διανυσμάτων A^μ και A_μ αντίστοιχα. Σε ένα σύστημα καμπυλόγραμμων συντεταγμένων παίζουν το ρόλο που παίζουν τα $A^\mu_{,\nu}$ και $A_{\mu,\nu}$ σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Οι ποσότητες $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ ονομάζονται σύμβολα Christoffel. Αυτά είναι ορισμένες συναρτήσεις των συντεταγμένων και η μορφή τους εξαρτάται από το σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες τα σύμβολα Christoffel και το δA^μ μηδενίζονται. Άρα τα σύμβολα Christoffel δεν είναι ταυυστές, αφού ένας ταυυστής αν μηδενίζεται σε ένα σύστημα συντεταγμένων, θα μηδενίζεται σε όλα τα συστήματα συντεταγμένων.

Για συναλλοίωτη παράγωγο τανυστή δεύτερης τάξης $A^{\mu\nu}$ ή A^μ_ν ή $A_{\mu\nu}$, έχουμε αντίστοιχα:

$$A^{\mu\nu}{}_{;\lambda} \equiv \frac{DA^{\mu\nu}}{dx^\lambda} = A^{\mu\nu}{}_{,\lambda} + \Gamma_{\kappa\lambda}^\mu A^{\kappa\nu} + \Gamma_{\kappa\lambda}^\nu A^{\mu\kappa} - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma A^{\sigma\nu} - \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma A^{\mu\sigma} \quad (1)$$

$$A^\mu{}_{\nu;\lambda} \equiv \frac{DA^\mu{}_\nu}{dx^\lambda} = A^\mu{}_{\nu,\lambda} + \Gamma_{\kappa\lambda}^\mu A^\kappa{}_\nu - \Gamma_{\nu\lambda}^\kappa A^\mu{}_\kappa - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma A^\sigma{}_\nu + \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma A^\mu{}_\sigma \quad (2)$$

$$A_{\mu\nu}{}_{;\lambda} \equiv \frac{DA_{\mu\nu}}{dx^\lambda} = A_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^\kappa A_{\mu\kappa} - \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa A_{\kappa\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma A_{\sigma\nu} + \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma A_{\mu\sigma} \quad (3)$$

Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε για την συναλλοίωτη παράγωγο τον συμβολισμό : $D_\mu = D/dx^\mu$. Για παράδειγμα η συναλλοίωτη παράγωγος του τανυστή 3ης τάξης $T^{\nu\kappa}{}_\lambda$ θα έχουμε :

$$D_\mu T^{\nu\kappa}{}_\lambda = T^{\nu\kappa}{}_{\lambda;\mu} = T^{\nu\kappa}{}_{\lambda,\mu} + \Gamma_{\mu\sigma}^\nu T^{\sigma\kappa}{}_\lambda + \Gamma_{\mu\sigma}^\kappa T^{\nu\sigma}{}_\lambda - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma T^{\nu\kappa}{}_\sigma - \Gamma_{\nu\mu}^\sigma T^{\sigma\kappa}{}_\lambda - \Gamma_{\kappa\mu}^\sigma T^{\nu\sigma}{}_\lambda \quad (4)$$

Η συναλλοίωτη παράγωγος ενός γινομένου τανυστών $A^i B^k$ υπακούει στον νόμο του Leibniz, δηλαδή : $D_n (A^i B^k) = D_n A^i B^k + A^i D_n B^k$, ή ισοδύναμα :

$$(A^i B^k)_{;n} = A^i{}_{;n} B^k + A^i B^k{}_{;n}$$

Η σχέση μεταξύ μετρικού τανυστή και συμβόλων Christoffel είναι :

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\kappa = \frac{1}{2} g^{\kappa\nu} (g_{\nu\mu,\lambda} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\lambda\mu,\nu}) \quad (5)$$

Να σημειώσουμε ότι τα σύμβολα Christoffel είναι συμμετρικά ως προς τους δύο συναλλοίωτους δείκτες, δηλαδή ισχύει : $\Gamma_{\lambda\nu}^\mu = \Gamma_{\nu\lambda}^\mu$

Η σπουδαιότητα των συμβόλων Christoffel είναι ότι μπορούμε να τα χρησιμοποιήσουμε για να κατασκευάσουμε τανυστές ανώτερης τάξης με συναλλοίωτη διαφορίση άλλων τανυστών χαμηλότερης τάξης.

1.4. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΗΣ

Σε καμπύλο χωρόχρονο οι γεωδαισιακές καμπύλες συμπίπτουν με τις κοσμικές γραμμές των υλικών σημείων που βρίσκονται σε ελεύθερη πτώση. Μια καμπύλη της οποίας το εφαπτόμενο διάνυσμα μετατοπίζεται παράλληλα προς τον εαυτό του ονομάζεται γεωδαισιακή καμπύλη. Μια γεωδαισιακή καμπύλη είναι επίσης μια καμπύλη ακρότατου μήκους, δηλαδή μεταξύ δύο σημείων της το μήκος της είναι αμετάβλητο σε πρώτη προσέγγιση ως προς μικρές μεταβολές της καμπύλης που δεν μεταβάλλουν τα άκρα της. Κατά συνέπεια, μπορούμε να βρούμε τις εξισώσεις των γεωδαισιακών καμπυλών, που φυσικά εκφράζουν την εξίσωση κίνησης ενός ελεύθερου σωματιδίου μέσα σε κάποιο χώρο, με βάση την αρχή της ελάχιστης δράσης του Hamilton.

Θεωρώντας ένα ελεύθερο σωματίο που κινείται σε χώρο Riemann n διαστάσεων, με συντεταγμένες x^1, x^2, \dots, x^n , αποδεικνύεται ότι οι εξισώσεις των γεωδαισιακών καμπυλών είναι :

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\kappa\lambda}^\mu \dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda = 0 \quad \mu = 1, 2, \dots, n$$

όπου $\rho = 1, 2, \dots, n$.

Σημείωση : Αν και οι εξισώσεις κίνησης (1-15) αναφέρονται σε ελεύθερο σωματίο, περιγράφονται και κατά ένα κλασσικό τρόπο, που επί πλέον διευκολύνει τον προσδιορισμό της φυσικής σημασίας του μετρικού τανυστή. Έτσι, η πρώτη και η δεύτερη ποσότητα της (1-15) μοιάζουν με την επιτάχυνση του σωματίου και την δύναμη ανά μονάδα μάζας που ασκείται πάνω σ' αυτό. Αφού η δύναμη που ασκείται σε σωματίο είναι συνάρτηση των μερικών παραγώγων του μετρικού τανυστή, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο μετρικός τανυστής παίζει τον ρόλο του δυναμικού. Επίσης παρατηρούμε ότι η επιτάχυνση του σωματίου είναι ανεξάρτητη από την μάζα του.

1.5. ΤΑΝΥΣΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ RIEMANN

Η εξήγηση της έννοιας καμπυλότητα είναι εύκολη στην περίπτωση διδιάστατων επιφανειών. Ως γνωστόν, η επιφάνεια ενός επιπέδου δεν είναι καμπυλωμένη, ενώ η επιφάνεια μιας σφαίρας είναι καμπυλωμένη κατά ένα θεμελιώδη τρόπο, δηλαδή δεν είναι δυνατόν να ταυτιστεί με την επιφάνεια ενός επιπέδου. Αντίθετα, η καμπύλωση ενός κυλίνδρου είναι λιγότερο θεμελιώδης, γιατί η επιφάνειά του μπορεί να ταυτιστεί με την επιφάνεια ενός επιπέδου. Όλα αυτά βασίζονται στο ότι οι τρεις αυτές επιφάνειες θεωρούνται μέσα σε ένα τρισδιάστατο χώρο.

Ο τανυστής καμπυλότητας Riemann ορίζεται τελείως γεωμετρικά και εκφράζει την καμπυλότητα του χωροχρόνου. Έχει την φυσική σημασία ότι είναι ο τανυστής της παλιρροϊκής δύναμης, δηλαδή μας δίνει την σχετική επιτάχυνση μεταξύ δύο υλικών σημείων σε ελεύθερη πτώση μέσα σ' ένα βαρυτικό πεδίο.

Βασισζόμενοι στις ιδιότητες :

$$D_\mu \Phi = \nabla_\mu \Phi$$

$$D_\mu V_\kappa = \nabla_\mu V_\kappa - \Gamma_{\mu\kappa}^\nu V_\nu$$

$$D_\mu V^\nu = \nabla_\mu V^\nu - \Gamma_{\mu\kappa}^\nu V^\kappa$$

θεωρώ την δράση του $[D_\mu, D_\nu]$ σε βαθμωτό Φ :

$$D_\nu D_\mu \Phi - D_\mu D_\nu \Phi = \nabla_\nu \nabla_\mu \Phi - \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi - \Gamma_{\mu\lambda}^\nu \nabla_\nu \Phi + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \nabla_\mu \Phi = R_{\mu\nu}^\lambda \nabla_\lambda \Phi$$

Στην συνέχεια θεωρώ την δράση του $[D_\mu, D_\nu]$ πάνω σ' ένα διάνυσμα V_κ :

συντεταγμένων ως προς το οποίο οι γεωδαισιακές είναι ευθείες γραμμές. Το σύστημα αυτό το λέμε τοπικό σύστημα Lorentz Υπενθυμίζουμε ότι εξ ορισμού, σ' ένα τοπικό αδρανειακό σύστημα αναφοράς, ένα ελεύθερο σώμα ή παραμένει ακίνητο ή κινείται σε ευθεία γραμμή με ομαλή ταχύτητα. Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι κάθε τοπικό σύστημα Lorentz, είναι ένα τοπικό αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

1.6. ΤΑΝΥΣΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ RICCI - ΤΑΝΥΣΤΗΣ EINSTEIN

Με συστολή του τανυστή Riemann προκύπτει ο συμμετρικός τανυστής Ricci $R_{\alpha\beta}$. Ορίζουμε λοιπόν :

$$R_{\alpha\beta} = R^{\mu}_{\alpha\mu\beta} = R_{\beta\alpha} = g^{\lambda\mu} R_{\lambda\alpha\mu\beta} = g^{\lambda\mu} g_{\lambda\nu} R^{\nu}_{\alpha\mu\beta} = R^{\nu}_{\alpha\nu\beta} = \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta, \lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda, \beta} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} \Gamma^{\mu}_{\lambda\mu} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\beta\mu}$$

Ομοίως ορίζουμε και το βαθμωτό Ricci R (ή βαθμωτή καμπυλότητα του χώρου) , που προκύπτει με συστολή του τανυστή Ricci :

$$R = R^{\nu}_{\nu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g^{\kappa\lambda} R_{\mu\nu\kappa\lambda}$$

Η βαθμωτή καμπυλότητα Ricci είναι νούμερο, επομένως δεν αλλάζει κάτω από αλλαγές συντεταγμένων.

Ένας από τους σημαντικότερους τανυστές στη μελέτη της βαρύτητας είναι ο τανυστής Einstein $G^{\mu\nu}$. Ξεκινώντας από την ταυτότητα Bianchi και πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της με $g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda}$, έχουμε :

$$R_{\mu\nu\kappa\lambda ; \sigma} + R_{\mu\nu\lambda\sigma ; \kappa} + R_{\mu\nu\sigma\kappa ; \lambda} = 0$$

$$g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} R_{\mu\nu\kappa\lambda ; \sigma} + g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} R_{\mu\nu\lambda\sigma ; \kappa} + g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} R_{\mu\nu\sigma\kappa ; \lambda} = 0$$

$$R_{\mu\sigma} - \frac{1}{2} \delta^{\kappa}_{\sigma} R_{\mu\kappa} = 0$$

$$R_{\sigma} - \frac{1}{2} \delta^{\kappa}_{\sigma} R_{\mu\kappa} = 0$$

Για την εξαγωγή του αποτελέσματος χρειαζόμαστε την ιδιότητα :

$$g^{\mu\lambda} R_{\mu\nu\kappa\lambda ; \sigma} = - g^{\mu\lambda} R_{\mu\nu\lambda\kappa ; \sigma} = - R_{\nu\kappa ; \sigma}$$

Ορίζουμε τώρα τον τανυστή Einstein :

$$G^{\mu}_{\nu} = R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2} \delta^{\mu}_{\nu} R, \quad G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad \text{ή}$$

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = G^{\nu\mu}$$

Οι ταυτότητες Bianchi μπορούν να γραφούν :

$$G_{\nu;\mu}^{\mu} = 0 \quad \text{ή} \quad G_{;\mu}^{\mu\nu} = 0 \quad \blacksquare - 2\blacksquare \blacksquare$$

Αυτή η ταυτότητα ισχύει για κάθε γεωμετρία.

1.7. ΤΑΝΥΣΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ-ΟΡΜΗΣ

Η γεωμετρία του χωροχρόνου είναι εκείνη που καθορίζει το πώς κινείται η ύλη, η ύλη δε είναι αυτή που επιβάλλει την καμπυλότητα στον χωροχρόνο. Στην γενική θεωρία της σχετικότητας θα πρέπει να αναφερόμαστε εκτός από την πυκνότητα της ύλης και στην πυκνότητα ενέργειας. Εξ άλλου η πυκνότητα ενέργειας σ' ένα σύστημα αναφοράς γίνεται συνδυασμός πυκνότητας ενέργειας, πυκνότητα ροής ενέργειας και πυκνότητα ροής ορμής. Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι η πηγή της βαρύτητας και κατά συνέπεια γενεσιουργός αιτία της καμπυλότητας του χωροχρόνου είναι ο τανυστής ενέργειας-ορμής $T^{\mu\nu}$. Αυτός γενικά είναι ένας συμμετρικός τανυστής δεύτερης τάξης. Για την περιγραφή του φυσικού περιεχομένου του τανυστή ενέργειας-ορμής είναι απαραίτητη η έννοια του τοπικού συστήματος ηρεμίας ή συγκινούμενου συστήματος συντεταγμένων (comoving coordinate system) ενός παρατηρητή ή ενός σωματίου ή ενός στοιχειώδους τρισδιάστατου όγκου ενός ρευστού. Έτσι ονομάζεται το σύστημα συντεταγμένων, ως προς το οποίο ο παρατηρητής ακινητεί και σε μια μικρή περιοχή του ο χωροχρόνος μπορεί να θεωρηθεί τοπικά επίπεδος.

Οι συνιστώσες του τανυστή ενέργειας-ορμής ορίζονται ως εξής :

T^{00} είναι η πυκνότητα μάζας-ενέργειας.

$T^{0\alpha} = T^{\alpha 0}$ με $\alpha = 1, 2, 3$ είναι η πυκνότητα ροής μάζας-ενέργειας ή πυκνότητα ορμής κατά την διεύθυνση του άξονα x^α ανά μονάδα χρόνου δια μέσου της μοναδιαίας επιφάνειας κάθετης στην διεύθυνση x^α .

$T^{\alpha\beta}$ με $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ είναι η ροή της $\alpha\beta$ -ορμής, δηλαδή είναι το ποσόν της α -συνιστώσας της ορμής κατά μήκος του άξονα x^β που ρέει στην β -διεύθυνση στην μονάδα του χρόνου και κάθετα προς την μοναδιαία επιφάνεια.

Άρα, η παρουσία πηγών περιγράφεται με βάση τον τανυστή ενέργειας-ορμής. Αυτός είναι μια συνάρτηση των συντεταγμένων χώρου και χρόνου, γιατί οι φυσικές παράμετροι της πηγής και οι ταχύτητες των σωματιδίων είναι συναρτήσεις των συντεταγμένων x^i . Η διατήρηση τώρα της ενέργειας-ορμής στην ειδική θεωρία σχετικότητας απαιτεί, η απόκλιση του τανυστή ενέργειας-ορμής να είναι μηδέν, δηλαδή :

$$\frac{\nabla}{\nabla x^\nu} T^{\mu\nu} = 0 \quad \text{ή} \quad T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \quad \blacksquare - 2\blacksquare \blacksquare$$

Η γενίκευση της παραπάνω σχέσης είναι :

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \quad \blacksquare - 2\blacksquare \blacksquare$$

όπου :

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}$$

1.8. ΚΟΝΙΟΡΤΟΣ - ΙΔΑΝΙΚΟ ΡΕΥΣΤΟ

Το πλέον απλό ρευστό είναι ο κonioρτός. Αυτός ορίζεται ως ένα σύνολο σωματιδίων, που ηρεμούν ως προς κάποιο σύστημα Lorentz. Ένα τέτοιο ρευστό χαρακτηρίζεται από δύο ποσότητες :

- 1) το διάνυσμα της τετρα-ταχύτητας : $\mathbf{u}^\mu = d\mathbf{x}^\mu/d\tau$, όπου τ είναι ο ιδιοχρόνος κατά μήκος της κοσμικής γραμμής ενός σωματιδίου κonioρτού και
- 2) ένα βαθμωτό πεδίο $\rho_0 = \rho_0(\mathbf{x})$, που περιγράφει την ιδιοπυκνότητα του κonioρτού, δηλαδή την πυκνότητα που μετράει ένας παρατηρητής που κινείται μαζί με τον κonioρτό.

Ο ταυστής ενέργειας-ορμής που περιέχει αυτές τις δύο ποσότητες είναι :

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 u^\mu u^\nu$$

Αντίστοιχα ένα ιδανικό ρευστό χαρακτηρίζεται από τρεις ποσότητες : την τετρα-ταχύτητα, την ιδιοπυκνότητα και την βαθμωτή πίεση $p = p(\mathbf{x})$. Στο όριο που μηδενίζεται το p , το ιδανικό ρευστό μετατρέπεται σε κonioρτό. Ο ταυστής ενέργειας-ορμής για το ιδανικό ρευστό παίρνει την μορφή :

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}$$

που είναι η σχέση (1-25) με $c = 1$. Επιπρόσθετα, τα ρ και p συνδέονται με μια καταστατική εξίσωση : $p = p(\rho, T)$, όπου T η απόλυτη θερμοκρασία και επειδή μας ενδιαφέρουν καταστάσεις σταθερής θερμοκρασίας, θα έχουμε : $p = p(\rho)$.

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 2

2.1. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Ονομάζουμε αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων στο χωρόχρονο, το σύστημα συντεταγμένων που ικανοποιεί τις εξής συνθήκες :

- 1) Η απόσταση μεταξύ του σημείου P_1 με συντεταγμένες x_1, y_1, z_1 και του σημείου P_2 με συντεταγμένες x_2, y_2, z_2 είναι ανεξάρτητη του χρόνου.
- 2) Ρολόγια που βρίσκονται σε οποιοδήποτε σημείο και δείχνουν την χρονική συντεταγμένη t , πρέπει να είναι συγχρονισμένα και να έχουν τον ίδιο ρυθμό λειτουργίας.
- 3) Σε κάθε χρονική στιγμή t η γεωμετρία του χώρου είναι Ευκλείδεια.

Τώρα μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε την αρχή της ισοδυναμίας, που είναι μια βασική αρχή στην Γενική θεωρία της σχετικότητας :

Σε κάθε χωροχρονικό σημείο P υπό την παρουσία βαρυτικού πεδίου, μπορούμε να διαλέξουμε ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων ούτως ώστε σ' αυτό το σημείο και σε μια μικρή περιοχή γύρω απ' αυτό να μην υπάρχουν βαρυτικές δυνάμεις, δηλαδή βαρυτικά πεδία υπάρχουν μόνο σε μη αδρανειακά συστήματα συντεταγμένων, που κατ' αυτή την έννοια είναι ισοδύναμα.

Για την διατύπωση των εξισώσεων πεδίου της Γ.Θ.Σ. θα χρησιμοποιήσουμε τις βασικές αρχές και τον τανυστή ενέργειας-ορμής. Βασικές προϋποθέσεις αυτών είναι:

A) να παραμένουν αναλλοίωτες ως προς τους γενικούς μετασχηματισμούς των συντεταγμένων : $x^\mu \rightarrow x'^\mu$.

B) δευτέρου βαθμού διαφορικές εξισώσεις, γραμμικές ως προς τις δεύτερες παραγώγους του μετρικού τανυστή.

Η πρώτη προϋπόθεση υποδηλώνει ότι οι εξισώσεις πεδίου είναι τανυστικές.

Όπως έχει αναφερθεί η επιτάχυνση ενός σωματίου σ' ένα βαρυτικό πεδίο είναι ανεξάρτητη από την μάζα του. Ως γνωστόν, τα σώματα δεν εμφανίζουν επιτάχυνση ως προς ένα σύστημα αναφοράς σε ελεύθερη πτώση. Αυτό το σύστημα το έχουμε ονομάσει τοπικά αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Ένα σώματιο σε ελεύθερη πτώση ως προς ένα τοπικά αδρανειακό σύστημα δεν έχει επιτάχυνση και διαγράφει τοπικά τουλάχιστον, ευθεία γραμμή που αποτελεί γεωδαισιακή του χωροχρόνου. Άρα συμπεραίνουμε ότι, σώματα σε ελεύθερη πτώση (εννοείται ότι αυτά τα σώματα δεν επηρεάζονται από άλλες δυνάμεις), κινούνται πάνω σε χρονοειδείς γεωδαισιακές του χωροχρόνου. Βέβαια το συμπέρασμα αυτό αναφέρεται στον τρόπο με τον οποίο επιδρά η μετρική μόνο σε σώματα. Αν θέλουμε να γενικεύσουμε ώστε να γνωρίζουμε πως επηρεάζει μια μη επίπεδη μετρική π.χ. τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα ή τα ρευστά, έχουμε διατύπωση (ισχυρή αρχή ισοδυναμίας) :

Κάθε φυσικός νόμος που μπορεί να εκφραστεί τανυστικά στην Ειδική θεωρία σχετικότητας, διατηρεί αριθμώς την ίδια μορφή σ'ένα τοπικά αδρανειακό σύστημα αναφοράς ενός καμπυλωμένου χωροχρόνου.

Αυτή η αρχή καλείται και κανόνας περί της μετάβασης από το κόμμα στο ερωτηματικό, δηλαδή η μετατροπή του νόμου σε μια έκφραση που θα ισχύει σε κάθε σύστημα συντεταγμένων, απαιτεί απλά την μετατροπή των μερικών παραγώγων σε συναλλοίωτες. Για παράδειγμα έχουμε τις σχέσεις (1-23), (1-24).

2.2. ΠΕΔΙΑΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ EINSTEIN

Ο Einstein κατόρθωσε να γράψει μια εξίσωση, που περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο ο τανυστής ενέργειας-ορμής $T^{\mu\nu}$ προκαλεί την καμπυλότητα του χωροχρόνου και έχει την μορφή :

$$G_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta} \quad (2-1)$$

όπου Λ μια μη προσδιορισμένη σταθερά, που έχει διαστάσεις αντίστροφου μήκους, παριστάνει μια απωστική δύναμη αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης και ονομάζεται κοσμολογική σταθερά. Αυτή η σταθερά δεν υπήρχε αρχικά στην εξίσωση. Αργότερα, ο Einstein έκρινε απαραίτητη την ύπαρξη αυτής της σταθεράς Λ για την παραγωγή κοσμολογικών λύσεων στατικού χαρακτήρα. Μετά από παρατηρήσεις της διαστολής του σύμπαντος αναγκάστηκε ο Einstein να την αφαιρέσει από την εξίσωσή του. Σε φυσικά προβλήματα όπου το εξεταζόμενο σύστημα δεν είναι ολόκληρο το Σύμπαν, χρησιμοποιείται η τιμή $\Lambda = 0$.

Γεωμετροποιημένες μονάδες : Μπορούμε να εισάγουμε ένα βολικό σύστημα μονάδων, όπου $G = 1$ και $c = 1$. Οι πεδιακές εξισώσεις του Einstein θέτοντας $\Lambda = 0$ γίνονται :

$$G^{\alpha\beta} = 8\pi T^{\alpha\beta} \quad (2-2).$$

Σε πολλά κοσμολογικά προβλήματα, οι επιστήμονες δέχονται ότι η σταθερά Λ περιγράφει το μέρος της καμπυλότητας του σύμπαντος που δεν οφείλεται στην ύλη. Σύμφωνα με τις γεωμετροποιημένες μονάδες η εξίσωση (2-1) γίνεται :

$$G_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta} \quad (2-3)$$

Η σύγχρονη αντιμετώπιση των κοσμολόγων της σχέσης (2-3) είναι :

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi (T_{\alpha\beta} + T_{\alpha\beta}^{\text{vac}}) \quad (2-4)$$

όπου : $T_{\alpha\beta}^{\text{vac}} = -(\Lambda/8\pi)g_{\alpha\beta}$, ο τανυστής ενέργειας-ορμής που σχετίζεται με το κενό. Από την κβαντική θεωρία πεδίων είναι γνωστή η πόλωση του κενού. Αυτή εφοδιάζει το κενό με ένα τανυστή ενέργειας-ορμής, που δεν μπορεί να παρατηρηθεί παρά μόνο από τα βαρυτικά του αποτελέσματα.

Επιστρέφουμε τώρα στην απλή περίπτωση, που περιγράφεται από την εξίσωση (2-2). Αυτή είναι ισοδύναμη με ένα σύστημα 10 πεπλεγμένων διαφορικών εξισώσεων και όχι 16. Αυτό συμβαίνει γιατί οι τανυστές $T^{\alpha\beta}$ και $G^{\alpha\beta}$ είναι

συμμετρικοί. Από αυτές τις δέκα εξισώσεις πεδίου, οι έξι είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους λόγω των τεσσάρων ταυτοτήτων Bianchi :

$$R^{\alpha}_{\beta\kappa\lambda ; \gamma} + R^{\alpha}_{\beta\lambda\gamma ; \kappa} + R^{\alpha}_{\beta\gamma\kappa ; \lambda} = 0 \quad \blacksquare - 5 \blacksquare$$

ή με την μορφή (1-22) που έχουμε αναφέρει. Επομένως θα πρέπει να βρεθούν άλλες τέσσερις εξισώσεις για τον προσδιορισμό των δέκα ανεξάρτητων συνιστωσών του μετρικού τανυστή $g_{\alpha\beta}$ που χαρακτηρίζουν την γεωμετρία κατά τρόπο ανεξάρτητο των συντεταγμένων. Μπορούν να προκαθοριστούν οι τέσσερις αυτές συνιστώσες του $g_{\alpha\beta}$, αν οι συντεταγμένες υποστούν ένα αυθαίρετο μετασχηματισμό βαθμίδας.

Επίσης για τον πλήρη προσδιορισμό του πεδίου βαρύτητας, απαιτείται να δοθεί η εξίσωση κατάστασης μεταξύ πίεσης, πυκνότητας και απόλυτης θερμοκρασίας της ύλης.

2.3. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ EINSTEIN ΓΙΑ ΑΣΘΕΝΗ ΒΑΡΥΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ ΚΑΙ ΤΟ ΚΕΝΟ. ΚΥΜΑΤΑ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ.

Η απουσία βαρύτητας έχει ως αποτέλεσμα έναν επίπεδο χωρόχρονο, ενώ η παρουσία ενός ασθενούς βαρυτικού πεδίου μεταβάλλει ελαφρά τις ιδιότητες του χωροχρόνου, έχουμε δηλαδή ένα σχεδόν επίπεδο χωρόχρονο. Έτσι ο μετρικός τανυστής, μπορεί να γραφεί ως μια μικρή διαταραχή του τανυστή Minkowski :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \blacksquare - 6 \blacksquare$$

όπου $h_{\mu\nu}(x)$ μια μικρή διαταραχή με $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ και $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1,+1,+1,+1)$, οπότε ισχύουν :

$$h^{\lambda\mu} = g^{\lambda\nu} h_{\nu\mu}, \quad g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}, \quad h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} h_{\rho\sigma}$$

όπου h το ίχνος της διαταραχής.

Από τεχνικής άποψης το πλεονέκτημα είναι ότι, κρατώντας τους όρους 1^{ης} τάξης ως προς $h_{\mu\nu}(x)$ οι πεδιακές εξισώσεις Einstein γραμμικοποιούνται, οπότε είναι πιο εύκολο να μελετήσουμε τις λύσεις τους. Από φυσικής άποψης έχω ότι, οι πεδιακές εξισώσεις Einstein προβλέπουν την ύπαρξη κυμάτων βαρύτητας και ότι η Νευτώνεια βαρύτητα αποτελεί μια οριακή περίπτωση της Γ.Θ.Σ.

Στην περίπτωση λοιπόν που $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, οπότε $|h_{\mu\nu}| \ll |\eta_{\mu\nu}|$ και κρατώντας όρους πρώτης τάξης (γραμμικούς) ως προς τα $h_{\mu\nu}$ από τους αντίστοιχους ορισμούς βρίσκουμε :

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda} \left(\partial_{\mu} h_{\nu\lambda} + \partial_{\nu} h_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda} h_{\mu\nu} \right) - \frac{1}{2} \eta^{\rho\lambda} \left(\partial_{\mu} h_{\nu\lambda} + \partial_{\nu} h_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda} h_{\mu\nu} \right) \quad \blacksquare - 7 \blacksquare$$

$$R_{\kappa\mu\lambda\nu} = g_{\kappa\rho} \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\nu\rho}^{\sigma} - 7$$

$$R_{\kappa\mu\lambda\nu} = \frac{1}{2} (\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} \Gamma_{\nu}^{\sigma} + \Gamma_{\kappa}^{\nu} \Gamma_{\nu}^{\mu\lambda} - \Gamma_{\mu}^{\nu} \Gamma_{\nu}^{\kappa\lambda} - \Gamma_{\kappa}^{\lambda} \Gamma_{\lambda}^{\mu\nu}) - 8$$

$$R_{\mu\nu} = g^{\kappa\rho} R_{\rho\mu\kappa\nu} = \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda} \Gamma_{\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda} \Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma} =$$

$$\frac{1}{2} (\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} \Gamma_{\nu}^{\sigma} + \Gamma_{\mu}^{\kappa\lambda} \Gamma_{\nu}^{\sigma} + \Gamma_{\kappa}^{\nu} \Gamma_{\nu}^{\mu\lambda} - \Gamma_{\mu}^{\kappa\lambda} \Gamma_{\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\mu}^{\kappa\lambda} \Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma} - \Gamma_{\kappa}^{\lambda} \Gamma_{\lambda}^{\mu\nu}) - 9$$

όπου : $f = \Gamma_{\kappa}^{\lambda} \Gamma_{\lambda}^{\kappa} = n^{\kappa\lambda} \Gamma_{\kappa}^{\lambda} = n^{\kappa\lambda} \frac{\eta^2}{\eta_{\kappa\lambda} \eta^{\lambda\kappa}} = - \frac{\eta^2}{\eta_{\kappa\lambda} \eta^{\lambda\kappa}} + P^2 = - \eta_{\kappa\lambda}^2 + \eta_{\kappa\lambda}^2 + \eta_{\nu\lambda}^2 + \eta_{\nu\lambda}^2$

ο τελεστής D'Alambert στον επίπεδο χώρο Minkowski για $c = 1$.

Όπως στην ηλεκτρομαγνητική θεωρία μπορώ να κάνω χρήση της ελευθερίας ως προς τον μετασχηματισμό βαθμίδας διαλέγοντας $A^{\mu}_{,\mu} = 0$, έτσι και εδώ επιλέγοντας την συνθήκη βαθμίδας Lorentz που είναι :

$$\Gamma_{\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} n^{\mu\nu} h_{\lambda}^{\mu} = 0 \quad \text{ή} \quad \Gamma_{\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} n^{\mu\nu} \Gamma_{\nu}^{\lambda} \quad \text{ή}$$

$$\Gamma_{\nu}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \Gamma^{\mu} h - 1$$

η (2-9) γίνεται:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\Gamma_{\mu}^{\lambda} \Gamma_{\nu}^{\sigma} h + \frac{1}{2} \Gamma_{\nu}^{\mu} \Gamma^{\mu} h - \Gamma_{\mu}^{\nu} \Gamma_{\nu}^{\sigma} h - \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} h)$$

$$R_{\mu\nu} = - \frac{1}{2} f h_{\mu\nu} - 1$$

Άρα η βαθμωτή καμπυλότητα Ricci θα είναι :

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \Gamma^{\mu\nu} - \Gamma^{\mu\nu} - \frac{1}{2} f h - 1$$

Επομένως ο τανυστής Einstein με βάση τις σχέσεις (2-11), (2-12) γίνεται :

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} - \frac{1}{2} f h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\Gamma^{\mu\nu} - \Gamma^{\mu\nu} - \frac{1}{2} f h)$$

$$= - \frac{1}{2} f h_{\mu\nu} + \frac{1}{4} (\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} + \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}) - \frac{1}{2} f h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} n_{\mu\nu} h$$

και τελικά :

$$G_{\mu\nu} = - \frac{1}{2} f \bar{h}_{\mu\nu} - 1$$

όπου $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} n_{\mu\nu} h$

ο τανυστής αντιθέτου ίχνους του $h_{\mu\nu}$, καθώς ισχύει :

$$\bar{h}^{\nu\mu} \bar{h}_{\mu\nu} = -h$$

Άρα οι εξισώσεις του Einstein για ασθενή πεδία, που ονομάζονται και εξισώσεις πεδίου γραμμικοποιημένης θεωρίας εφόσον προκύπτουν, αν διατηρήσουμε μόνο τους γραμμικούς όρους ως προς $h_{\mu\nu}$, είναι σύμφωνα με τις σχέσεις (2-2) και (2-13):

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16 \pi T_{\mu\nu} \quad \square - 1 \square \square$$

Σύμφωνα με τις εξισώσεις πεδίου (2-14), κάθε συνιστώσα $\bar{h}_{\mu\nu}$ ικανοποιεί την κλασική κυματική εξίσωση και παριστάνει ένα κύμα, που πηγάζει από την περιοχή της βαρυτικής πηγής (τανυστής Ενέργειας-ορμής διάφορος του μηδενός) και στο κενό όπου ο τανυστής Ενέργειας-ορμής είναι μηδέν, διαδίδεται με την ταχύτητα του φωτός c . Αυτά τα κύματα ονομάζονται κύματα βαρύτητας και παριστάνουν μικρές διαταραχές ή κυματίδια του επίπεδου χωροχρόνου.

Για τις πεδριακές εξισώσεις Einstein στο κενό θα έχουμε : $T_{\mu\nu} = 0$, οπότε $G_{\mu\nu} = 0$ και $R_{\mu\nu} = 0$, με αποτέλεσμα σύμφωνα και με την σχέση (2-14) :

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad \text{ή} \quad \square h_{\mu\nu} = 0 \quad \square - 1 \square \square$$

Να υπενθυμίσουμε ότι θεωρούμε $G = 1$ και $c = 1$.

2.4. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΒΑΘΜΙΔΑΣ

Γενικά δύο μετρικές λέγονται φυσικά ισοδύναμες, αν σχετίζονται μεταξύ τους με μια αυθαίρετη αλλαγή συντεταγμένων :

$$x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu}$$

Απειροστά μια αυθαίρετη αλλαγή συντεταγμένων περιγράφεται ως εξής :

$$x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon^{\mu} \quad \square \square$$

όπου $\epsilon^{\mu}(x)$ είναι μία απειροστή παράμετρος. Άρα έχω :

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu}} + \partial_{\nu} \epsilon^{\mu} \quad \square \square \square \square - 1 \square \square$$

Ομοίως :

$$\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} = \delta_{\nu}^{\mu} - \partial_{\nu} \epsilon^{\mu} \quad \square \square \square \square - 1 \square \square$$

Άρα απειροστά η μετρική μετασχηματίζεται ως εξής :

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \partial_{\mu} \epsilon_{\nu} + \partial_{\nu} \epsilon_{\mu} - g_{\mu\lambda} \partial_{\nu} \epsilon^{\lambda} - g_{\nu\lambda} \partial_{\mu} \epsilon^{\lambda} \quad \square \square \square \square - 1 \square \square$$

Συνοψίζοντας έχουμε για απειροστές αλλαγές συντεταγμένων :

$$\delta x^\mu = \varepsilon^\mu \quad \delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\lambda} \eta_\nu \varepsilon^\lambda - g_{\kappa\nu} \eta_\mu \varepsilon^\kappa \quad (2-19)$$

Ειδικότερα στην περίπτωση του ασθενούς βαρυτικού πεδίου όπου $h_{\mu\nu} \ll 1$, θα έχω :

$$g_{\mu\nu} = n_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \delta h_{\mu\nu} = -\eta_{\mu\lambda} \eta_\nu \varepsilon^\lambda - \eta_{\kappa\nu} \eta_\mu \varepsilon^\kappa$$

$$\delta h_{\mu\nu} = -\eta_\nu \varepsilon_\mu - \eta_\mu \varepsilon_\nu \quad (2-20)$$

2.5. ΝΕΥΤΩΝΕΙΟ ΟΡΙΟ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΟΥ EINSTEIN

Ως γνωστόν η Νευτώνεια θεωρία ισχύει για πολύ ασθενή βαρυτικά πεδία. Γι'αυτά τα πεδία βρήκαμε στην παράγραφο 2.3 ότι ισχύει :

$$f \bar{h}_{\mu\nu} = -16 \pi G T_{\mu\nu} \quad f \bar{h}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} n_{\mu\nu} h \quad (2-21)$$

Θεωρώ την περίπτωση μιας στατικής κατανομής σημειακής μάζας. Σ'αυτήν την περίπτωση έχω για τον ταυστή ενέργειας ορμής : $T_{00} = \rho(x)$, $T_{0i} = 0$, $T_{ij} = 0$, με $i, j = 1, 2, 3$ και $\rho(x)$ η πυκνότητα μάζας. Επίσης γι'αυτήν την περίπτωση θα ισχύει ότι:

$$f = \rho^2$$

Άρα η (2-21) δίνει :

$$\rho^2 \bar{h}_{00} = \frac{1}{2} n_{00} h \quad (2-22)$$

$$\rho^2 \bar{h}_{0i} = \frac{1}{2} n_{0i} h \quad (2-23)$$

$$\rho^2 \bar{h}_{ij} = \frac{1}{2} n_{ij} h \quad (2-24)$$

και επειδή: $n_{00} = -1$, $n_{0i} = 0$, $n_{ij} = \delta_{ij}$, έχουμε :

$$\rho^2 \bar{h}_{00} + \frac{1}{2} h = -16 \pi G \rho \quad (2-25)$$

$$h_{0i} = 0$$

$$\rho \bar{h}_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij} h \quad (2-26)$$

Η σχέση (2-27) δίνει :

$$h_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij} h \quad (2-27)$$

Άρα : $h_{11} = h_{22} = h_{33} = h/2$.

Αλλά επειδή : $h = -h_{00} + h_{11} + h_{22} + h_{33}$, βρίσκουμε ότι : $h_{00} = h/2$, οπότε η σχέση (2-25) γίνεται :

$$2 P^2 \rho_{\infty} \delta \pi G \rho \left(\frac{r}{R} \right)^2 \rho_{\infty} \delta \pi G \rho \left(\frac{r}{R} \right)^2 - 2 \rho_{\infty} \delta \pi G \rho \left(\frac{r}{R} \right)^2$$

Αν συγκρίνουμε την εξίσωση (2-29) με την Νευτώνεια εξίσωση :

$$P^2 \phi \left(\frac{r}{R} \right)^2 G \rho \left(\frac{r}{R} \right)^2 = 3 \rho_{\infty} \delta \pi G \rho \left(\frac{r}{R} \right)^2$$

παρατηρούμε ότι γίνεται η εξής ταυτοποίηση : $h_{00} = -2\Phi(x)$ (2-31)

ή σύμφωνα με τα προηγούμενα : $h_{00} = h_{11} = h_{22} = h_{33} = -2\Phi(x)$

και αν χρησιμοποιήσουμε τον ταυνοστή αντιθέτου ίχνους :

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} n_{\mu\nu} h \quad \bar{h}_{00} = h_{00} - \frac{1}{2} n_{00} h \quad \bar{h}_{00} = h_{00} + \frac{1}{2} h$$

$$\bar{h}_{00} = 2 h_{00}$$

οπότε βρίσκουμε :

$$\bar{h}_{00} = -4 \phi \left(\frac{r}{R} \right)^2 G \rho \left(\frac{r}{R} \right)^2 = 3 \rho_{\infty} \delta \pi G \rho \left(\frac{r}{R} \right)^2$$

Η λύση της εξίσωσης (2-30) για ένα σημειακό σωματίδιο μάζας m είναι :

$$\phi = -G \frac{m}{r} \left(\frac{r}{R} \right)^2 = -3 \rho_{\infty} \delta \pi G \rho \left(\frac{r}{R} \right)^2$$

Άρα λόγω της (2-31) παρατηρούμε ότι ο όρος : $-h_{00} / 2$ είναι το βαρυτικό δυναμικό στην Νευτώνεια θεωρία.

Η μετρική για ένα αστέρι ή έναν πλανήτη στο όριο του ασθενούς βαρυτικού πεδίου είναι επομένως :

$$ds^2 = - \left(\frac{r}{R} \right)^2 + 2 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \left(\frac{r}{R} \right)^2 - 2 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \left(\frac{r}{R} \right)^2 + dy^2 + dz^2 \left(\frac{r}{R} \right)^2 - 3 \left(\frac{r}{R} \right)^2$$

Η μετρική αυτή, οδηγεί στους ορθούς νόμους κίνησης του Newton. Κατά συνέπεια, αποδεικνύεται ότι η Νευτώνεια βαρύτητα αποτελεί μια οριακή περίπτωση της Γενικής θεωρίας της Σχετικότητας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

3.1. Η ΛΥΣΗ SCHWARZSCHILD

Γενικά οι πεδιακές εξισώσεις είναι μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις, οπότε είναι δύσκολο να λυθούν επακριβώς. Με την παραδοχή όμως, κατάλληλων συμμετριών του μετρικού τανυστή, που υποδεικνύονται από την φυσική του προβλήματος, οι εξισώσεις πεδίου απλουστεύονται σημαντικά.

Μελετώ την απλή περίπτωση, που η λύση είναι στατική και με σφαιρική συμμετρία όσον αφορά την εξάρτηση από τις χωρικές συντεταγμένες r, θ, φ . Υπενθυμίζουμε ότι μια λύση λέγεται στατική, αν είναι στάσιμη (δηλαδή ανεξάρτητη του χρόνου) και ταυτόχρονα αναλλοίωτη ως προς τις αντιστροφές στον χρόνο. Αναμένω λοιπόν ότι, οι πεδιακές εξισώσεις του Einstein θα ανάγονται σε ένα απλό σύστημα διαφορικών εξισώσεων μιας μεταβλητής, δηλαδή της r .

Θεωρώ μια σφαιρική κατανομή μάζας, για παράδειγμα ένα άστρο μάζας M και στα πλαίσια της Γ.Θ.Σ. θέλω να βρω την μορφή του χωροχρόνου γύρω απ' αυτή τη μάζα. Οι λύσεις που ψάχνω πρέπει να είναι στατικές με σφαιρική συμμετρία. Πρέπει να λύσω τις πεδιακές εξισώσεις του Einstein χωρίς πηγές (στο κενό) :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0 \quad \text{---} \quad R_{\mu\nu} = 0 \quad \text{---} \quad \text{1} \quad \text{---} \quad \text{ιστιώσεις}$$

που περιγράφουν το βαρυτικό πεδίο, δηλαδή την μετρική $g_{\mu\nu}$ στο εξωτερικό του άστρου. Προφανώς, θα πρέπει και η μετρική να έχει την ίδια συμμετρία, δηλαδή να είναι στατική και σφαιρικά συμμετρική. Θα πρέπει να διαλέξω λοιπόν, ένα κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων, που η συμμετρία να είναι προφανής.

Γενικά η μετρική $g_{\mu\nu}$ έχει την μορφή :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad \text{---} \quad \text{2}$$

Σύμφωνα με τις παραδοχές που αναφέραμε παραπάνω η μετρική θα είναι της μορφής :

$$ds^2 = g_{00} dt^2 + 2 g_{0i} dt dx^i + g_{ij} dx^i dx^j \quad \text{---} \quad \text{3}$$

όπου $i, j = 1, 2, 3$. Οι μετρικές αυτές που δεν έχουν εξάρτηση από τον χρόνο ονομάζονται στάσιμες. Σε στάσιμες λύσεις ισχύει : $g_{0i}(\mathbf{x}) = 0$.

Η σφαιρική συμμετρία σημαίνει ότι υπάρχει κάποιο σύστημα συντεταγμένων για τον χώρο ($x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \varphi$), όπου η μετρική παίρνει την μορφή :

$$g_{ij} dx^i dx^j = g_{rr} dr^2 + g_{\theta\theta} d\theta^2 + g_{\varphi\varphi} \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad \text{---} \quad \text{4}$$

Για παράδειγμα, στον Ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^3 , σε καρτεσιανές συντεταγμένες η μετρική έχει την μορφή :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

ενώ σε σφαιρικές συντεταγμένες :

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Η συνάρτηση $W(r)$ είναι αυθαίρετη, επομένως μπορώ να διαλέξω την τιμή: $W(r) = 1$ γιατί αν είναι διάφορη της μονάδας τότε: $rW(r) = r'$, οπότε η 3-διάστατη μετρική θα είναι της μορφής:

$$g'_{r'r'} = 1 + r'^2 d\theta^2 + r'^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Υπόψιν ότι, δεν μπορώ να έχω όρους $g_{r\theta}(r)drd\theta$ ή $g_{r\phi}(r)drd\phi$ γιατί λόγω σφαιρικής συμμετρίας, θα πρέπει η μετρική να μένει αναλλοίωτη ως προς: $\theta \# - \theta$ και $\phi \# - \phi$. Για παράδειγμα για $\theta \# - \theta$, θα έχουμε: $g_{r\theta}(r)drd\theta \# - g_{r\theta}(r)drd\theta$. Ομοίως, για $\phi \# - \phi$ έχουμε: $g_{r\phi}(r)drd\phi \# - g_{r\phi}(r)drd\phi$. Άρα θα πρέπει:

$$g_{r\theta}(r) = 0 \text{ και } g_{r\phi}(r) = 0.$$

Άρα για στατικές μετρικές με σφαιρική συμμετρία υπάρχει κάποιο σύστημα συντεταγμένων t, r, θ, ϕ που η μετρική παίρνει την ειδική μορφή:

$$ds^2 = g_{00} dt^2 + g_{rr} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3-5)$$

δηλαδή εξαρτώνται από δύο αυθαίρετες συναρτήσεις του r . Αν στην (3-5) θέσουμε: $g_{00} = -1$ και $g_{rr} = 1$ τότε προκύπτει η μετρική χώρου Minkowski σε σφαιρικές συντεταγμένες.

Τώρα έχουμε καταλήξει σε διαφορικές εξισώσεις για τα $g_{00}(r)$ και $g_{rr}(r)$, οπότε μπορούμε να βρούμε την ακριβή τους λύση. Θα πρέπει βεβαίως να απαιτήσουμε, στο όριο του ασθενούς βαρυτικού πεδίου ($r \rightarrow \infty$) να προκύπτει ο νόμος του Newton. Άρα η απαίτηση αυτή ισοδυναμεί με φυσικές οριακές συνθήκες για τις διαφορικές εξισώσεις που θα λύσουμε.

Για την κατασκευή της λύσης παραμετρίζω τις $g_{00}(r)$ και $g_{rr}(r)$, θέτοντας:

$$g_{00} = e^{2V} \quad V < 0 \text{ και } g_{rr} = e^{-2U} \quad U > 0$$

όπου $V(r), U(r)$ αυθαίρετες πραγματικές συναρτήσεις που θα πρέπει να υπακούουν την σχέση (3-1). Άρα, έχω να λύσω τις πεδιακές εξισώσεις Einstein στο κενό για:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{2V} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2U} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

οπότε:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{-2V} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2U} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε τα σύμβολα Christoffel στηριζόμενοι στην σχέση:

$$\Gamma_{\lambda\mu}^{\kappa} = \frac{1}{2} g^{\kappa\nu} (\partial_{\nu\mu, \lambda} g_{\lambda\nu, \mu} - g_{\lambda\nu, \nu} \partial_{\mu} g_{\lambda\mu, \nu})$$

οπότε έχουμε :

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{1}{2} g^{rm} (\partial_{mt, t} g_{tm, t} - g_{tt, m} \partial_t g_{rt, t} + g_{tr, t} \partial_t g_{tr, t} - g_{tt, r} \partial_t g_{rt, t})$$

$$\frac{1}{2} e^{-2U} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} e^{2U} - \frac{1}{2} e^{-2U} \frac{d}{dr} e^{-2U} \right) = V' \quad - 6$$

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2} g^{rm} (\partial_{mr, r} g_{rm, r} - g_{rr, m} \partial_r g_{rr, r} + g_{rr, r} \partial_r g_{rr, r} - g_{rr, r} \partial_r g_{rr, r})$$

$$\frac{1}{2} e^{-2U} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} e^{2U} - \frac{1}{2} e^{-2U} \frac{d}{dr} e^{-2U} \right) = U' \quad - 7$$

$$\Gamma_{tr}^t = \frac{1}{2} g^{tm} (\partial_{mr, t} g_{tm, r} - g_{tr, m} \partial_t g_{tr, t} + g_{tr, t} \partial_t g_{tt, r} - g_{tr, t} \partial_t g_{tr, t})$$

$$\frac{1}{2} e^{-2U} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} e^{2U} - \frac{1}{2} e^{-2U} \frac{d}{dr} e^{-2U} \right) = V' \quad - 8$$

$$\Gamma_{\theta r}^{\theta} = \frac{1}{2} g^{\theta m} (\partial_{mr, \theta} g_{\theta m, r} - g_{\theta r, m} \partial_r g_{\theta\theta, r} + g_{\theta r, \theta} \partial_r g_{\theta\theta, r} - g_{\theta r, \theta} \partial_r g_{\theta r, \theta})$$

$$\frac{1}{2} r^{-2} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r^2 - 0 \right) = \frac{1}{2} r^{-2} \cdot 2r = r^{-1} = \Gamma_{r\theta}^{\theta} \quad - 9$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \frac{1}{2} g^{\phi m} (\partial_{\phi m, \theta} g_{\theta m, \phi} - g_{\theta\phi, m} \partial_r g_{\theta\phi, \phi} + g_{\theta\phi, \theta} \partial_r g_{\theta\phi, \phi} - g_{\theta\phi, \theta} \partial_r g_{\theta\phi, \phi})$$

$$\frac{1}{2} \sin^2 \theta \left(\frac{1}{\theta} \frac{d}{d\theta} \sin^2 \theta - 2 \cos \theta \sin \theta \right) = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta = \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} \quad - 10$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{1}{2} g^{rm} (\partial_{m\theta, \theta} g_{\theta m, \theta} - g_{\theta\theta, m} \partial_r g_{r\theta, \theta} + g_{r\theta, \theta} \partial_r g_{\theta r, \theta} - g_{\theta\theta, r} \partial_r g_{r\theta, \theta})$$

$$\frac{1}{2} e^{-2U} \left(\frac{1}{2r} \frac{d}{dr} e^{-2U} + 0 \right) = \frac{1}{2} e^{-2U} \frac{1}{2r} \frac{d}{dr} e^{-2U} \quad - 11$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = \frac{1}{2} g^{rm} (\partial_{m\phi, \phi} g_{\phi m, \phi} - g_{\phi\phi, m} \partial_r g_{r\phi, \phi} + g_{r\phi, \phi} \partial_r g_{\phi r, \phi} - g_{\phi\phi, r} \partial_r g_{r\phi, \phi})$$

$$\frac{1}{2} e^{-2U} \left(\frac{1}{2r} \frac{d}{dr} e^{-2U} + 0 \right) = \frac{1}{2} e^{-2U} \frac{1}{2r} \frac{d}{dr} e^{-2U} \quad - 12$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = \frac{1}{2} g^{\theta m} (\partial_{m\phi, \phi} g_{\phi m, \theta} - g_{\phi\phi, m} \partial_r g_{\theta\phi, \phi} + g_{\theta\phi, \phi} \partial_r g_{\theta\phi, \phi} - g_{\phi\phi, \theta} \partial_r g_{\theta\phi, \phi})$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r^2 + 0 \right) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 = 2 \cos \theta \sin \theta \quad - 13$$

$$\Gamma_{\varphi r}^{\varphi} = \frac{1}{2} g^{\varphi m} g_{m r, \varphi} - g_{\varphi m, r} - g_{\varphi r, m} \frac{1}{2} g^{\varphi \varphi} g_{\varphi r, \varphi} - g_{\varphi \varphi, r} - g_{\varphi r, \varphi}$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{1}{r} \right)^2 \sin^2 \theta \frac{1}{r} = \Gamma_{r\varphi}^{\varphi} - 1$$

Όλες οι άλλες συνιστώσες βγαίνουν μηδέν.

Τώρα υπολογίζω τις συνιστώσες του τανυστή καμπυλότητας Ricci, αντικαθιστώντας στην γενική έκφραση :

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu, \lambda}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda, \nu}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \Gamma_{\rho\lambda}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda\mu}^{\rho} \Gamma_{\rho\nu}^{\lambda}$$

Για $R_{\mu\nu} = 0$ (εξίσωση Einstein στο κενό) έχω κατά συνιστώσες :

$$R_{tt} = 0 \Rightarrow \Gamma_{tt, \lambda}^{\lambda} - \Gamma_{t\lambda, t}^{\lambda} + \Gamma_{tt}^{\rho} \Gamma_{\rho\lambda}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda t}^{\rho} \Gamma_{\rho t}^{\lambda} = 0$$

$$\Gamma_{tt, r}^r - 0 + \Gamma_{tt}^r \left(\frac{1}{r} \right) + \Gamma_{r\theta}^{\theta} + \Gamma_{r\varphi}^{\varphi} + \Gamma_{rr}^r \left(\frac{1}{r} \right) - \Gamma_{rt}^t - \Gamma_{rt}^t \Gamma_{tt}^r = 0$$

$$v^A e^{2v-2u} + 2v^A \frac{1}{r} + v^A e^{2v-2u} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r} + U^A \right) - v^A e^{2v-2u} v^A - v^A v^A \frac{2}{r} = 0$$

$$v^A \cdot U^A + \frac{2}{r} v^A = 0$$

$$R_{rr} = 0 \Rightarrow \Gamma_{rr, \lambda}^{\lambda} - \Gamma_{r\lambda, r}^{\lambda} + \Gamma_{rr}^{\rho} \Gamma_{\rho\lambda}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda r}^{\rho} \Gamma_{\rho r}^{\lambda} = 0$$

$$\Gamma_{rr, r}^r - \Gamma_{rt, r}^t - \Gamma_{rr, r}^r - \Gamma_{r\theta, r}^{\theta} - \Gamma_{r\varphi, r}^{\varphi} + \Gamma_{rr}^r \left(\frac{1}{r} \right) + \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{r\theta}^{\theta} + \Gamma_{r\varphi}^{\varphi} - \Gamma_{tr}^t \Gamma_{tr}^t - \Gamma_{rr}^r \Gamma_{rr}^r - \Gamma_{\theta r}^{\theta} \Gamma_{\theta r}^{\theta} - \Gamma_{\varphi r}^{\varphi} \Gamma_{\varphi r}^{\varphi} = 0$$

$$-v^A + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} + U^A \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = 0$$

$$-v^A + U^A \cdot v^A + \frac{2}{r} = 0$$

$$R_{\theta\theta} = 0 \Rightarrow \Gamma_{\theta\theta, \lambda}^{\lambda} - \Gamma_{\theta\lambda, \theta}^{\lambda} + \Gamma_{\theta\theta}^{\rho} \Gamma_{\rho\lambda}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda\theta}^{\rho} \Gamma_{\rho\theta}^{\lambda} = 0$$

$$\Gamma_{\theta\theta, r}^r - \Gamma_{\theta\varphi, \theta}^{\varphi} + \Gamma_{\theta\theta}^r \left(\frac{1}{r} \right) + \Gamma_{rt}^t + \Gamma_{r\theta}^{\theta} + \Gamma_{r\varphi}^{\varphi} - \Gamma_{\theta\theta}^{\theta} \Gamma_{r\theta}^{\theta} - \Gamma_{r\theta}^{\theta} \Gamma_{\theta\theta}^r - \Gamma_{\varphi\theta}^{\varphi} \Gamma_{\varphi\theta}^{\varphi} = 0$$

$$\frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \right) e^{-2u} \frac{1}{r} \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{1}{r} e^{-2u} \left(v^A + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} e^{-2u} \frac{1}{r} \frac{1}{r} = 0$$

$$e^{-2u} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{1}{r} - \frac{1}{r} = 0$$

$$R_{\varphi\varphi} = 0 \Rightarrow \Gamma_{\varphi\varphi, \lambda}^{\lambda} - \Gamma_{\varphi\lambda, \varphi}^{\lambda} + \Gamma_{\varphi\varphi}^{\rho} \Gamma_{\rho\lambda}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda\varphi}^{\rho} \Gamma_{\rho\varphi}^{\lambda} = 0$$

$$\Gamma_{\varphi\varphi, r}^r + \Gamma_{\varphi\varphi, \theta}^{\theta} + 0 + \Gamma_{\varphi\varphi}^r \left(\frac{1}{r} \right) + \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{r\theta}^{\theta} + \Gamma_{r\varphi}^{\varphi} - \Gamma_{\varphi\varphi}^{\varphi} + \Gamma_{\theta\varphi}^{\theta} - \Gamma_{r\varphi}^r \Gamma_{\varphi\varphi}^r - \Gamma_{\theta\varphi}^{\theta} \Gamma_{\varphi\varphi}^{\theta} - \Gamma_{\varphi\varphi}^r \Gamma_{r\varphi}^r = 0$$

$$\frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \right) \sin^2 \theta e^{-2u} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{1}{r} = 0$$

$$- \frac{1}{r} r \sin^2 \theta e^{-2U} \sin \theta \cos \theta - r \sin^2 \theta e^{-2U} \frac{1}{r} \sin \theta \cos \theta = 0$$

$$- e^{-2U} \sin^2 \theta + r U^A e^{-2U} \sin^2 \theta - r V^A e^{-2U} \sin^2 \theta + \sin^2 \theta = 0$$

και λόγω της $R_{\theta\theta} = 0$ παίρνουμε : $R_{\theta\theta} \sin^2 \theta = 0$
 οπότε η τελευταία σχέση εμπεριέχεται στην προηγούμενη την (3-17).

$$R_{\mu\nu} = 0, \text{ για } \mu \neq \nu$$

δηλαδή όλες οι άλλες συνιστώσες του $R_{\mu\nu}$ με $\mu \neq \nu$, είναι εκ ταυτότητας μηδέν (λόγω του ότι ο $g_{\mu\nu}$ είναι διαγώνιος). Άρα έχω τρεις ανεξάρτητες πεπλεγμένες εξισώσεις (μη γραμμικές), με δύο αγνώστους συναρτήσεις $V(r)$ και $U(r)$. Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (3-15) και (3-16) παίρνουμε :

$$U^A - V^A = 0$$

Οι οριακές συνθήκες μπορούν να είναι οι εξής:

$$\text{Για } r^{\text{TM}} \neq \infty \text{ θα πρέπει : } g_{\mu\nu}^{\text{TM}} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$$

δηλαδή ο μετρικός τανυστής $g_{\mu\nu}$ μετατρέπεται στον μετρικό τανυστή του επίπεδου χώρου Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ γραμμένος σε σφαιρικές συντεταγμένες. Να θυμίσουμε ότι η μετρική μας έχει την μορφή :

$$ds^2 = - e^{2V} dt^2 + e^{2U} dr^2 + r^2 (\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

$$\text{με } g_{00} = - e^{2V} < 0 \text{ και } g_{rr} = e^{2U} > 0$$

Άρα θα πρέπει :

$$\text{Για } r^{\text{TM}} \neq \infty \text{ να έχουμε : } V \rightarrow 0 \text{ και } U \rightarrow 0$$

$$\text{δηλαδή } e^{2V} \rightarrow 1 \text{ και } e^{2U} \rightarrow 1$$

οπότε θα πρέπει :

$$U = V, \text{ για } r^{\text{TM}} \neq \infty$$

Επομένως η σταθερά πρέπει να είναι μηδενική, με αποτέλεσμα: $V(r) = -U(r)$ (3-19)

Λαμβάνοντας υπόψιν τις σχέσεις (3-19) και (3-17) έχουμε :

$$e^{2V} \left(\frac{2}{r} - 1 \right) = 0 \Rightarrow e^{2V} = r - 1$$

$$e^{2V} = r - 1 \Rightarrow r e^{2V} = r^2 - 2C$$

όπου C είναι σταθερά ολοκλήρωσης. Άρα καταλήγω :

$$e^{2V} = e^{2U} = 1 - \frac{2C}{r}, \text{ οπότε :}$$

$$g_{00} = - e^{2V} = - \left(1 - \frac{2C}{r} \right) \text{ και } g_{rr} = e^{2U} = \frac{1}{1 - \frac{2C}{r}}$$

Προσδιορισμός της σταθεράς C: Με βάση τα προηγούμενα η λύση Schwarzschild θα είναι της μορφής :

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2C}{r} \right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2C}{r}} dr^2 + r^2 (\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Στο $r = \infty$ η μετρική (3-20) γίνεται μετρική Minkowski. Μελετώ τώρα την λύση Schwarzschild για πολύ μεγάλο r , οπότε :

$$\frac{1}{1 - \frac{2C}{r}} \gg 1 + \frac{2C}{r}$$

Κατά συνέπεια ασυμπτωτικά για $r \square \infty$ η σχέση (3-20) γίνεται :

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2C}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2C}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \right)$$

Αν $r \gg 1$ παίρνουμε την προσέγγιση του ασθενούς βαρυτικού πεδίου. Στην μελέτη που είχαμε κάνει στο Νευτώνειο όριο για ασθενές Β.Π. είχαμε καταλήξει στην μετρική (2-34). Συγκρίνοντας αυτήν με την (3-21) βρίσκουμε ότι :

$$1 - \frac{2C}{r} = 1 + 2\phi \quad - \frac{C}{r} = \phi \quad - \frac{C}{r} = -G \frac{M}{r} \quad C = GM$$

Άρα ο μετρικός τανυστής $g_{\mu\nu}$ γίνεται :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} - \frac{2GM}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - \frac{2GM}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Συνοψίζοντας η περίφημη λύση Schwarzschild είναι :

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{r}} + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \right)$$

όπου M είναι η ολική μάζα του συστήματος, δηλαδή στην M περιλαμβάνεται και η ενέργεια-μάζα που προέρχεται από τα βαρυτικά πεδία.

Η πλήρης λύση Schwarzschild προσφέρει την δυνατότητα μελέτης διορθώσεων, πέρα από το Νευτώνειο όριο. Μία "μετανευτώνεια διόρθωση" με $r \square \infty$ είναι η εξής :

$$\frac{1}{1 - \frac{2C}{r}} \gg 1 + \frac{2C}{r} + \frac{4C^2}{r^2} + \dots \quad g_{rr} = \frac{2GM}{r} + \frac{4G^2 M^2}{r^2} + \dots$$

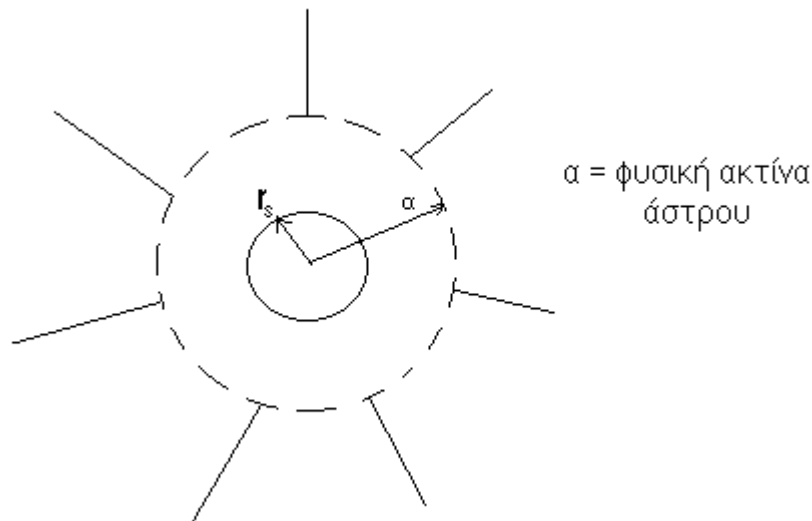
Ο τρίτος όρος : $4G^2 M^2 / r^2$ παριστάνει την πρώτη "μετανευτώνεια διόρθωση". Η εξάρτηση από το $1/r^2$, οδηγεί στην μετάπτωση του περιηλίου του Ερμή, που έχει επαληθευτεί πειραματικά. Αυτό ήταν και το πρώτο τεστ ότι, υπάρχει κάτι πέρα από την Νευτώνεια βαρύτητα και αποτελεί μια πειραματική επαλήθευση της Γ.Θ.Σ.

3.2. ΑΚΤΙΝΑ SCHWARZSCHILD - ΜΑΥΡΕΣ ΟΠΕΣ

Όταν μας δίνεται η μετρική (3-22), παρατηρούμε ότι εμφανίζεται ο χαρακτηριστικός παράγοντας : $1 - 2GM/r$, που εκφράζει μία ανωμαλία όταν έχουμε : $r \leq 2GM$. Πράγματι σ' αυτή την περίπτωση παίρνουμε:

$$g_{\infty} = 1 - \frac{2GM}{r} \quad \text{και} \quad g_{rr} = - \frac{1}{1 - \frac{2GM}{r}}$$

Σε μονάδες που $c = 1$, η ποσότητα : $r_s = 2GM$, ορίζει ένα χαρακτηριστικό μήκος και ονομάζεται ακτίνα ή και ανωμαλία Schwarzschild (εικ. 6).



Εικ. 6

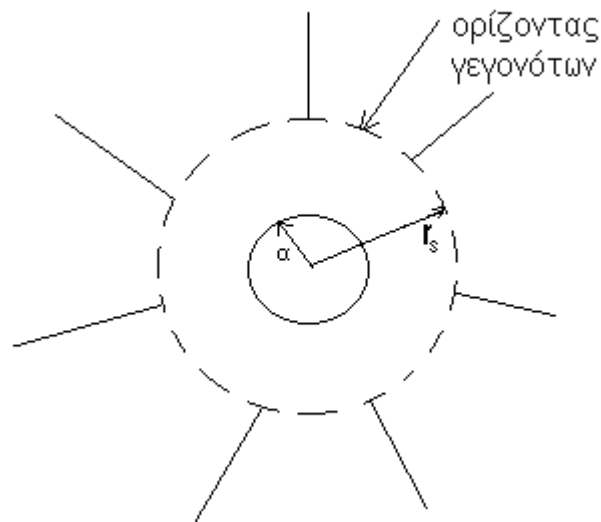
Για τις περιοχές όπου $r > r_s$ ο παράγοντας : $1 - 2GM/r > 0$ (I)

Για τις περιοχές όπου $r = r_s$ ο παράγοντας : $1 - 2GM/r = 0$ (II)

Για τις περιοχές όπου $r < r_s$ ο παράγοντας : $1 - 2GM/r < 0$ (III)

Η λύση είναι φυσική αν ισχύουν οι περιπτώσεις (I) και (II). Αν ισχύει η περίπτωση (III), η μετρική μας αντί των προσήμων (- + + +) γίνεται (+ - + +) στο συγκεκριμένο σύστημα, που είναι μη αποδεκτή. Για συνήθη άστρα (π.χ. Ήλιος), για εξωτερικές λύσεις των πεδιακών εξισώσεων Einstein : $r_s \leq \alpha \leq r$, δεν έχουμε πρόβλημα στην περιγραφή. Αν ένα άστρο, λόγω της βαρυτικής κατάρρευσης αποκτήσει : $\alpha < r_s$, τότε έχω μαύρη οπή και η λύση ισχύει μόνο για $r \geq r_s$.

Η νοητή σφαιρική επιφάνεια ακτίνας r_s , δεν παρουσιάζει ασυνήθεις ιδιότητες τοπικού χαρακτήρα. Εκδηλώνει όμως, μια ασυνήθη ιδιότητα καθολικού χαρακτήρα. Συγκεκριμένα είναι αδύνατον να στείλουμε οποιοδήποτε σήμα από την περιοχή $r < r_s$ στην περιοχή $r > r_s$. Δηλαδή, η επιφάνεια $r = r_s$ ενεργεί σαν "ημιπερατή μεμβράνη" μέσα στην οποία μπορούν να μπουν σήματα, αλλά δεν μπορούν να βγουν. Αυτή η επιφάνεια $r = r_s$ ονομάζεται ορίζοντας των γεγονότων.



Εικ. 7

Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι, η ανωμαλία Schwarzschild δεν είναι μια φυσική ανωμαλία, αλλά μια ανωμαλία που προκύπτει από την εκλογή του συγκεκριμένου συστήματος συντεταγμένων. Αυτό έχει σαν συνέπεια, η ανωμαλία Schwarzschild να μπορεί να απαλειφθεί σε ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων. Ο τανυστής καμπυλότητας και κατά συνέπεια οι παλιρροϊκές δυνάμεις παραμένουν πεπερασμένες στην επιφάνεια $r = r_s$. Ένας αστροναύτης για παράδειγμα, καθώς διέρχεται την επιφάνεια $r = r_s$ δεν θα αισθανθεί τίποτα το ιδιαίτερο.

Στην πραγματικότητα και επειδή αριθμητικά η σταθερά G είναι πολύ μικρή, για τις περισσότερες κατανομές μαζών που απαντώνται στην φύση ισχύει : $r_s \ll \alpha$. Για παράδειγμα, για μια μάζα ίση με την μάζα του Ηλίου, δηλαδή $M = 2 \times 10^{33} \text{ Kg}$ παίρνοντας τον τύπο για το S.I. που είναι : $r_s = 2GM/c^2$, βρίσκουμε $r_s = 3 \times 10^3 \text{ m}$.

Σημείωση : Η λύση Schwarzschild εκδηλώνει και μία άλλη ανωμαλία στο $r = 0$. Αυτή είναι μια πραγματική φυσική ανωμαλία με την έννοια ότι σ' αυτή την περίπτωση οι παλιρροϊκές δυνάμεις γίνονται άπειρες. Αυτό οφείλεται στο ότι μία ή περισσότερες συνιστώσες του τανυστή καμπυλότητας απειρίζονται για $r = 0$.

Μια περιοχή του χωροχρόνου, που περικλείεται από ένα ορίζοντα γεγονότων ονομάζεται μαύρη οπή. Ένα άστρο μάζας M γίνεται μαύρη οπή, όταν περάσει από το στάδιο της βαρυτικής κατάρρευσης και αποκτήσει μέγεθος $\alpha < r_s$ (εικ. 7). Γνωρίζουμε σήμερα ότι, το εναπομένον άστρο μετά την έκρηξη ενός supernova καταλήγει σε μαύρη οπή εφόσον η μάζα του υπερβαίνει μια κρίσιμη τιμή. Δημιουργία μαύρης οπής έχουμε επίσης σ' ένα δίδυμο αστρικό σύστημα στο οποίο συμβαίνει ανταλλαγή μάζας. Ο σχηματισμός μαύρης οπής με την διαδικασία της κατάρρευσης προϋποθέτει ότι η μάζα της πρέπει να υπερβαίνει το όριο Chandrasekhar που είναι περίπου ίσο με 1.4 ηλιακές μάζες. Εν τούτοις υπάρχει

πιθανότητα να σχηματιστεί μαύρη οπή και με πολύ μικρότερη μάζα, αν η ύλη συμπιεστεί σε μεγάλες πυκνότητες από εξωτερικές πιέσεις.

Οι ιδιότητες και η συμπεριφορά μιας μαύρης οπής εξαρτώνται από την μάζα της M , το spin S και το ηλεκτρικό της φορτίο Q . Όταν $S = 0$, τα πεδία που περιβάλλουν μια μαύρη οπή περιγράφονται από την λύση Schwarzschild, ενώ αν $S \neq 0$ περιγράφονται από την λύση Kerr.

3.3. ΒΑΡΥΤΙΚΗ ΦΑΣΜΑΤΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ

Στην Ειδική θεωρία της Σχετικότητας, ορίσαμε ως ιδιοχρόνο dt ενός παρατηρητή ή ενός σωματιδίου κινούμενου κατά μήκος μιας γεωδαισιακής καμπύλης, την ποσότητα ds (θεωρώντας $c = 1$), που είναι το μήκος τόξου της καμπύλης μετρούμενο τοπικά με αρχή κάποιο σημείο της. Ο ιδιοχρόνος ουσιαστικά αναπαριστά το χρονικό διάστημα που μετρά το ρολοί ενός παρατηρητή, που κάθετα ακίνητος σε κάποιο σημείο του χώρου, $dx^i = 0$, με $i = 1,2,3$. Επειδή η χωροχρονική απόσταση για $c = 1$ είναι : $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$, για τον συγκεκριμένο παρατηρητή θα έχουμε : $ds^2 = -dt^2$.

Αντίστοιχα, ορίζω την έννοια του ιδιοχρόνου και στην Γ.Θ.Σ. για παρατηρητή με $dx^i = 0$, όπου $i = 1,2,3$. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα ακίνητο ρολοί μέσα σ'ένα βαρυτικό πεδίο, οπότε: $dr = d\theta = d\phi = 0$. Τότε σύμφωνα με την μετρική :

$$ds^2 = -g_{00} dt^2 + g_{rr} dr^2 + g_{\theta\theta} d\theta^2 + g_{\phi\phi} d\phi^2$$

καταλήγουμε ότι :

$$d\tau = \sqrt{-g_{00}} dt$$

όπου $d\tau$ είναι το χρονικό διάστημα που δείχνει ένα ακίνητο ρολοί που βρίσκεται σε μεγάλη απόσταση από το βαρυτικό πεδίο και $g_{00} = 1 - 2GM/r$.

Στο όριο $r \rightarrow \infty$ βρίσκουμε $g_{00} \rightarrow 1$, οπότε σύμφωνα με την σχέση (3-23) θα έχουμε : $d\tau = dt$. Ένα ακίνητο ρολοί σε απόσταση r δείχνει το χρονικό διάστημα $d\tau$, που είναι μικρότερο από το dt . Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο ρυθμός ενός ακίνητου ρολογιού που είναι μέσα σ'ένα βαρυτικό πεδίο ελαττώνεται κατά τον παράγοντα $(-g_{00})^{1/2}$. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται βαρυτική διαστολή του χρόνου.

Σημείωση: Σύμφωνα με την σχέση (3-23), για ένα παρατηρητή που βρίσκεται σε μεγάλη απόσταση από ένα άστρο που υφίσταται βαρυτική κατάρρευση, το συγκεκριμένο φαινόμενο της κατάρρευσης δεν τελειώνει ποτέ. Η επιφάνεια του καταρρέοντος άστρου πλησιάζει ασυμπτωτικά την ακτίνα Schwarzschild, αλλά δεν την φτάνει ποτέ σε πεπερασμένο χρόνο. Γι'αυτό το λόγο, οι μαύρες οπές ονομάζονται και "παγωμένα άστρα". Τώρα αν ο παρατηρητής βρίσκεται πάνω σ'ένα τέτοιο άστρο, η κατάρρευση γίνεται πολύ γρήγορα και σε ελάχιστο χρόνο ο παρατηρητής θα προσκρούσει στην ανωμαλία Schwarzschild $r = 0$ (αν έχουμε σφαιρική συμμετρία). Οι Hawking και Penrose απέδειξαν την ύπαρξη μιας τέτοιας ανωμαλίας σχεδόν για κάθε βαρυτική κατάρρευση.

Κοσμική λογοκρισία(cosmic censorship) : Κάθε ανωμαλία που αναφέραμε προηγουμένως, περιβάλλεται από ένα ορίζοντα γεγονότων, κατά συνέπεια είναι αθέατη από ένα εξωτερικό παρατηρητή. Αυτό οδήγησε τον Penrose να προτείνει την υπόθεση της κοσμικής λογοκρισίας : "Δεν υπάρχουν λύσεις των πεδιακών εξισώσεων Einstein με "γυμνές" χωροχρονικές ανωμαλίες". Με τον όρο "γυμνές" εννοούμε μη καλυμμένες από ορίζοντα γεγονότων. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι, η ανωμαλία που σχηματίζεται από την βαρυτική κατάρρευση δεν είναι ποτέ "γυμνή", αφού καλύπτεται από ένα ορίζοντα γεγονότων, που κρύβει την ανωμαλία από κάθε εξωτερικό παρατηρητή. Η σπουδαιότητα αυτής της υπόθεσης, που προφανώς ισχύει στην περίπτωση της σφαιρικής συμμετρίας, είναι σημαντική. Θεωρούμε ότι, στις ακραίες συνθήκες που επικρατούν στην περιοχή της ανωμαλίας(π.χ. πιθανόν άπειρη πυκνότητα), οι ιδιότητες της φύσης σε μικροσκοπική κλίμακα διέπονται από την κβαντική θεωρία.

Παρατήρηση : Όταν ο τανυστής ενέργειας - ορμής ενός συστήματος μεταβάλλεται χρονικά, τότε θα έχουμε εκπομπή βαρυτικών κυμάτων. Για παράδειγμα, έντονη εκπομπή βαρυτικών κυμάτων έχουμε: α) στην περίπτωση δίδυμων άστρων, που είναι πολύ κοντά και κάποιο απ'αυτά ή και τα δύο είναι άστρο νετρονίων ή λευκός νάνος, β) στην περίπτωση βαρυτικής κατάρρευσης.

Επανερχόμαστε πάλι στην εξέταση της σχέσης (3-23). Παρατηρούμε ότι είναι δυνατόν να συγκρίνουμε το ιδιοχρονικό διάστημα που μετρούν δύο διαφορετικοί ακίνητοι παρατηρητές μέσα στην ίδια γεωμετρία. Έστω λοιπόν δύο ακίνητα ρολόγια που βρίσκονται σε δύο διαφορετικές θέσεις x_1 και x_2 . Για ένα δεδομένο dt έχουμε:

$$d\tau_1 = \frac{1}{\sqrt{-g_{00}(x_1)}} dt$$

$$d\tau_2 = \frac{1}{\sqrt{-g_{00}(x_2)}} dt$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (3-24), (3-25) βρίσκουμε :

$$\frac{d\tau_2}{d\tau_1} = \frac{\sqrt{-g_{00}(x_1)}}{\sqrt{-g_{00}(x_2)}} \approx 1 - \frac{GM}{r_2} + \frac{GM}{r_1}$$

όπου λάβαμε υπόψιν την σχέση : $g_{00} = 1 - 2GM/r$.

Κατά συνέπεια, σ'ένα τυχαίο βαρυτικό πεδίο έχουμε μετατόπιση στο φάσμα της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, που μετρούν δύο διαφορετικοί παρατηρητές.

Η σχέση (3-26) μπορεί να γίνει :

$$f_2 = \frac{f_1 \sqrt{-g_{00}(x_1)}}{\sqrt{-g_{00}(x_2)}}$$

όπου f_1, f_2 οι συχνότητες στις θέσεις x_1 και x_2 αντίστοιχα.

Παρατηρούμε ότι το γινόμενο :

$$f \sqrt{-g_{00}(x)}$$

είναι σταθερό σε όλα τα σημεία. Περιοχές με μεγάλες τιμές του $g_{00}(x)$ έχουν μικρή τιμή στην συχνότητα f (βαρυτική μετατόπιση φάσματος προς το ερυθρό), ενώ περιοχές με μικρές τιμές του $g_{00}(x)$ έχουν μεγάλη τιμή στην συχνότητα f (βαρυτική μετατόπιση φάσματος προς το ιώδες), σε αντιδιαστολή με την μετατόπιση Doppler.

Γνωρίζουμε ότι, το "κλασσικό" δυναμικό Φ σε μια σφαιρική κατανομή μάζας είναι $\Phi = -GM/r$, οπότε η σχέση (3-26), λαμβάνοντας υπόψιν την προσέγγιση γίνεται :

$$\frac{d\tau_2}{d\tau_1} \approx 1 + \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{c^2} - 2 \frac{v^2}{c^2}$$

Αν εργαστούμε στο σύστημα μονάδων S.I. τότε: $g_{00}(\mathbf{x}) = 1 - 2GM/rc^2$, οπότε η σχέση (3-28) γράφεται :

$$\frac{d\tau_2}{d\tau_1} \approx 1 + \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{c^2} - 2 \frac{v^2}{c^2}$$

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 4

Η Σχετικιστική Κοσμολογία βασίζεται σε τρεις υποθέσεις:

- I) Την κοσμολογική αρχή,
- II) το αξίωμα του Weyl
- III) την Γ.Θ.Σ.

4.1. Η ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΚΗ ΑΡΧΗ (cosmological principle)

Πώς είναι κατανοημένη η ύλη στο Σύμπαν;

Σε μικρές κλίμακες (κάτω των 10^8 ετών φωτός), οι παρατηρήσεις δείχνουν ότι στο σύμπαν η ύλη αλλού είναι πιο πυκνή και αλλού πιο αραιή, δηλαδή παρουσιάζεται ανομοιομορφία και ανομοιογένεια. Σε μεγάλες κλίμακες όμως (πολύ πάνω των 10^8 ετών φωτός), οι παρατηρήσεις δείχνουν ότι το Σύμπαν είναι ομογενές και ισοτροπικό, τουλάχιστον σε μια καλή προσέγγιση. Αυτό σημαίνει ότι κανένα σημείο και καμία κατεύθυνση δεν είναι περισσότερο προτιμητέα από άλλα, για καμία χρονική στιγμή. Αυτή είναι η κοσμολογική αρχή που διατυπώθηκε το 1948 από τον αστρονόμο H. Bondi. Πάνω σ' αυτή την αρχή θεμελιώνεται σήμερα όλη η σύγχρονη κοσμολογία. Αργότερα οι H. Bondi και T. Gold διετύπωσαν την λεγόμενη τέλεια κοσμολογική αρχή (Perfect cosmological principle), σύμφωνα με την οποία υπάρχει όχι μόνο ισοδυναμία των διαφόρων παρατηρητών, αλλά και η εικόνα που αποκομίζει καθένας απ' αυτούς για το Σύμπαν δεν αλλάζει με τον χρόνο ούτε ποιοτικά ούτε ποσοτικά. Η αρχή αυτή οδηγεί στο λεγόμενο πρότυπο σταθερής κατάστασης (steady-state model), σύμφωνα με το οποίο η κατανομή της ύλης στο Σύμπαν θα πρέπει να είναι ομοιόμορφη και σταθερή με τον χρόνο. Αυτό όμως σύντομα εγκαταλείφθηκε, εφόσον δεν άντεχε σε καμία πειραματική επαλήθευση.

Έτσι, η κοσμολογική αρχή διατυπώνεται ως εξής :

"Σε κάθε περίοδο, το Σύμπαν φαίνεται ακριβώς το ίδιο από οποιοδήποτε σημείο, με εξαίρεση τοπικές ανωμαλίες". Μια πολλαπλότητα χωρίς προνομιούχες κατευθύνσεις γύρω από ένα σημείο ονομάζεται ισοτροπική και πρέπει να είναι σφαιρικά συμμετρική σ' αυτό το σημείο. Αποδεικνύεται ότι η ισοτροπία περιέχει την ομοιογένεια, το αντίστροφο όμως δεν ισχύει. Η κοσμολογική αρχή επιβεβαιώθηκε πειραματικά το 1965 με την ανακάλυψη των κοσμικών μικροκυμάτων υποβάθρου, από τους Penzias και Wilson. Αυτοί ανακάλυψαν ότι το Σύμπαν διαπερνάται από θερμική ακτινοβολία θερμοκρασίας 2.7K και επιπλέον, αυτή η ακτινοβολία είναι ισοτροπική σε κλάσματα του 1%. Η γενικώς αποδεκτή εξήγηση είναι, ότι αυτή η ακτινοβολία αποτελεί τα θερμικά κατάλοιπα της μεγάλης έκρηξης.

4.2. Η ΑΡΧΗ ΤΟΥ WEYL

Το 1923, ο H. Weyl πρόσθεσε ότι οι γεωδαισιακές δεν τέμνονται, εκτός από ένα μοναδικό σημείο στο παρελθόν και πιθανώς από ένα παρόμοια μοναδικό σημείο στο μέλλον. Υπάρχει κατά συνέπεια, μία και μόνο μία γεωδαισιακή, που περνάει από ένα σημείο του χωροχρόνου και επομένως, η ύλη σε κάθε σημείο κατέχει μια μοναδική ταχύτητα.

4.3. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΚΗΣ ΣΠΟΥΔΑΙΟΤΗΤΑΣ

Η Κοσμολογία μελετά τις ιδιότητες του Σύμπαντος σε μεγάλη κλίμακα. Από διάφορες παρατηρήσεις και αναλύσεις, σήμερα πιστεύουμε ότι το Σύμπαν γεννήθηκε πριν 10-25 δισεκατομμύρια χρόνια από μια τρομακτική έκρηξη (big-bang). Πριν από την έκρηξη αυτή το Σύμπαν θεωρείται ότι ήταν συμπιεσμένο σ' ένα υλικό σημείο με άπειρη πυκνότητα (singular point), από το οποίο αποδεσμεύτηκε όλη η μάζα και η ενέργεια του Σύμπαντος όπως το βλέπουμε σήμερα. Μετά την μεγάλη έκρηξη το Σύμπαν άρχισε να διαστέλλεται αυξάνοντας τον όγκο του και μειώνοντας την πυκνότητά του. Η διαστολή αυτή πιστεύεται ότι συνεχίζεται μέχρι σήμερα. Οι παρατηρήσεις που θεωρούνται ότι έχουν μεγάλο κοσμολογικό ενδιαφέρον και κάποιες απ' αυτές συνηγορούν υπέρ του μοντέλου της μεγάλης έκρηξης είναι :

A) Κατανομή των Γαλαξιών : Ο αριθμός των παρατηρούμενων γαλαξιών ανά μονάδα στερεάς γωνίας προς οποιαδήποτε διεύθυνση είναι σταθερός, πλην ορισμένων περιπτώσεων. Επίσης ο αριθμός των γαλαξιών ανά μονάδα όγκου είναι περίπου ίδιος. Επομένως το Σύμπαν μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι ομογενές και ισότροπο.

B) Διαστολή του Σύμπαντος : Όταν ο Slipher (1912) ασχολήθηκε με τον προσδιορισμό της ακτινικής ταχύτητας των γαλαξιών, διεπίστωσε ότι οι φασματικές γραμμές των περισσότερων γαλαξιών παρουσιάζουν μετάθεση προς το ερυθρό (red-shift). Αργότερα ο Hubble το 1932 μετά από πολλές παρατηρήσεις επιβεβαίωσε την καθολικότητα της μετάθεσης των γραμμών προς το ερυθρό. Οι λίγες εξαιρέσεις που είχαν παρατηρηθεί ήταν προς την διεύθυνση της κίνησης του Ηλίου γύρω από το κέντρο του γαλαξία μας και οφείλοντο σ' αυτήν. Ο Hubble λοιπόν πρότεινε την ιδέα πως όλοι οι γαλαξίες απομακρύνονται από την Γη και άρα από τον δικό μας γαλαξία, με μια ταχύτητα που είναι ανάλογη της απόστασης που τους χωρίζει από μας. Ο νόμος αυτός, γνωστός σαν νόμος του Hubble, εκφράζεται από την σχέση :

$$v = r_i H - 1$$

όπου v η σχετική ταχύτητα ενός γαλαξία ως προς τον δικό μας, $r_i(t)$ η απόστασή του από τον δικό μας και $H(t)$ μια συνάρτηση του χρόνου, που είναι η ίδια για όλους τους γαλαξίες και ονομάζεται παράμετρος Hubble. Αν υποθέσουμε ότι Δl είναι η

μετατόπιση του μήκους κύματος μιας φασματικής γραμμής λ , λόγω φαινομένου Doppler, τότε θα έχουμε :

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \quad (4-1)$$

όπου λ_0 το μήκος κύματος της πηγής και $\beta = v/c$. Για $v \ll c$ θα έχουμε:

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \approx \frac{1 + \frac{1}{2}\beta^2}{1 - \beta} \approx \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right) (1 + \beta)$$

οπότε η (4-2) γίνεται :

$$\frac{v}{c} \approx \frac{\lambda}{\lambda_0} - 1 = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$$

Οι αστρονόμοι ορίζουν την μετατόπιση προς το ερυθρό μέσω της παραμέτρου :

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$$

Άρα σύμφωνα και με την σχέση (4-1) για $\beta \ll 1$ καταλήγουμε :

$$z \approx \frac{v}{c} = \frac{Hr_i}{c} \quad (4-3)$$

Ο ρυθμός διαστολής του Σύμπαντος καθορίζεται από την παράμετρο Hubble. Η σημερινή τιμή του ρυθμού διαστολής δηλαδή της σταθεράς του Hubble είναι :

$$H_0 = 100 h \text{ kmMpc}^{-1}, \quad 0.5 \leq h \leq 0.85$$

όπου h εκφράζει την απόκλιση από την αριθμητική αυτή τιμή.

Η εξίσωση του Hubble δεν είναι παρά μια μαθηματική συνέπεια της κοσμολογικής αρχής, που λέει ότι το Σύμπαν πρέπει να φαίνεται το ίδιο σε παρατηρητές οποιουδήποτε γαλαξία σε όποια διεύθυνση και αν κοιτάνε, οπότε αναπόφευκτα η σχετική ταχύτητα δύο γαλαξιών θα πρέπει να είναι ανάλογη της σχετικής τους απόστασης.

Γ) Παράδοξο του Olbers: Το 1826 ο Olbers κατέληξε στο συμπέρασμα ότι ο νυκτερινός ουρανός πρέπει να έχει ομοιόμορφη λαμπρότητα ίση με την λαμπρότητα του ηλιακού δίσκου. Η προφανής αντίθεση του συμπεράσματος αυτού με την πραγματικότητα αποτελεί το παράδοξο του Olbers.

Οι υποθέσεις επί των οποίων βασίστηκε το συμπέρασμα του Olbers είναι :

- 1) Η κατανομή των αστερών είναι ομογενής.
- 2) Η μέση τιμή της λαμπρότητας και της ακτίνας των αστερών ενός επαρκώς μεγάλου όγκου δεν μεταβάλλεται με την θέση και τον χρόνο.
- 3) Το Σύμπαν είναι άπειρο και στατικό.

Με βάση αυτές τις υποθέσεις ο Olbers απέδωσε τον νυκτερινό ουρανό στην ύπαρξη ενός λεπτού απορροφητικού μέσου που ελαττώνει το φως των αστερών. Αυτό όμως δεν λύνει το πρόβλημα, γιατί το μέσο αυτό λόγω της διαρκούς θέρμανσης θα ακτινοβολούσε τελικά ενέργεια ίση με αυτή που απορροφά.

Το συμπέρασμα του Olbers προκύπτει ως εξής : θεωρούμε ένα σφαιρικό κέλυφος ακτίνας r και πάχους dr , και ας ορίσουμε με I το γινόμενο του μέσου αριθμού

αστεριών ανά μονάδα όγκου και της μέσης φωτεινότητας ανά αστέρι. Η ένταση στο κέντρο του κέλφους θα δοθεί από τη συνολική φωτεινότητα που παράγεται από το κέλφος, δια του εμβαδού της περιοχής, που είναι προσεγγιστικά :

$$\Phi = \frac{4\pi r^2 I_{dr}}{4\pi r^2} = I_{dr}$$

Αν περιβάλλουμε οποιοδήποτε σημείο P με μια άπειρη διαδοχή από κελύφη, πάχους dr το καθένα, τότε η ολική ένταση στο P θα είναι :

$$\Phi_{ολ} = \int_0^{\infty} I_{dr} dr$$

που είναι άπειρη.

Πολλές ερμηνείες είναι δυνατόν να δοθούν για να δικαιολογηθεί το παράδοξο του Olbers. Γνωρίζουμε ότι, η κατανομή των αστερών δεν είναι ομογενής. Αν όμως λάβουμε του γαλαξίες αντί των αστερών, η πρώτη υπόθεση ισχύει. Όσον αφορά την δεύτερη υπόθεση, αυτή προϋποθέτει ότι το Σύμπαν είναι αιώνιο. Αν όμως έχει πεπερασμένη ηλικία, το παραπάνω ολοκλήρωμα δεν είναι άπειρο και κατά συνέπεια προκύπτει τιμή πολύ μικρότερη. Η τρίτη υπόθεση περί στατικού Σύμπαντος δεν ευσταθεί αφού το Σύμπαν είναι διαστελλόμενο.

Δ) Ακτινοβολία 3K (ακτινοβολία υπόβαθρου): Την στιγμή της μεγάλης έκρηξης η θερμοκρασία και η πυκνότητα του Σύμπαντος είχαν άπειρες τιμές. Μετά την μεγάλη έκρηξη η θερμοκρασία αρχίζει να πέφτει γρήγορα. Στο τέλος του 1^{ου} sec μετά την έκρηξη, αποδεικνύεται ότι η θερμοκρασία του Σύμπαντος έχει πέσει στους 10K. Τα διάφορα σωμάτια έχουν κινητικές ενέργειες της τάξης των 1MeV, οπότε κανένα άτομο δεν μπορεί να δημιουργηθεί. Αυτά τα σωμάτια καθώς κινούνται ταχύτατα εκπέμπουν και απορροφούν συνεχώς ακτινοβολία, δηλαδή φωτόνια. Καθώς ο χρόνος όμως κυλάει, το Σύμπαν εξακολουθεί να διαστέλλεται και ταυτόχρονα η θερμοκρασία του πέφτει συνεχώς, οπότε αρχίζουν να σχηματίζονται οι πρώτοι σταθεροί πυρήνες και αργότερα τα πρώτα άτομα στοιχείων. Από την στιγμή που υπάρχουν άτομα, η αλληλεπίδραση με αυτά των φωτονίων της ακτινοβολίας είναι πιο ασθενική απ' ότι πριν. Μπορούμε να πούμε ότι η ακτινοβολία αποδεσμεύεται από την ύλη και παύει πλέον να αλληλεπιδρά μ' αυτήν. Ακολουθως η ακτινοβολία αρχίζει πια να ταξιδεύει σχεδόν ελεύθερα στο Σύμπαν, γεμίζοντάς το ομοιόμορφα. Σήμερα αυτή η ακτινοβολία είναι διάχυτη στο Σύμπαν, σαν ένα φωτονικό αέριο, που συνεχίζει να ψύχεται και υπολογίζεται ότι θα πρέπει να είναι γύρω στους 3K. Αν καταφέρουμε να ανιχνεύσουμε την παραπάνω ακτινοβολία μ' ένα δέκτη θα πρέπει να έχει μήκος κύματος : $\lambda = hc / kT = 7.35\text{cm}$. Πραγματικά το 1964 δύο φυσικοί οι A. Penzias και R. Wilson, συνέλαβαν συμπτωματικά με την κεραία τους μια ακτινοβολία με το παραπάνω μήκος κύματος. Μάλιστα αυτή η ακτινοβολία ήταν ανεξάρτητη από την στιγμή της παρατήρησης και ανεξάρτητη από την διεύθυνση προς την οποία έστρεφαν την κεραία. Αυτή η παρατήρηση, ισχυροποιούσε περισσότερο το μοντέλο της μεγάλης έκρηξης και μαζί με την φυγή των γαλαξιών του Hubble, αποδείκνυε ότι το Σύμπαν μας διαστέλλεται.

4.3. ΜΕΤΡΙΚΗ ROBERTSON - WALKER

Στην κλασική φυσική ο χώρος θεωρείται ευκλείδειος. Η υπόθεση αυτή που ισχύει σε γειτονικές περιοχές του χώρου δεν είναι κατ'ανάγκη αληθινή σ'ολόκληρο το σύμπαν. Θεωρούμε ένα ιδανικό Σύμπαν (ισότροπο και ομογενές), πλήρες από ιδανικό ρευστό, που χαρακτηρίζεται από μια χρονοεξαρτημένη πυκνότητα ενέργειας $\rho(t)$ και πίεση $p(t)$. Μαθηματικά, ο χωρόχρονος της Κοσμολογίας βασίζεται στην Γ.Θ.Σ. με την μετρική Robertson-Walker :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = - dt^2 + dl^2$$

$$ds^2 = - dt^2 + R^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (4-4)$$

Σ' αυτή την σχέση οι συντεταγμένες (t, r, θ, ϕ) είναι γνωστές σαν "ομοκινούμενες" συντεταγμένες (comoving coordinates), από το γεγονός ότι οι χωρικές συντεταγμένες (r, θ, ϕ) είναι σταθερές στον χρόνο για παρατηρητές των οποίων η μόνη κίνηση είναι αποτέλεσμα της κοσμικής διαστολής. Ως "ομοκινούμενο" σύστημα συντεταγμένων (comoving coordinate system) ή τοπικό σύστημα συντεταγμένων (local rest frame) ενός παρατηρητή ή ενός σωματιδίου ή ενός στοιχειώδους τριδιάστατου όγκου ενός ρευστού ονομάζεται το σύστημα συντεταγμένων, ως προς το οποίο ο παρατηρητής ακινητεί και σε μια μικρή περιοχή του οποίου ο χωρόχρονος μπορεί να θεωρηθεί (τοπικά) επίπεδος, δηλαδή :

$$U^0 = U_0 = 1, \quad U^i = U_i = 0, \quad \Gamma_{\kappa\lambda}^\mu = 0$$

Η συνάρτηση $R(t)$ είναι ο χρονοεξαρτημένος παράγοντας κοσμικής κλίμακας. Επειδή στην περίπτωση ενός σφαιρικού χώρου η $R(t)$ καθορίζει την κλίμακα του σφαιρικού Σύμπαντος σε κάθε χρονική στιγμή, γι' αυτό λέγεται και "ακτίνα του σφαιρικού Σύμπαντος" ή "παράγοντας διαστολής χώρου". Η σταθερά k εκφράζει το είδος του χώρου και μπορεί με την κατάλληλη εκλογή της κλίμακας των συντεταγμένων να παίρνει την τιμή $+1, 0, -1$ ανάλογα αν ο χώρος είναι σφαιρικός (θετική καμπυλότητα), ευκλείδειος (μηδενική καμπυλότητα) ή υπερβολικός (αρνητική καμπυλότητα) αντίστοιχα. Η καμπυλότητα και η ακτίνα καμπυλότητας του χώρου είναι :

$$K = \frac{1}{R^2}, \quad R_k = \frac{1}{k} \quad (4-5)$$

και καθορίζονται από τον $R(t)$ σε κάθε χρονική στιγμή t (κοσμικός χρόνος).

Η συντεταγμένη r στην σχέση (4-4) είναι αδιάστατη, που σημαίνει ότι ο παράγοντας $R(t)$ έχει διαστάσεις μήκους και συσχετίζει την "ομοκινούμενη" συντεταγμένη r με την αντίστοιχη "φυσική" απόσταση d μέσω της σχέσης : $d_{\text{φυσ}} = R(t)r$.

Ο μετρικός τανυστής $g_{\mu\nu}$ στην περίπτωσή μας είναι :

$$g_{\mu\nu} = R^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{R^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad - 6$$

με συνιστώσες :

$$g_{00} = -1 = g^{\infty}, \quad g_{11} = \frac{R^2}{1-kr^2} = g^{11}, \quad g_{22} = R^2 r^2 = g^{22},$$

$$g_{33} = R^2 r^2 \sin^2 \theta = g^{33}, \quad -g = \frac{R^3 r^2 \sin \theta}{1-kr^2}$$

4.4. ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΕΙΣΩΣΕΙΣ ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΑΣ

Θεωρώ ένα κοσμικό ιδανικό σχετικιστικό ρευστό με πυκνότητα ενέργειας $\rho(t)$ και πίεση $p(t)$. Στην Ε.Θ.Σ. ο τανυστής ενέργειας-ορμής αυτού του ρευστού δίνεται από την σχέση :

$$T^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu + p g^{\mu\nu} \quad - 7$$

όπου U^μ το τετραδιάνυσμα της ταχύτητας του ρευστού, με νορμαλισμό $U^\mu U_\mu = -1$.

Στην Γ.Θ.Σ. ο αντίστοιχος τανυστής ενέργειας-ορμής είναι :

$$T^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu + p g^{\mu\nu} \quad - 7$$

Στο "ομοκινούμενο" σύστημα συντεταγμένων όπου $U^i = 0$, έχω :

$$T^{\infty} = \rho + p$$

$$T^{oi} = p g^{oi}$$

$$T^{ij} = p g^{ij}$$

Για διαγώνιες μετρικές όπως των Robertson-Walker, έχουμε :

$$T^{\infty} = \rho + p, \quad T^{\infty} = \rho, \quad T^{oi} = 0, \quad T^{ij} = p g^{ij}$$

οπότε ο τανυστής ενέργειας-ορμής γράφεται :

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho + p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p g_{33} \end{pmatrix} \quad - 8$$

Με έναν συναλλοίωτο δείκτη που ανυψώνεται αυτός λαμβάνει την καταλληλότερη μορφή :

$$T^\mu_\nu = \rho \delta^\mu_\nu - p \delta^\mu_\nu$$

οπότε :

$$T_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} - g$$

Το ίχνος δίνεται από την σχέση :

$$T = T_{\mu}^{\mu} = -\rho + 3p \quad - 1$$

Σημειώνουμε ότι σε όλες τις παραπάνω σχέσεις έχουμε λάβει ότι $c = 1$.

Λύνουμε τις εξισώσεις του Einstein :

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad - 1$$

για να βρούμε τις δυναμικές εξισώσεις Κοσμολογίας.

Αρχικά υπολογίζουμε τα σύμβολα Christoffel σύμφωνα με την σχέση :

$$\Gamma_{\lambda\mu}^{\kappa} = \frac{1}{2} g^{\kappa\nu} (\partial_{\nu\mu} g_{\lambda\nu} + \partial_{\nu\lambda} g_{\mu\nu} - \partial_{\lambda\mu} g_{\nu\nu})$$

Άρα έχουμε :

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{1\kappa} (\partial_{\nu 1} g_{1\kappa} + \partial_{\nu 1} g_{1\kappa} - \partial_{11} g_{\nu\nu})$$

$$\frac{1}{2} g^{11} (\partial_{11} g_{11} + \partial_{11} g_{11} - \partial_{11} g_{11}) = \frac{1}{2} g^{11} \partial_{11} g_{11}$$

$$g_{11,1} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{R^2}{1 - kr^2} \right) = \frac{2R^2}{1 - kr^2} \cdot (-kr)$$

$$\text{Άρα : } \Gamma_{11}^1 = \frac{kr}{1 - kr^2}$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} g^{1\kappa} (\partial_{\nu 2} g_{2\kappa} + \partial_{\nu 2} g_{2\kappa} - \partial_{22} g_{1\kappa})$$

$$\frac{1}{2} g^{11} (\partial_{12} g_{21} + \partial_{12} g_{21} - \partial_{22} g_{11}) = \frac{1}{2} \frac{kr^2}{r^2} \left(\frac{2R^2}{1 - kr^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{2R^2}{1 - kr^2} \right)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -r \frac{kr}{1 - kr^2}$$

$$\Gamma_{33}^1 = \frac{1}{2} g^{1\kappa} (\partial_{\nu 3} g_{3\kappa} + \partial_{\nu 3} g_{3\kappa} - \partial_{33} g_{1\kappa})$$

$$\frac{1}{2} \frac{kr^2}{r^2} \left(\frac{2R^2}{1 - kr^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{2R^2}{1 - kr^2} \right) \sin^2 \theta$$

$$\Gamma_{33}^1 = -r \frac{kr}{1 - kr^2} \sin^2 \theta$$

$$\Gamma_{33}^2 = \frac{1}{2} g^{2\kappa} (\partial_{\nu 3} g_{3\kappa} + \partial_{\nu 3} g_{3\kappa} - \partial_{33} g_{2\kappa})$$

$$\frac{1}{2} \frac{2R^2}{r^2} \left(\frac{2R^2}{1 - kr^2} \right) \sin^2 \theta - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{2R^2}{1 - kr^2} \right) \sin^2 \theta$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta$$

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{1}{2} g^{0\kappa} (\partial_{\nu 1} g_{1\kappa} + \partial_{\nu 1} g_{1\kappa} - \partial_{11} g_{0\kappa})$$

$$\frac{1}{2} g^{00} (\partial_{01} g_{10} + \partial_{01} g_{10} - \partial_{11} g_{00})$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{R}{\sqrt{t}} \right) - \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{R}{\sqrt{t}} \right) \right) \Gamma_{11}^0 = \frac{R R}{1 - k r^2}$$

$$\Gamma_{22}^0 = \frac{1}{2} g^{0\kappa} \left(g_{\kappa 2, 2} - g_{2\kappa, 2} - g_{22, \kappa} \right) \frac{1}{2} g^{00} \left(g_{02, 2} - g_{20, 2} - g_{22, 0} \right)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{R}{\sqrt{t}} \right) - \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{R}{\sqrt{t}} \right) \right) \Gamma_{22}^0 = R R r^2$$

$$\Gamma_{33}^0 = \frac{1}{2} g^{0\kappa} \left(g_{\kappa 3, 3} - g_{3\kappa, 3} - g_{33, \kappa} \right) \frac{1}{2} g^{00} \left(g_{03, 3} - g_{30, 3} - g_{33, 0} \right)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{R}{\sqrt{t}} \right) - \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{R}{\sqrt{t}} \right) \right) \Gamma_{33}^0 = R R r^2 \sin^2 \theta$$

$$\Gamma_{01}^1 = \frac{1}{2} g^{1\kappa} \left(g_{\kappa 1, 0} - g_{0\kappa, 1} - g_{01, \kappa} \right) \frac{1}{2} g^{11} \left(g_{11, 0} - g_{01, 1} - g_{01, 1} \right)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{R}{\sqrt{t}} \right) - \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{R}{\sqrt{t}} \right) \right) \Gamma_{01}^1 = \frac{R}{R} = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3$$

$$\Gamma_{02}^2 = \frac{1}{2} g^{2\kappa} \left(g_{\kappa 1, 2} - g_{2\kappa, 1} - g_{12, \kappa} \right) \frac{1}{2} g^{22} \left(g_{21, 2} - g_{22, 1} - g_{12, 2} \right)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{R}{\sqrt{t}} \right) - \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{R}{\sqrt{t}} \right) \right) \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{13}^3$$

$$\Gamma_{23}^3 = \frac{1}{2} g^{3\kappa} \left(g_{\kappa 3, 2} - g_{2\kappa, 3} - g_{23, \kappa} \right) \frac{1}{2} g^{33} \left(g_{33, 2} - g_{23, 3} - g_{23, 3} \right)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{R}{\sqrt{t}} \right) - \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{R}{\sqrt{t}} \right) \right) \Gamma_{23}^3 = 0 \cot \theta$$

Τα υπόλοιπα σύμβολα Christoffel είναι μηδέν.

Τώρα υπολογίζουμε τον ταυνοστή Ricci σύμφωνα με την σχέση :

$$R_{\mu\nu} = -\Gamma_{\mu\sigma, \nu}^{\sigma} + \Gamma_{\mu\nu, \sigma}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} \Gamma_{\rho\nu}^{\sigma} + \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma}$$

οπότε έχουμε :

$$R_{00} = -\Gamma_{0\sigma, 0}^{\sigma} + \Gamma_{00, \sigma}^{\sigma} - \Gamma_{0\sigma}^{\rho} \Gamma_{\rho 0}^{\sigma} + \Gamma_{00}^{\rho} \Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma} =$$

$$-\frac{1}{\sqrt{t}} \Gamma_{10}^1 - \frac{1}{\sqrt{t}} \Gamma_{20}^2 - \frac{1}{\sqrt{t}} \Gamma_{30}^3 - \frac{1}{10} \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{20}^2 \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{30}^3 \Gamma_{03}^3$$

$$-\frac{1}{\sqrt{t}} \left(\frac{R}{R} - \frac{R}{R} \right) - \frac{1}{\sqrt{t}} \left(\frac{R}{R} - \frac{R}{R} \right) - \frac{1}{\sqrt{t}} \left(\frac{R}{R} - \frac{R}{R} \right) + \frac{R^2}{R^2} + \frac{R^2}{R^2}$$

$$R_{00} = -3 \frac{R R - R^2}{R^2} - 3 \frac{R^2}{R^2}$$

$$R_{00} = -3 \frac{R}{R}$$

$$R_{11} = -\Gamma_{1\sigma, 1}^{\sigma} + \Gamma_{11, \sigma}^{\sigma} - \Gamma_{1\sigma}^{\rho} \Gamma_{\rho 1}^{\sigma} + \Gamma_{11}^{\rho} \Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma} =$$

$$R_{33} = R + 2R^2 + 2k r^2 \sin^2 \theta$$

Οι τανυστές Ricci της μορφής R_{oi} με $i = 1, 2, 3$ είναι εκ ταυτότητας μηδέν. Συνοπτικά λοιπόν μπορούμε να γράψουμε :

$$R_{00} = -3 \frac{R}{R^2} (1 - kr^2) = 0, \text{ για } i = 1, 2, 3$$

$$R_{ij} = \frac{1}{R^2} (R + 2R^2 + 2k r^2 \sin^2 \theta) g_{ij}, \text{ για } i, j = 1, 2, 3$$

Κατά συνέπεια η βαθμωτή καμπυλότητα Ricci θα είναι :

$$R = R_{\mu}^{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33} =$$

$$3 \frac{R}{R^2} (1 - kr^2) + \frac{1}{R^2} r^2 (R + 2R^2 + 2k r^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{R^2} r^2 \sin^2 \theta (R + 2R^2 + 2k r^2 \sin^2 \theta)$$

$$R = \frac{6}{R^2} (R + R^2 + k r^2)$$

Άρα οι συνιστώσες του τανυστή Einstein θα είναι :

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2} R g_{00} = -3 \frac{R}{R^2} (1 - kr^2) - \frac{1}{2} \frac{6}{R^2} (R + R^2 + k r^2)$$

$$G_{00} = \frac{3}{R^2} (R^2 + k r^2)$$

$$G_{oi} = R_{oi} - \frac{1}{2} R g_{oi} = 0$$

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} = \frac{1}{R^2} (R + 2R^2 + 2k r^2 \sin^2 \theta) g_{ij} - \frac{6}{2 R^2} (R + R^2 + k r^2) g_{ij}$$

$$G_{ij} = - \frac{2R(R + R^2 + k r^2)}{R^2} g_{ij}$$

Επομένως, αντικαθιστώντας τα αποτελέσματα που βρήκαμε στις πεδιακές εξισώσεις του Einstein έχουμε για την $(t-t)$ συνιστώσα :

$$G_{00} = 8 \pi G T_{00} \Rightarrow \frac{3}{R^2} (R^2 + k r^2) = 8 \pi G \rho$$

$$R^2 (R^2 + k r^2) = \frac{8 \pi}{3} G \rho r^2$$

Η εξίσωση (4-19), αποτελεί την βασική κοσμολογική εξίσωση ονομάζεται δε και πρώτης τάξης διαφορική εξίσωση του Friedmann.

$$G_{oi} = 8 \pi G T_{oi} \Rightarrow 0 = 0$$

$$G_{ij} = 8 \pi G T_{ij} \Rightarrow - \frac{2R(R + R^2 + k r^2)}{R^2} g_{ij} = 8 \pi G p g_{ij}$$

$$2R(R + R^2 + k r^2) = -8 \pi G p r^2$$

Άρα έχω δύο εξισώσεις τις (4-19) και (4-20), για τις τρεις μεταβλητές $R(t)$, $p(t)$, $\rho(t)$.

Αν αφαιρέσουμε κατά μέλη τις εξισώσεις (4-19) και (4-20) παίρνουμε την εξίσωση για την ακτινική επιτάχυνση του Σύμπαντος:

$$\frac{2}{3} \frac{d^2 R}{dt^2} = \frac{4\pi G}{3} \rho R - 2 \frac{d}{dt} \left(\frac{R}{R} \right)$$

Παραγωγίζουμε ως προς τον χρόνο την σχέση (4-19), οπότε έχουμε :

$$2 \frac{d}{dt} \left(\frac{dR}{dt} \right) = \frac{8\pi G}{3} R^2 + 2 \rho R \frac{dR}{dt} - \frac{6}{R^2} \frac{dR}{dt}$$

Αφαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (4-20) και (4-21) :

$$-2 \frac{d}{dt} \left(\frac{dR}{dt} \right) = \frac{8\pi G}{3} \rho R^2 + 8\pi G \rho R^2 - 6 \frac{d}{dt} \left(\frac{dR}{dt} \right) = 8\pi G R^2 + 3 \frac{d}{dt} \left(\frac{dR}{dt} \right)$$

$$-6 \frac{d}{dt} \left(\frac{dR}{dt} \right) = 8\pi G R^2 + 3 \frac{d}{dt} \left(\frac{dR}{dt} \right) - 2 \frac{d}{dt} \left(\frac{dR}{dt} \right)$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (4-22) στην σχέση (4-23) παίρνουμε :

$$-6 \frac{d}{dt} \left(\frac{dR}{dt} \right) = \frac{6}{R^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dR}{dt} \right) + 3 \frac{d}{dt} \left(\frac{dR}{dt} \right) - 2 \rho R = R + 3 \frac{d}{dt} \left(\frac{dR}{dt} \right)$$

$$\rho \frac{R}{R} + 2 \rho = - \frac{d}{dt} \left(\frac{dR}{dt} \right) + 3 \frac{d}{dt} \left(\frac{dR}{dt} \right) + 3 \frac{d}{dt} \left(\frac{dR}{dt} \right) + \rho$$

$$\rho \frac{dR}{dt} + 2 \rho R = - \frac{d}{dt} \left(\frac{dR}{dt} \right) + 3 \frac{d}{dt} \left(\frac{dR}{dt} \right) + 3 \frac{d}{dt} \left(\frac{dR}{dt} \right) + \rho R$$

Η εξίσωση (4-24) είναι ισοδύναμη με την συναλλοίωτη παράγωγο του τανυστή ενέργειας-ορμής, δηλαδή :

$$T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$$

Αν λάβουμε υπόψιν στις πεδιακές εξισώσεις του Einstein την κοσμολογική σταθερά Λ , τότε θα έχουμε :

$$G_{\infty} + \Lambda g_{\infty} = 8\pi G T_{\infty} \quad \frac{3}{R^2} (R^2 + k) - \Lambda = 8\pi G \rho$$

$$\frac{R^2 + k}{R^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G \rho}{3}$$

$$G_{ij} + \Lambda g_{ij} = 8\pi G T_{ij} \quad - \frac{2 R \frac{dR}{dt} + R^2 + k}{R^2} g_{ij} + \Lambda g_{ij} = 8\pi G \rho g_{ij}$$

$$\frac{2 R \frac{dR}{dt} + R^2 + k}{R^2} - \Lambda = -8\pi G \rho$$

Αν αφαιρέσουμε κατά μέλη τις σχέσεις (4-26), (4-27) έχουμε :

$$\frac{R}{R} - \frac{\Lambda}{3} = - \frac{4\pi G}{3} \rho + \frac{d}{dt} \left(\frac{dR}{dt} \right)$$

Το δεύτερο μέλος της (4-27) παριστάνει τις δυνάμεις βαρύτητας της ύλης και της ακτινοβολίας. Η βαρύτητα σαν ελκτική δύναμη τείνει διαρκώς να επιβραδύνει την ταχύτητα διαστολής του Σύμπαντος, όπως προκύπτει και από το αρνητικό πρόσημο.

Ο όρος $\Lambda/3$ (κοσμική Λ -δύναμη), για $\Lambda > 0$ τείνει να αυξήσει την επιτάχυνση, δηλαδή παριστάνει απωστική δύναμη.

4.5. ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΩΝ ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

A) Παρατηρώντας την εξίσωση (4-21) βλέπουμε, ότι η ακτινική επιτάχυνση του Σύμπαντος είναι πάντα αρνητική (ανεξάρτητα της τιμής του k). Αυτό συνεπάγεται ότι η βαρύτητα είναι πάντα ελκτική δύναμη. Αυτό έχει σαν συνέπεια να μπορεί να δημιουργήσει βαρυτική κατάρρευση σε κάποιο άστρο κάτω από κατάλληλες συνθήκες. Η συγκεκριμένη επίσης εξίσωση, παριστάνει μία εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή, με την προϋπόθεση ότι ο παράγοντας $\rho + 3p$ είναι σταθερός.

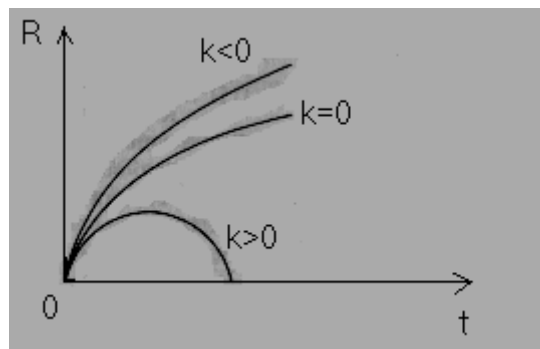
B) Η χρονοεξαρτώμενη συνάρτηση R , αναφέραμε ότι είναι παράγων κοσμολογικής διαστολής. Ο όρος R^3 είναι ανάλογος προς τον όγκο ενός τυχαίου στοιχείου ρευστού. Αν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση (4-24) με R^3 θα καταλήξουμε :

$$\rho R^3 + 3 \frac{d}{dt} R^3 + p R^3 = 0 \quad \text{ή} \quad 3 \rho R^2 \frac{dR}{dt} + \rho R^3 + 3 p R^2 \frac{dR}{dt} = 0$$

Ο πρώτος όρος στο πρώτο μέλος της σχέσης (4-29), παριστάνει τον ρυθμό μεταβολής της ολικής ενέργειας του στοιχείου ρευστού, ενώ ο δεύτερος όρος εκφράζει το αντίστοιχο έργο καθώς το στοιχείο ρευστού διαστέλλεται. Μπορούμε επομένως, να γράψουμε την σχέση (4-29), ως εξής :

$$dE + p dV = 0$$

που είναι όπως παρατηρούμε, ο πρώτος νόμος της θερμοδυναμικής, ή η αρχή διατήρησης ενέργειας.



Εικ. 8

Γ) Θεωρούμε ένα σημείο (π.χ. γαλαξία), μάζας m σε απόσταση R από το κέντρο του Σύμπαντος. Σύμφωνα με την Νευτώνεια Μηχανική, η ολική ενέργεια E του σημείου θα είναι το άθροισμα της κινητικής του ενέργειας K και της δυναμικής του

ενέργειας U λόγω της βαρυτικής αλληλεπίδρασης του γαλαξία με τους υπόλοιπους που βρίσκονται μέσα στην σφαίρα που έχει κέντρο το κέντρο του Σύμπαντος και ακτίνα R . Αυτή η ολική ενέργεια E θα παραμείνει σταθερή και θα είναι :

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{Gm}{R} - kR^3 \rho \right) \text{ σταθ.} = - \frac{1}{2} km - 3 \quad (4-30)$$

Απαλείφουμε την μάζα m από την σχέση (4-30), οπότε παίρνουμε :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{G}{R} - kR^3 \rho \right) = \frac{1}{2} k'' \quad \text{ή} \quad \frac{8\pi}{3} GR^2 \rho = k'' - 3 \quad (4-31)$$

όπου R είναι η ακτίνα, G η σταθερά βαρύτητας, ρ η πυκνότητα, k η επιτάχυνση του Σύμπαντος αντίστοιχα.

δηλαδή καταλήγουμε στην ίδια εξίσωση με την σχέση (4-19), που κατέληξε ο Friedmann για την διαστολή ενός ομογενούς και ισότροπου Σύμπαντος, με την βοήθεια της Γ.Θ.Σ. του Einstein.

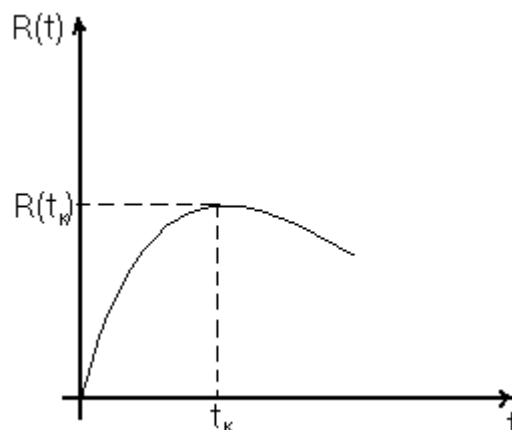
Δ) Εξετάζουμε τώρα, τρεις περιπτώσεις για την εξέλιξη του Σύμπαντος, για διάφορες τιμές της παραμέτρου k (βλέπε εικ. 8).

1^η περίπτωση ($k > 0$) : Σύμφωνα με την σχέση (4-30) η ολική ενέργεια E θα είναι αρνητική. Κατά συνέπεια ο γαλαξίας δεν μπορεί να διαφύγει στο άπειρο, εφόσον εκεί η δυναμική του ενέργεια μηδενίζεται ενώ η κινητική του ενέργεια παραμένει πάντα θετική. Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι την αρχική διαστολή θα πρέπει να ακολουθήσει συστολή και το Σύμπαν καταρρέει ξανά στο σημείο $R = 0$. Στην περίπτωση αυτή θα λέμε ότι το Σύμπαν είναι κλειστό.

Αφού πάντα η ακτινική επιτάχυνση είναι αρνητική όπως έχουμε αναφέρει, τότε για δύο χρονικές στιγμές t_1, t_2 με $t_1 < t_2$ θα έχουμε :

$$R(t_2) < R(t_1)$$

Συνεπώς, υπάρχει κάποια χρονική στιγμή t_k , για την οποία παίρνουμε :



Εικ. 9

$$R \frac{dR}{dt} = \frac{4\pi R^2 \rho}{3} \left(\frac{R}{3} \right)^3 - \frac{4\pi R^2 \rho}{3} \left(\frac{R}{3} \right)^3$$

8 πGρ

Στην εικ. 9 βλέπουμε την συμπεριφορά κλειστού Σύμπαντος και την μέγιστη τιμή της R , την χρονική στιγμή t_k .

2^η περίπτωση ($k < 0$) : Σύμφωνα με την σχέση (4-30) η ολική ενέργεια E θα είναι θετική. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα ο γαλαξίας να μπορεί να διαφύγει στο άπειρο, πράγμα που σημαίνει ότι το Σύμπαν θα διαστέλλεται συνεχώς. Ένα τέτοιο Σύμπαν λέγεται ανοικτό.

3^η περίπτωση ($k = 0$) : Σ' αυτή την περίπτωση έχουμε $E = 0$. Ο γαλαξίας έχει την ελάχιστη δυνατή ταχύτητα διαφυγής. Το Σύμπαν διαστέλλεται επ' άπειρον και ονομάζεται "κρίσιμο" ή χωρικά επίπεδο Σύμπαν. Από την εξίσωση (4-19) μπορούμε να υπολογίσουμε την κρίσιμη ταχύτητα διαφυγής v_δ :

$$R_\delta = \frac{3}{8\pi G \rho} \left(\frac{v_\delta}{R_\delta} \right)^2$$

Στην σχέση (4-33) παρατηρούμε, ότι η ταχύτητα διαφυγής v_δ είναι ανεξάρτητη από την μάζα m του γαλαξία.

Επανερχόμαστε τώρα, στην αναφορά μας σχετικά με την παράμετρο Hubble $H(t)$. Ας θεωρήσουμε μια ομογενή και ισότροπη σφαίρα μάζας M και ακτίνας r_0 , στην οποία όλα τα μήκη μέσα σ' αυτή την σφαιρική περιοχή αυξάνονται κατά ένα παράγοντα $R(t)$. Έστω ότι μετά από κάποιο χρονικό διάστημα, η ακτίνα της σφαίρας γίνεται r , οπότε : $r = R(t) \cdot r_0$. Άρα η ταχύτητα διαστολής, αν λάβουμε υπόψιν την σχέση : $v = H(t) \cdot r$, θα είναι :

$$v = \frac{dr}{dt} \quad \left| \quad r = \frac{R}{R_0} r_0 = H r \right. \quad H = \frac{1}{R} \frac{dR}{dt}$$

Η παράμετρος Hubble $H(t)$ εκφράζει την διαστολή της σφαίρας. Σημειώνουμε ότι η παράμετρος Hubble $H(t)$ είναι σταθερή, δηλαδή $H(t) = H_0 = \text{σταθερή}$, αν η διαστολή του Σύμπαντος είναι εκθετική, δηλαδή της μορφής: $R(t) = e^{H_0 t}$.

Εδώ θα πρέπει να παρατηρήσουμε, ότι όσα προαναφέραμε για την διαστολή της σφαίρας, ανάγονται για το Σύμπαν μας εφόσον αναφερόμαστε σε αποστάσεις πολύ μεγάλης κλίμακας, της τάξης των αποστάσεων γαλαξιών και μεγαλύτερες.

Από τις σχέσεις (4-33) και (4-34) μπορούμε να βρούμε τον λόγο της ταχύτητας ενός γαλαξία προς την ταχύτητα διαφυγής του :

$$\frac{v}{v_\delta} = H \frac{R}{v_\delta} = \frac{8\pi G \rho R}{3} \frac{R}{v_\delta}$$

Παρατηρούμε ότι αυτός ο λόγος είναι ανεξάρτητος του R , κατά συνέπεια το αν θα διαφύγει τελικά στο άπειρο ο γαλαξίας ή όχι, εξαρτάται από τις ποσότητες H και ρ .

Αν ο γαλαξίας αποκτήσει την ταχύτητα διαφυγής, τότε σύμφωνα με την σχέση (4-35) η πυκνότητα παίρνει μια κρίσιμη τιμή ρ_c . Η τιμή αυτή της κρίσιμης πυκνότητας, σε σχέση με την τιμή της σταθεράς του Hubble θα είναι :

$$\frac{R}{R_\delta} = 1 \quad H^2 = \frac{8 \pi G}{3} \rho_c \quad \rho_c = \frac{3 H^2}{8 \pi G}$$

Ο λόγος της πραγματικής πυκνότητας του Σύμπαντος προς την κρίσιμη πυκνότητα ονομάζεται Ω , δηλαδή : $\Omega = \rho / \rho_c$. Μπορούμε με βάση την παράμετρο Ω να μελετήσουμε την συμπεριφορά του Σύμπαντος. Η εξίσωση του Friedmann (4-19) με την βοήθεια των σχέσεων (4-34), (4-36) γίνεται :

$$R^2 + k = \frac{H^2}{\rho_c} \rho R^2 \quad R^2 + k = H^2 \Omega R^2 \quad \frac{R^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = H^2 \Omega$$

$$\frac{k}{R^2} = H^2 \Omega - H^2 \quad \frac{k}{R^2} = H^2 (\Omega - 1)$$

Αν $\Omega < 1$, το Σύμπαν είναι ανοικτό, αν $\Omega > 1$ τότε το Σύμπαν είναι κλειστό και τέλος αν $\Omega = 1$, το Σύμπαν είναι επίπεδο.

Ε) Αν κάποια χρονική διάρκεια κατά την διαστολή του Σύμπαντος, η ακτινική επιτάχυνση γίνει μηδέν, τότε σ' αυτό το χρονικό διάστημα η ταχύτητα διαστολής θα είναι σταθερή, οπότε :

$$R = R_\sigma \quad R = R_\sigma \quad \text{κθ.} \quad R = R_\sigma \quad R = R_\sigma$$

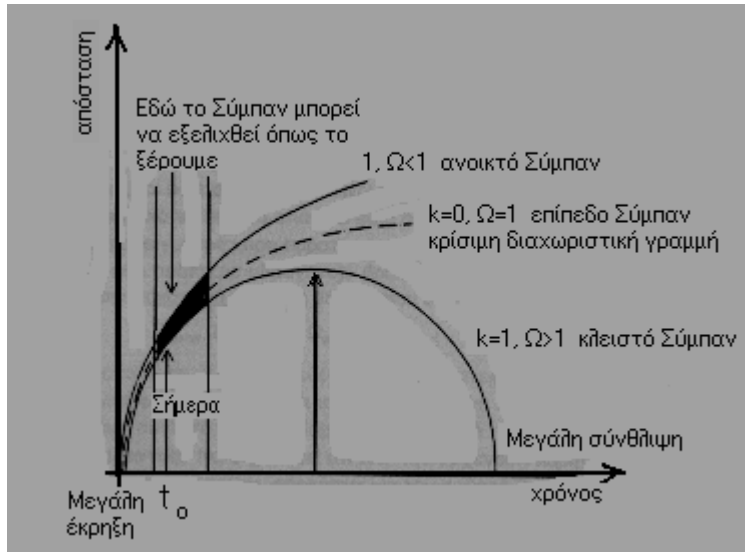
$$t_\sigma = \frac{R}{R_\sigma} \quad t_\sigma = \frac{R}{H_\sigma}$$

όπου t_σ είναι η χρονική στιγμή που αντιστοιχεί σήμερα. Γνωρίζουμε όμως, ότι :

$$R = R_\sigma \quad t_\sigma \approx \frac{1}{H_\sigma} \approx 2 \times 10^{10} \text{ έτη}$$

πράγμα που σημαίνει ότι υπολογίζοντας την ταχύτητα διαστολής "Doppler" υπολογίζουμε την σημερινή τιμή της σταθεράς του Hubble $H(t_\sigma)$, συνεπώς θέτουμε ένα άνω όριο στην ηλικία του Σύμπαντος.

Στην εικ. 10, φαίνεται η εξέλιξη του παράγοντα κοσμικής κλίμακας $R(t)$, για ένα ανοικτό Σύμπαν ($k = -1$), ένα κλειστό Σύμπαν ($k = +1$) και ένα επίπεδο Σύμπαν ($k = 0$).



Εικ. 10

4.6. ΕΠΟΧΕΣ ΤΟΥ ΣΥΜΠΑΝΤΟΣ

Έχουμε αναφέρει στην προηγούμενη παράγραφο, ότι η $R(t)$ στην εξίσωση (4-29) (που ονομάζεται και εξίσωση συνέχειας και εκφράζει την διατήρηση της ενέργειας του ρευστού), είναι η ακτίνα του Σύμπαντος, η E είναι η εσωτερική ενέργεια του ρευστού και $p dV$ το αντιστρεπτό έργο που παράγει το ρευστό κατά την εκτόνωσή του.

Βέβαια, η εξίσωση αυτή από μόνη της δεν αρκεί ώστε να προσδιοριστεί η συνάρτηση $R(t)$, εφόσον η πυκνότητα $\rho(t)$ και η πίεση $p(t)$ μας είναι άγνωστα. Άρα, χρειαζόμαστε συνολικά τρεις εξισώσεις. Συνήθως, θεωρούμε ολόκληρο το Σύμπαν σαν ένα ρευστό, με τους γαλαξίες να παίζουν τον ρόλο των μορίων των συνηθισμένων ρευστών. Κατά συνέπεια, η εξίσωση (4-29) και η εξίσωση Friedmann (4-19) συμπληρώνονται από μία σχέση, που συνδέει την πίεση του ρευστού με την πυκνότητά του ρ . Αυτή είναι μια καταστατική εξίσωση της μορφής : $p = p(\rho)$.

Τώρα, επειδή σε πρώιμους χρόνους ο όρος καμπυλότητας είναι αμελητέος, αγνοούμε την χωρική καμπυλότητα μπορούμε να περιγράψουμε τα διάφορα στάδια της εξέλιξης του Σύμπαντος με την απλή καταστατική εξίσωση : $p = w\rho$ (4-38) και με την παραδοχή ότι το w είναι σταθερό. Σύμφωνα με αυτή την σχέση και την (4-29) βρίσκουμε :

$$\frac{d}{dt} \left(\rho R^3 \right) + \frac{d}{dt} \left(3 p R^3 \right) + \rho R^3 + 3 p R^2 \dot{R} + 3 w \rho R^2 \dot{R} = 0 \quad "$$

$$\rho R = -3 \rho R \left[+1 \frac{\rho}{\rho} \right] = -3 \left[+1 \frac{R}{R} \right] \rho = AR^{-3} \left[+1 \frac{4}{4} - 3 \right]$$

Αν αντικαταστήσουμε την σχέση (4-39) στην (4-21) θα βρούμε :

$$R = - \frac{\pi G}{3} \left[-3 \frac{3}{3} +1 \frac{R}{R} \right] R^{-3} \left[+1 \frac{4}{4} \right]$$

$$R = - \frac{\pi G}{3} \left[-3 +1 \right] R^{-3} \left[+1 \right]$$

όπου F μια σταθερά.

Υπάρχουν δύο χρονικές περίοδοι μεγάλου ενδιαφέροντος στην Κοσμολογία, η εποχή της ακτινοβολίας και η εποχή της ύλης.

Εποχή ακτινοβολίας (αρχέγονο) : Στο πρώιμο θερμό Σύμπαν, η βασική πυκνότητα ενέργειας οφείλεται σε ακτινοβολία ή σε σχετικιστικά σωματίδια με καταστατική εξίσωση :

$$T_{\mu}^{\mu} = 0 \quad \rho = \frac{1}{3} p$$

δηλαδή η τιμή της παραμέτρου w της σχέσης (4-38) είναι $1/3$. Σύμφωνα με την εξίσωση (4-40) βρίσκουμε ότι :

$$R \left[\frac{1}{2} \right] = -4$$

Αντικαθιστούμε την σχέση (4-41) στην (4-29), οπότε έχουμε :

$$\frac{d}{dt} \left[R^3 \frac{1}{3} \rho \right] = \frac{d}{dt} \left[R^3 \frac{1}{3} \rho \right] = \frac{d}{dt} \left[R^4 \right]$$

$$\rho R^4 = \rho \left[\frac{C}{R^4} \right] - 4$$

όπου C μια σταθερά. Παρατηρούμε ότι η πυκνότητα ενέργειας είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραδιάστατου χώρου.

Εποχή ύλης (π.χ. σημερινή εποχή): Μετά την εποχή της κυριαρχίας της ακτινοβολίας, το μετέπειτα όλο και ψυχρότερο Σύμπαν, μέχρι σήμερα χαρακτηρίζεται από την κυριαρχία της ύλης. Στην εποχή της ύλης, που ισχύει μέχρι σήμερα, η κύρια πυκνότητα ενέργειας οφείλεται στην συνήθη ύλη των γαλαξιών, που έχουν μικρές τυχαίες ταχύτητες, συνεπώς συμπεριφέρονται σαν κονιορτός. Άρα, η πίεση είναι αμελητέα, οπότε η καταστατική εξίσωση είναι : $p = 0$. Σύμφωνα με την σχέση (4-40) βρίσκουμε :

$$R \left[\frac{2}{3} \right] = -4$$

Αντικαθιστώντας τώρα την τιμή $p = 0$, στην εξίσωση (4-29), παίρνουμε :

$$\frac{d}{dt} \left[R^3 \rho \right] = \rho \left[\frac{C}{R^3} \right] - 4$$

όπου C' μια σταθερά. Παρατηρούμε, ότι ο νόμος διατήρησης μάζας - ενέργειας περιέχεται στις εξισώσεις του πεδίου και η πυκνότητα ενέργειας είναι αντιστρόφως ανάλογη του όγκου.

4.7. Ο ΡΟΛΟΣ ΤΗΣ ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΚΗΣ ΣΤΑΘΕΡΑΣ

Η εξίσωση του Friedmann (4-19) και τα συμπεράσματα που απορρέουν απ' αυτήν, μας δίνουν να καταλάβουμε ότι έχουμε να κάνουμε με ένα Σύμπαν, που δεν είναι στατικό αλλά είτε διαστέλλεται είτε συστέλλεται. Αρχικά βέβαια, υπήρχε η άποψη από τον ίδιο τον Einstein ότι το Σύμπαν είναι στατικό (και στις εξισώσεις του πεδίου βαρύτητας προστέθηκε η λεγόμενη κοσμολογική σταθερά Λ , οπότε προέκυψαν οι εξισώσεις (4-26), (4-28). Ο σκοπός αυτής της σταθεράς Λ ήταν, να προκαλεί μια άπωση σε πολύ μεγάλες αποστάσεις, ώστε να εξισορροπεί την έλξη του πεδίου βαρύτητας και τελικά να δίνει ένα στατικό Σύμπαν. Όλα αυτά μπορούν να φανούν, αν στην ολική ενέργεια $E = -km/2$, που είχαμε δει σε προηγούμενη παράγραφο εξ. (4-30), αντικαταστήσουμε την εξίσωση (4-26), οπότε παίρνουμε :

$$E = \frac{1}{2} mR^2 - \frac{4\pi G}{3} \rho R^3 - \frac{m}{2} \cdot \frac{\Lambda}{3} R^2 \quad \text{--- 4 ---}$$

Απ' αυτή την σχέση βλέπουμε ότι σ' ένα γαλαξία μάζας m , δρα αφ' ενός μεν η ελκτική δύναμη της βαρύτητας :

$$F_G = - \frac{4\pi G}{3} \rho R^3 \frac{m}{R^2} \quad \text{--- 4 ---}$$

αφ' ετέρου δε η απωστική δύναμη :

$$F_\Lambda = \frac{m}{3} \Lambda R \quad \text{--- 48 ---}$$

Γνωρίζουμε σήμερα, ότι η τιμή της κοσμολογικής σταθεράς Λ είναι πολύ μικρή, πράγμα που θεωρείται ανεξήγητο ακόμη. Βέβαια, σε υπολογισμούς κοσμολογικής κλίμακας ή κβαντικής κλίμακας λαμβάνεται υπόψιν, ενώ σε υπολογισμούς γήινης ή ηλιακής κλίμακας παραλείπεται.

4.8. ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΧΩΡΩΝ

Αν στην εξίσωση (4-26) θέσουμε :

$$C = \frac{8\pi G\rho}{3} R^3 \quad \text{--- 4 ---}$$

τότε αυτή γίνεται :

$$R^2 + k - \frac{1}{3} \Lambda R^2 = \frac{C}{R} \quad \text{--- 5 ---}$$

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι στην περίπτωση που $k = 0$, έχουμε ένα χωρικά επίπεδο Σύμπαν, οπότε η εξίσωση (4-50) γίνεται :

$$R^2 - \frac{1}{3} \Lambda R^2 = \frac{C}{R} \quad \text{--- 5 ---}$$

Αρχικά υποθέτουμε ότι $\Lambda > 0$. Τώρα εισάγουμε μια νέα μεταβλητή u , που ορίζεται από την σχέση :

$$u = \frac{2\Lambda}{3C} R^3, \quad \text{οπότε : } R^3 = \frac{3C}{2\Lambda} u \quad (4-52)$$

Αν παραγωγίσουμε την σχέση (4-52) παίρνουμε :

$$R = \frac{C}{2\Lambda} \cdot \frac{u}{R^2} \quad (4-53)$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (4-53) στην (4-51) έχουμε :

$$\frac{C^2}{4\Lambda^2} \cdot \frac{u^2}{R^4} - \frac{1}{3} \Lambda R^2 = \frac{C}{R} \quad \text{” } u^2 = \frac{1}{3} \Lambda R^2 \left(\frac{4\Lambda^2}{C^2} \right) \text{”}$$

$$u^2 = \frac{4\Lambda^2}{C} R^3 + \frac{4\Lambda^3}{3C^2} R^6 \quad \text{και μέσω της σχέσης (4-52) παίρνουμε :}$$

$$u^2 = 3\Lambda \left(\frac{C}{2\Lambda} \right)^2 u + \frac{4\Lambda^3}{3C^2} \left(\frac{3C}{2\Lambda} \right)^3 u^2 \quad \text{” } u^2 = \frac{4\Lambda^3}{3C^2} \left(\frac{3C}{2\Lambda} \right)^3 u^2 - 3\Lambda \left(\frac{C}{2\Lambda} \right)^2 u \text{”}$$

Αν υποθέσουμε ένα μοντέλο big bang, όπου για $t = 0$ έχουμε $R = 0$ οπότε και $u = 0$, ολοκληρώνοντας κατά μέρη την σχέση (4-54), έχουμε :

$$\int \frac{u}{u^2 + \frac{4\Lambda^3}{3C^2} \left(\frac{3C}{2\Lambda} \right)^3 u^2 - 3\Lambda \left(\frac{C}{2\Lambda} \right)^2 u} du = \int \frac{1}{u} du = \ln |u| + \text{const}$$

Ο παρανομαστής στο πρώτο ολοκλήρωμα γίνεται :

$$u^2 + \frac{4\Lambda^3}{3C^2} \left(\frac{3C}{2\Lambda} \right)^3 u^2 - 3\Lambda \left(\frac{C}{2\Lambda} \right)^2 u = u^2 \left(1 + \frac{4\Lambda^3}{3C^2} \left(\frac{3C}{2\Lambda} \right)^3 \right) - 3\Lambda \left(\frac{C}{2\Lambda} \right)^2 u$$

όπου θέσαμε: $v = u + 1$. Θέτοντας επίσης : $v = \cosh w$, το πρώτο ολοκλήρωμα δίνει:

$$\int \frac{1}{u^2 + \frac{4\Lambda^3}{3C^2} \left(\frac{3C}{2\Lambda} \right)^3 u^2 - 3\Lambda \left(\frac{C}{2\Lambda} \right)^2 u} du = \int \frac{1}{\cosh^2 w - 1} \cosh w dw = \int \frac{1}{\cosh w - 1} dw = \ln |\cosh w - 1| + \text{const}$$

Άρα :

$$w = \frac{1}{\Lambda} \ln |\cosh w - 1| \quad \text{” } \cosh w = \cosh \left(\frac{1}{\Lambda} \ln |\cosh w - 1| \right) = \cosh \left(\frac{1}{\Lambda} \ln |\cosh w - 1| \right)$$

Αντικαθιστώντας αυτό το αποτέλεσμα που βρήκαμε στην σχέση (4-52) παίρνουμε :

$$R^3 = \frac{3C}{2\Lambda} \left(\frac{1}{\Lambda} \ln |\cosh w - 1| \right)^3 \quad (4-55)$$

Αν $\Lambda < 0$, εισάγουμε μια νέα μεταβλητή :

$$u^A = - \frac{2\Lambda}{3C} R^3 \quad (4-56)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως προηγουμένως, καταλήγουμε στην λύση :

$$R^3 = \frac{3C}{2\Lambda} \left(\frac{1}{\Lambda} \cos \left(\frac{1}{\Lambda} \ln |\cosh w - 1| \right) \right)^3 \quad (4-57)$$

Για να βρούμε την λύση στην περίπτωση που $\Lambda = 0$, αναπτύσσουμε σε σειρά το $\cosh x$:

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

οπότε η σχέση (4-55) δίνει :

$$R^3 = \frac{3C}{2\Lambda} \frac{\Lambda t^2}{2} + \frac{9\Lambda^2 t^4}{24} + \dots$$

και έτσι στο όριο όπου Λ τείνει στο μηδέν έχουμε :

$$R^3 = \frac{9}{4} C t^2 \quad \text{''} \quad R = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{C}{\Lambda}} t \quad \text{''} \quad (4-51)$$

Αυτό το μοντέλο ονομάζεται : **Einstein - de Sitter model**. Παρατηρούμε ότι το Σύμπαν διαστέλλεται με ρυθμό $t^{2/3}$.

Ας ορίσουμε τώρα την παράμετρο επιβράδυνσης $q(t)$:

$$q = \frac{R \ddot{R}}{\dot{R}^2} \quad \text{''} \quad (4-52)$$

Η παράμετρος επιβράδυνσης q και η παράμετρος Hubble H , συνδέονται με την σχέση :

$$q = \frac{1}{3} \frac{\Lambda}{H^2} \quad \text{''} \quad (4-53)$$

Αυτή η σχέση αποδεικνύεται εύκολα ξεκινώντας από την σχέση (4-50), όπου διαφορίζοντας αυτήν παίρνουμε :

$$2R\ddot{R} - \frac{2}{3}\Lambda R^2 = -\frac{C}{R^2} \quad \text{''} \quad \text{και πολλαπλασιάζοντας με } -\frac{R}{2R^3} \text{ έχουμε :}$$

$$q = \frac{C}{2R^2} - \frac{1}{3}\Lambda \frac{R^2}{R^2} \quad \text{''} \quad (4-54)$$

Ακολούθως χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4-49) και (4-34), η (4-61) μας δίνει την εξίσωση (4-60). Αυτή η σχέση δείχνει ότι υπάρχει μια στενή σχέση μεταξύ της παραμέτρου επιβράδυνσης q , της παραμέτρου Hubble H και της μέσης πυκνότητας του Σύμπαντος.

Παραγωγίζοντας την σχέση (4-58) και χρησιμοποιώντας την σχέση (4-34), μπορούμε να υπολογίσουμε την παράμετρο Hubble :

$$3R^2\dot{R} = \frac{9}{4} C t \quad \text{''} \quad \frac{R}{R} = \frac{3}{2} \frac{1}{R^3} C t \quad \text{''} \quad H = \frac{2}{3t} \quad \text{''} \quad (4-55)$$

Ακολούθως μπορούμε να υπολογίσουμε την παράμετρος επιβράδυνσης q , παραγωγίζοντας δύο φορές την σχέση (4-58), οπότε :

$$6R^2\ddot{R} + 3R^2\dot{R} = \frac{9}{2} C \quad \text{''} \quad 2R^2\dot{R} - \frac{3}{2} C = -R^2\ddot{R} \quad \text{''} \quad -\frac{R}{R^2} = q = 2 - \frac{3}{2} \cdot \frac{C}{R^2 R}$$

$$R^2 = \frac{9}{4} \cdot \frac{C^2 t^2}{R^2} \quad \text{''} \quad R^2 R = \frac{9}{4} \cdot \frac{C^2 t^2}{R^2} \quad \text{''} \quad R^2 R = C \quad \text{οπότε :}$$

$$q = \frac{2}{2} \quad \text{''} \quad (4-56)$$

Ας θεωρήσουμε τώρα την συνάρτηση $F(R)$, που ορίζεται από την σχέση :

$$F = \frac{C}{R} + \frac{1}{3} \Lambda R^2 \quad (4-51)$$

οπότε η σχέση (4-51) μπορεί να γραφεί ως εξής :

$$R^2 = F - \frac{C}{\Lambda} \quad (4-52)$$

Σύμφωνα μ' αυτή την σχέση, μπορούμε να προβλέψουμε ένα μεγάλο μέρος της ποιοτικής συμπεριφοράς του R, από αυτήν του F(R). Για παράδειγμα :

$$\Lambda < 0 \quad \text{όταν} \quad R = R_m = \sqrt{\frac{C}{|\Lambda|}} \quad (4-53)$$

έτσι ώστε το R μηδενίζεται στο $R = R_m$, που αποτελεί ένα τοπικό ελάχιστο.

Από την άλλη, αν $\Lambda \geq 0$ η λύση αυξάνεται χωρίς όριο. Στην περίπτωση που $\Lambda > 0$, για μεγάλα t, ο όρος $\Lambda R^2/3$ στην εξίσωση (4-51) επικρατεί του όρου C/R, κατά συνέπεια θα έχουμε :

$$R^2 \sim \frac{1}{3} \Lambda R^2 \quad \text{και ολοκληρώνοντας βρίσκουμε :}$$

$$R \sim \exp\left(\frac{\sqrt{\Lambda}}{3} t\right) \quad (4-54)$$

4.9. ΜΟΝΤΕΛΑ ΜΕ ΜΗΔΕΝΙΚΗ ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΚΗ ΣΤΑΘΕΡΑ

Με βάση τα στοιχεία που υπάρχουν μέχρι στιγμής, οδηγούμαστε στο γεγονός της ύπαρξης με ιδιαίτερη σημασία μοντέλων με $\Lambda = 0$. Η εξίσωση Friedmann (4-50) με $\Lambda = 0$ γίνεται :

$$R^2 = \frac{C}{R} - k \quad (4-55)$$

Για να λύσουμε αυτή την εξίσωση θα εξετάσουμε ξεχωριστά τις περιπτώσεις με $k = +1$ και $k = -1$. Για $k = +1$ η σχέση (4-67) γίνεται :

$$R^2 = \frac{C}{R} - 1 \quad (4-56)$$

Κάνουμε τώρα την εξής αλλαγή μεταβλητής :

$$u^2 = \frac{R}{C} \quad \text{οπότε παραγωγίζοντας παίρνουμε :} \quad 2 u \dot{u} = \frac{\dot{R}}{C}$$

Αντικαθιστώντας στην (4-68) βρίσκουμε :

$$u^2 = \frac{1}{4 C^2 u^2} (u^2 - 1)^2 \quad (4-57)$$

Παίρνοντας την θετική ρίζα, η εξίσωση μπορεί να χωριστεί και ολοκληρώνοντας θεωρώντας τις αρχικές συνθήκες του big bang, έχουμε :

$$2 \int_0^u \frac{u}{u^2 - 1} du = \frac{1}{C} \int_0^t \frac{dt}{C} = \frac{t}{C} \quad (4-58)$$

Για τον υπολογισμό του πρώτου ολοκληρώματος θέτουμε : $u = \sin\theta$, οπότε :

$$2 \int_0^{\theta} \frac{u}{1-u^2} du = 2 \int_0^{\theta} \frac{\sin\theta \cos\theta}{1-\sin^2\theta} = 2 \int_0^{\theta} \frac{\sin\theta \cos\theta}{\cos^2\theta} = 2 \int_0^{\theta} \tan\theta d\theta = 2 \left[-\ln|\cos\theta| \right]_0^{\theta} = -2 \ln|\cos\theta|$$

$$\int_0^{\theta} \frac{1}{\cos 2\theta} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\theta} \frac{1}{\cos\theta} d\theta = \frac{1}{2} \ln|\sec\theta + \tan\theta| = \frac{1}{2} \ln|\frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}| = \frac{1}{2} \ln|\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}|$$

Χρησιμοποιώντας το R η λύση (4-70) γίνεται :

$$C \sin^{-1} \frac{u}{R} + R \ln|\frac{1+\sin^{-1} \frac{u}{R}}{R-\sin^{-1} \frac{u}{R}}| - R \ln|\frac{1+\sin^{-1} \frac{u}{R}}{R-\sin^{-1} \frac{u}{R}}| - 7$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία στην περίπτωση που $\Lambda = 0$, $k = -1$, παίρνουμε την λύση :

$$C \frac{1}{R} \sinh^{-1} \frac{u}{R} + R \ln|\frac{1+\sinh^{-1} \frac{u}{R}}{R-\sinh^{-1} \frac{u}{R}}| - 7$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε την παράμετρο Hubble και την παράμετρο επιβράδυνσης, με την βοήθεια των σχέσεων (4-71) και (4-72). Για παράδειγμα, όταν $k = +1$ έχουμε :

$$H = C^{-1} \frac{1}{R} \frac{1}{\cos\theta} - R \frac{1}{\cos\theta} - 7$$

$$q = \frac{1}{2} \frac{1}{\cos\theta} - R \frac{1}{\cos\theta} - 7$$

Όπως κάναμε και στην προηγούμενη παράγραφο, μπορούμε να γράψουμε την σχέση (4-67) με την μορφή :

$$R^2 = G \frac{1}{R} - 7 \frac{1}{R} + G \frac{1}{R} - k \frac{1}{R} - 7$$

οπότε βρίσκουμε ότι για $k = +1$ το μοντέλο έχει ένα τοπικό ελάχιστο, ενώ τα άλλα δύο μοντέλα αυξάνουν χωρίς όριο. Όταν $k = -1$ για μεγάλα t , έχουμε :

$$R^2 \gg 1 \quad R \gg t \quad - 7$$

4.10. ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΤΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ FRIEDMANN

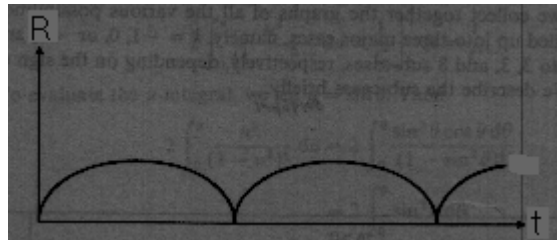
Μπορούμε να ταξινομήσουμε συνοπτικά όλες τις δυνατές περιπτώσεις των μοντέλων, που απορρέουν από την εξίσωση Friedmann σύμφωνα με τις τιμές $k = -1$, $k = 0$ και $k = +1$. Παρακάτω στην εικ. 12, φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις όλων των πιθανών μοντέλων.

1^η περίπτωση : $k = -1$

Όλα αυτά τα μοντέλα έχουν ανοικτή τοπολογία.

- $\Lambda > 0$. Εδώ έχουμε ένα απείρως διαστελλόμενο Σύμπαν, που περιέχει ένα σημείο όπου ο ρυθμός διαστολής μειώνεται για μια περίοδο πριν αυξηθεί εκ νέου και ασυμπτωτικά προσεγγίσει το $\exp[(\Lambda/3)^{1/2} t]$. Αρχικά, όπως όλα τα μοντέλα big bang, ο ρυθμός διαστολής είναι όπως στο μοντέλο Einstein-de Sitter, δηλαδή ανάλογα με το $t^{2/3}$.
- $\Lambda = 0$. Πρόκειται για ένα απείρως διαστελλόμενο μοντέλο χωρίς μεταβολή του ρυθμού διαστολής.

- iii) $\Lambda < 0$. Σ' αυτή την περίπτωση η κοσμολογική δύναμη είναι ελκτική και τελικά σταματά την διαστολή και αναγκάζει το μοντέλο σε κατάρρευση οδηγώντας το σε ένα αποκαλυπτικό γεγονός, που ονομάζεται big crunch. Συχνά αυτό αναφέρεται ως **ταλαντευόμενο μοντέλο (oscillating model)**.



Εικ. 11

Υπάρχει η πιθανότητα το συγκεκριμένο μοντέλο να εκτελεί αυτή την ταλάντωση επ' αόριστον και κάθε κύκλος να ακολουθείται από άλλον (εικ. 11). Όλα τα μοντέλα για τα οποία ισχύει $\Lambda < 0$ είναι ταλαντευόμενα μοντέλα.

2^η περίπτωση : $k = 0$

Όλα αυτά τα μοντέλα έχουν ανοικτή τοπολογία.

- i) $\Lambda > 0$. Αυτή είναι ίδια σε χαρακτήρα με την υποπερίπτωση (1^η i) .
 ii) $\Lambda = 0$. Πρόκειται για το μοντέλο **Einstein-de Sitter**, όπου $R \sim t^{2/3}$.
 iii) $\Lambda < 0$. Όπως έχουμε αναφέρει είναι ένα ταλαντευόμενο μοντέλο.

3^η περίπτωση : $k = +1$

Όλα αυτά τα μοντέλα έχουν ανοικτή τοπολογία. Σε αυτή την περίπτωση υπάρχουν περισσότερες πιθανές καταστάσεις, καθότι υπάρχει μια θετική κρίσιμη τιμή της κοσμολογικής σταθεράς Λ_c , που δίνεται από την σχέση : $\Lambda_c = 4/(9C^2)$, και μια σχετιζόμενη μ' αυτήν κρίσιμη τιμή του βαθμωτού συντελεστή R_c , που δίνεται από την σχέση : $R_c = 3C/2$. Αυτές οι κρίσιμες τιμές μπορούν να βρεθούν, αν πάρουμε την εξίσωση (4-27) οπότε :

Για το στατικό Σύμπαν του Einstein $\dot{R} = 0$ και $p = 0$,

$k = +1$ παίρνουμε :

$$\frac{1}{R_c^2} - \Lambda_c = 0 \quad \text{''} \quad \Lambda_c R_c^2 = 1 \quad \text{''} \quad R_c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda_c}} \quad \text{II}$$

Για τον ίδιο λόγο η σχέση (4-26) γίνεται :

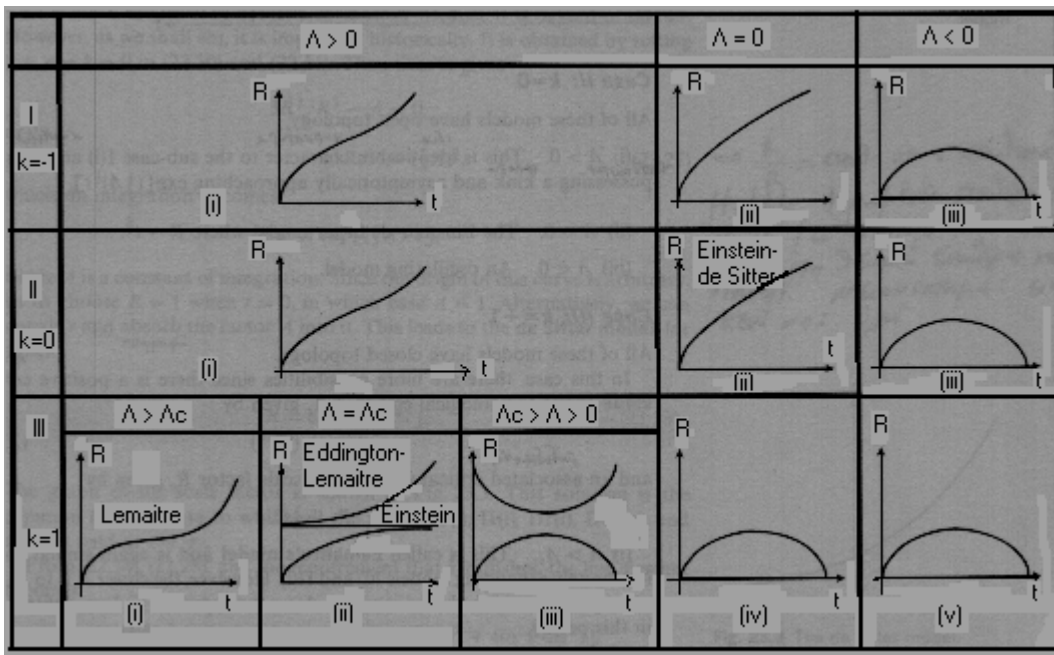
$$\frac{3}{R_c^2} - \Lambda_c = 8\pi G\rho \quad \text{και λόγω της} \quad \Lambda_c = 4\pi G\rho \quad \text{III}$$

Αλλά λόγω της σχέσης (4-49) και της (II) έχουμε :

$$C = \frac{2\Lambda_c}{3} R_c^3 \quad \text{''} \quad C = \frac{2}{3} R_c \quad \text{''} \quad R_c = \frac{3}{2} C \quad \text{III}$$

$$\text{και} \quad \Lambda_c = \frac{4}{9C^2} \quad \text{IV}$$

- i) $\Lambda > \Lambda_c$. Το μοντέλο αυτό ονομάζεται **μοντέλο Lemaitre** και είναι όμοιο με τα μοντέλα (1^η i) και (2^η i). Όσο πιο κοντά στην τιμή του Λ_c είναι η τιμή του Λ , τόσο πιο κοντά στην διακοπή της διαστολής βρισκόμαστε. Όπως έδειξε ο Lemaitre, το στατικό Σύμπαν του Einstein έχει το μειονέκτημα να είναι ασταθές σε μικρές διαταραχές της πυκνότητας. Ο Lemaitre έδωσε ένα συνεχώς διαστελλόμενο Σύμπαν με $k = +1$ και Λ λίγο μεγαλύτερο από την Λ_c .
- ii) $\Lambda = \Lambda_c$. Η περίπτωση αυτή περιλαμβάνει τρεις υποκατηγορίες, που εξαρτώνται από την τιμή μιας σταθεράς ολοκλήρωσης. Έχουμε λοιπόν :
- A) Το στατικό μοντέλο του Einstein (Einstein static model), στο οποίο η βαρυτική έλξη αντισταθμίζεται ακριβώς από την κοσμική άπωση. Το R σ' αυτή την περίπτωση τότε έχει την σταθερή τιμή R_c .
- B) Είναι ένα μοντέλο big bang, το οποίο ασυμπτωτικά προσεγγίζει το στατικό μοντέλο Einstein.
- Γ) Το μοντέλο Eddington - Lemaitre, στο οποίο αν ο χρόνος γυρίσει πίσω, προσεγγίζει ασυμπτωτικά το στατικό μοντέλο Einstein. Με τον χρόνο να προχωράει προς τα εμπρός, είναι ένα αιωνίως διαστελλόμενο μοντέλο, που ασυμπτωτικά προσεγγίζει το $\exp[(\Lambda/3)^{1/2} t]$.
- iii) $\Lambda_c > \Lambda > 0$. Και εδώ υπάρχουν δύο πιθανότητες ανάλογα με την τιμή της σταθεράς ολοκλήρωσης.
- A) Ένα ταλαντευόμενο μοντέλο.
- B) Αφορά ένα μοντέλο που έχει μια φάση συστολής, που ακολουθείται από μια φάση διαστολής στην οποία το R παραμένει πάντα θετικό. Είναι συμμετρικό ως προς το σημείο που έχει την ελάχιστη ακτίνα του με :
- $$R \gg \exp\left[\frac{\Lambda}{3} t\right] \text{ και}$$
- $$R \gg \exp\left[-\frac{\Lambda}{3} t\right]$$
- iv) $\Lambda = 0$. Ένα ταλαντευόμενο μοντέλο.
- v) $\Lambda < 0$. Ένα ταλαντευόμενο μοντέλο.



Εικ. 12

4.11. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΧΡΟΝΙΚΗΣ ΚΛΙΜΑΚΑΣ

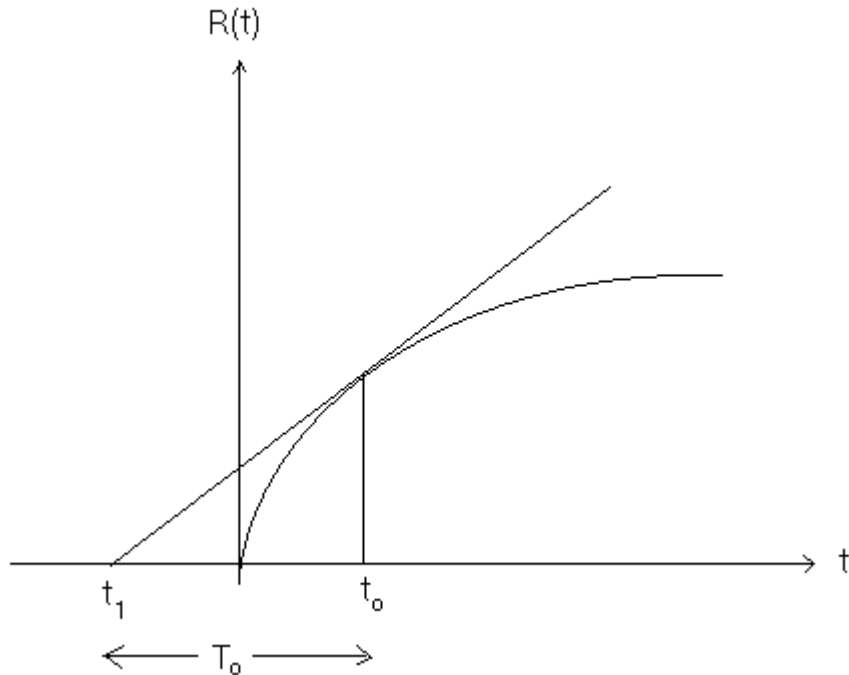
Πριν από το έτος 1952, το αντίστροφο της σταθεράς του Hubble, που ως γνωστόν εκφράζει χρόνο ($T_0 = 1/H$), υπολογιζόταν περίπου στα 1.8×10^9 χρόνια. Από την άλλη, η ηλικία της Γης είναι τουλάχιστον 3×10^9 χρόνια και ορισμένα άστρα υπάρχουν για πάνω από 5×10^9 χρόνια. Με βάση αυτές τις εκτιμήσεις, η ηλικία του Σύμπαντος δεν θα μπορούσε να είναι μικρότερη από 5×10^9 χρόνια.

Θεωρούμε την γραφική παράσταση του $R(t)$ με τον χρόνο t (εικ. 13), για ένα οποιοδήποτε μοντέλο big bang.

Αν η χρονική στιγμή $t = t_0$, αντιπροσωπεύει το παρόν, τότε η εφαπτομένη στην καμπύλη στο σημείο $t = t_0$, τέμνει τον άξονα του χρόνου στο σημείο $t = t_1$, οπότε έχουμε :

$$T_0 = t_0 - t_1 = \frac{R_0}{H_0} - \frac{R_0}{q} = \frac{R_0}{H_0} \left(1 - \frac{H_0}{q} \right)$$

Με την υπόθεση ότι $R \neq 0$ για κάθε χρονική στιγμή t , ή ισοδύναμα η παράμετρος επιβράδυνσης $q > 0$, ο ρυθμός διαστολής του Σύμπαντος μειώνεται, από την στιγμή της μεγάλης έκρηξης.



Εικ. 13

Σαν συνέπεια αυτού του γεγονότος είναι ότι η στιγμή της μεγάλης έκρηξης πρέπει να έχει συμβεί σε χρόνο μικρότερο από τον T_0 . Σύμφωνα μ'αυτό, δεν θα υπήρχε χρόνος για να δημιουργηθούν τα άστρα. Αυτό το πρόβλημα, είναι γνωστό σαν πρόβλημα χρονικής κλίμακας (time-scale problem). Για να δούμε πως θα ξεπεραστεί αυτό το πρόβλημα, χρησιμοποιούμε την εξίσωση (4-28) οπότε :

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3} \rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{7}{3} \frac{\dot{R}^2}{R^2}$$

Στο δεύτερο μέλος της σχέσης (4-78), ο πρώτος όρος είναι πάντα αρνητικός. Αν η σταθερά Λ είναι αρνητική ή μηδέν, τότε το πρώτο μέλος της (4-78) είναι πάντα αρνητικό. Επομένως, τα μοντέλα big bang θα πρέπει να έχουν $\Lambda > 0$, ώστε να ξεπεραστεί το πρόβλημα της χρονικής κλίμακας.

4.12. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΛΛΕΙΠΟΥΣΑΣ ΜΑΖΑΣ

Το 1952 οι Baade και Sandage κάνοντας νέες παρατηρήσεις για τον υπολογισμό της τιμής της σταθεράς του Hubble και κατέληξαν στην τιμή : $T_0 \approx 1.3 \times 10^{10}$ χρόνια.

Αυτή η τιμή έλυσε το πρόβλημα της χρονικής κλίμακας όπως και κάποια άλλα. Κατά συνέπεια, δεν ήταν πλέον απαραίτητο να θεωρείται ότι $\Lambda > 0$ στα μοντέλα big bang. Αντίθετα, όπως έχει αναφερθεί, υπάρχουν σοβαρές ενδείξεις που μας οδηγούν

σε μια μηδενική τιμή του Λ . Τα τρία μοντέλα που προκύπτουν για $\Lambda = 0$ ονομάζονται βασικά μοντέλα και σ' αυτά δίνουμε μεγαλύτερη έμφαση σήμερα.

Θέτοντας $\Lambda = 0$ στην σχέση (4-26) και λαμβάνοντας υπόψη την (4-33) έχουμε :

$$\frac{R^2 + k}{R^2} = \frac{8 \pi G \rho}{3} \quad \text{''} \quad H^2 + \frac{k}{R^2} = \frac{8 \pi G \rho}{3} \quad \text{''} \quad H^2 R^2 + k = \frac{8 \pi G \rho}{3} R^2 \quad \text{''}$$

$$k = \frac{8 \pi G}{3} R^2 \left(\frac{H^2 R^2}{8 \pi G} - 1 \right) \quad \text{--- (7)}$$

Έστω ότι η σημερινή τιμή της σταθεράς του Hubble είναι H_0 και της πυκνότητας ρ_0 , δηλαδή : $H_0 = H(t_0)$, $\rho_0 = \rho(t_0)$.

Χρησιμοποιώντας τον τύπο της κρίσιμης πυκνότητας (4-36), που γνωρίσαμε σε προηγούμενη παράγραφο, η (4-79) γίνεται :

$$k = \frac{8 \pi G}{3} R_0^2 \left(\frac{H_0^2}{8 \pi G} - \rho_0 \right) \quad \text{--- (8)}$$

Με βάση την (4-80) η ρ_0 διαφοροποιεί τα τρία μοντέλα ως εξής :

I	$\rho_0 > \rho_c$ " $k = +1$	Λαμβανόμενο μοντέλο
II	$\rho_0 = \rho_c$ " $k = 0$	Einstein - de Sitter model
III	$\rho_0 < \rho_c$ " $k = -1$	Ανεκώς διαστελλόμενο μοντέλο

Επιπλέον, θέτοντας $\Lambda = 0$ στην σχέση (4-60), που συνδέει την σταθερά Hubble H_0 και την παράμετρο επιβράδυνσης q_0 , παίρνουμε :

$$q_0 = \frac{\frac{4}{3} \pi G \rho_0}{H_0^2}$$

Χρησιμοποιώντας την τιμή $T_0 \approx 10^{10}$ χρόνια, βρίσκουμε :

$$\rho_c = 2 \times 10^{-29} \text{ g cm}^{-3}$$

Η υπολογιζόμενη πυκνότητα της φωτεινής (ακτινοβολούμενης) ύλης στους γαλαξίες, την οποία ορίζουμε με ρ_1 , πιστεύεται ότι είναι μικρότερη από αυτήν την τιμή. Σύμφωνα Δε με τα σημερινά δεδομένα υπολογίζεται :

$$\rho_1 \approx 10^{-30} \text{ g cm}^{-3}$$

Αυτή η ασυμφωνία μεταξύ θεωρίας και παρατήρησης είναι γνωστή ως πρόβλημα της ελλείπουσας μάζας (missing matter problem). Θα πρέπει λοιπόν, να υπάρχει μια ποσότητα σκοτεινής μάζας, που επεκτείνεται πολύ πέρα από τον ορατό γαλαξία σε σχήμα άλως ή φωτοστέφανο, παραμένει δε αόρατη για τους γήινους παρατηρητές, αλλά ασκεί ισχυρή επίδραση βαρύτητας Το συγκεκριμένο πρόβλημα έχει οδηγήσει πολλούς επιστήμονες να κάνουν εικασίες για πιθανώς άλλου είδους μορφές ύλης, που μπορούν να υπάρχουν. Μια πιθανότητα είναι ο γαλαξιακός χώρος να περιέχει αέριο πυκνότητας περίπου $2 \times 10^{-29} \text{ g cm}^{-3}$. Μολονότι υπάρχουν κάποιες ενδείξεις για την ύπαρξη διαγαλαξιακού υδρογόνου και ιονισμένου υδρογόνου, φαίνεται ότι και πάλι η πυκνότητα είναι μικρότερη από $10^{-30} \text{ g cm}^{-3}$. Υπάρχει επίσης η πιθανότητα, μια μεγάλη ποσότητα ύλης να κρύβεται μέσα στις μαύρες οπές. Πράγματι, σύγχρονες παρατηρήσεις δείχνουν ότι στα κέντρα των γαλαξιών υπάρχουν τεράστιες μαύρες οπές, που καταβροχθίζουν αστέρες. Μπορεί να είναι ψυχρά αέρια και διαστρική

σκόνη ή νεκρά άστρα όπως οι λευκοί νάνοι, ή αστρικά σώματα μεγέθους πλανητών - ή οτιδήποτε άλλο αρκετά ψυχρό ώστε να μην μπορεί να ακτινοβολεί προς τα έξω. Οι σχετικές μετρήσεις, απέδειξαν ότι κάθε λαμπρός γαλαξίας που παρατηρούμε, μας επιδεικνύει στην πραγματικότητα μόνο το ένα δέκατο της μάζας του. Αυτό σημαίνει, ότι στην ουσία τα εννέα δέκατα της ύλης που περιέχει το Σύμπαν παραμένει άορατη για τα τηλεσκόπιά μας και η παρουσία της αποκαλύπτεται μόνον από την δύναμη της βαρύτητας, που ασκούν πάνω στα ορατά άστρα και γαλαξίες. Αν λοιπόν, το 90% της μάζας του Σύμπαντος δεν φαίνεται, τότε δεν είναι καθόλου εύκολο να υπολογίσουμε την πυκνότητα της ύλης σε μια δεδομένη περιοχή του διαστήματος συναθροίζοντας τις μάζες των ορατών άστρων που φιλοξενεί, πόσο μάλλον να βγάλουμε συμπεράσματα για την πυκνότητα του Σύμπαντος γενικά, με στόχο ν' αποκαλύψουμε το ανοικτό ή κλειστό χωροχρονικό σχήμα του.

4.13. ΑΝΟΙΚΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Σήμερα, υπάρχουν μερικά ανοικτά προβλήματα, όσον αφορά το κοσμολογικό πρότυπο που χρησιμοποιούμε σε συνδυασμό με ορισμένες ιδέες της σύγχρονης φυσικής. Τα προβλήματα αυτά χωρίζονται σε δύο κατηγορίες :

- 1) Σ' αυτά που σχετίζονται μόνο με το κοσμολογικό πρότυπο που χρησιμοποιείται και είναι ανεξάρτητα από το χρησιμοποιούμενο πρότυπο στοιχειωδών σωματίων.
- 2) Σ' αυτά που σχετίζονται μόνο με το χρησιμοποιούμενο πρότυπο στοιχειωδών σωματίων και είναι ανεξάρτητα από το χρησιμοποιούμενο κοσμολογικό πρότυπο.

Τα παραπάνω προβλήματα οδήγησαν τους φυσικούς στην διατύπωση μιας νέας θεωρίας για την εξέλιξη του Σύμπαντος και συγκεκριμένα σ' αυτή του λεγόμενου πληθωριστικού σεναρίου.

Στην πρώτη κατηγορία προβλημάτων συναντάμε τα εξής :

Το πρόβλημα του ορίζοντα, το πρόβλημα των ανομοιογενειών μικρής κλίμακας, το πρόβλημα της καμπυλότητας ή επιπεδότητας, το πρόβλημα της περιστροφής και το πρόβλημα της κοσμολογικής σταθεράς.

Στην δεύτερη κατηγορία προβλημάτων συναντάμε τα εξής :

το πρόβλημα των μαγνητικών μονοπόλων και των περιοχικών τοιχωμάτων (domain walls), το πρόβλημα του βαρυτίνου (gravitino) και το πρόβλημα των Polongi.

4.14. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΟΡΙΖΟΝΤΑ

Ως γνωστόν, κανένα σήμα που συνδέει την αλληλουχία "αίτιο-αποτέλεσμα" δεν μπορεί να έχει ταχύτητα μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός. Κατά συνέπεια, για κάθε σημείο μέσα στο Σύμπαν υπάρχει κάθε φορά μια μέγιστη περιοχή, με την οποία αυτό το σημείο μπορεί να αλληλεπιδράσει αιτιοκρατικά. Στην εικ. 14, έχουμε

θεωρήσει χάριν απλότητας δύο μόνο χωρικές διαστάσεις, τις x και y . Επίσης έχουμε διαλέξει την κλίμακα έτσι ώστε η τροχιά ενός φωτεινού σήματος να αντιστοιχεί σε μια ευθεία, που έχει κλίση 45° ως προς το χωρικό επίπεδο xOy . Την χρονική στιγμή t μετά την μεγάλη έκρηξη, το σημείο Σ μπορεί να έχει αλληλεπιδράσει αιτιοκρατικά μόνο με εκείνα τα σημεία, που βρίσκονται μέσα σ' ένα κώνο, του οποίου η πλευρική επιφάνεια είναι ο γεωμετρικός τόπος όλων των φωτεινών ακτίνων που φτάνουν στο σημείο Σ έχοντας τρέξει επί χρόνο t . Η απόσταση ΣA θα είναι δηλαδή ίση με την απόσταση, που έχει διανύσει ένα φωτεινό σήμα σε χρόνο t . Το σημείο Σ_4 , που βρίσκεται έξω από τον κώνο φωτός δεν μπορεί να αλληλεπιδράσει αιτιοκρατικά με το Σ . Τα σημεία Σ και Σ_3 μπορούν να αλληλεπιδράσουν αιτιοκρατικά.

Το πρόβλημα έγκειται στην ύπαρξη του λεγόμενου σωματιακού ορίζοντα, δηλαδή της απόστασης μέσα στην οποία έχουμε αιτιοκρατική σύνδεση την χρονική στιγμή t . Επειδή για τα φωτόνια έχουμε $ds = 0$, έπεται ότι για την απόσταση συντεταγμένων dx έχουμε $dt = R(t)dx$. Έτσι, η φυσική απόσταση που ένα φωτόνιο μπορεί να διανύσει από την αρχή του Σύμπαντος ($t = 0$) μέχρι την χρονική στιγμή t , είναι :

$$d_\sigma = \int_0^t \frac{c}{R(t)} dt \quad (4-81)$$

για $R(t) = C t^n$, όπου $C, n = \text{σταθερές}, n < 1$

Αυτή είναι η απόσταση του ορίζοντα, δηλαδή των πιο απομακρυσμένων αντικειμένων, που μπορούν να παρατηρηθούν την χρονική στιγμή t .

Έχουμε ήδη αναφέρει στην 4.6 παράγραφο, ότι στην εποχή της ακτινοβολίας ισχύει η σχέση (4-42), οπότε $n = 1/2$. Αντίστοιχα στην εποχή της ύλης ισχύει η (4-44), οπότε $n = 2/3$. Άρα σύμφωνα με την σχέση (4-81) έχουμε :

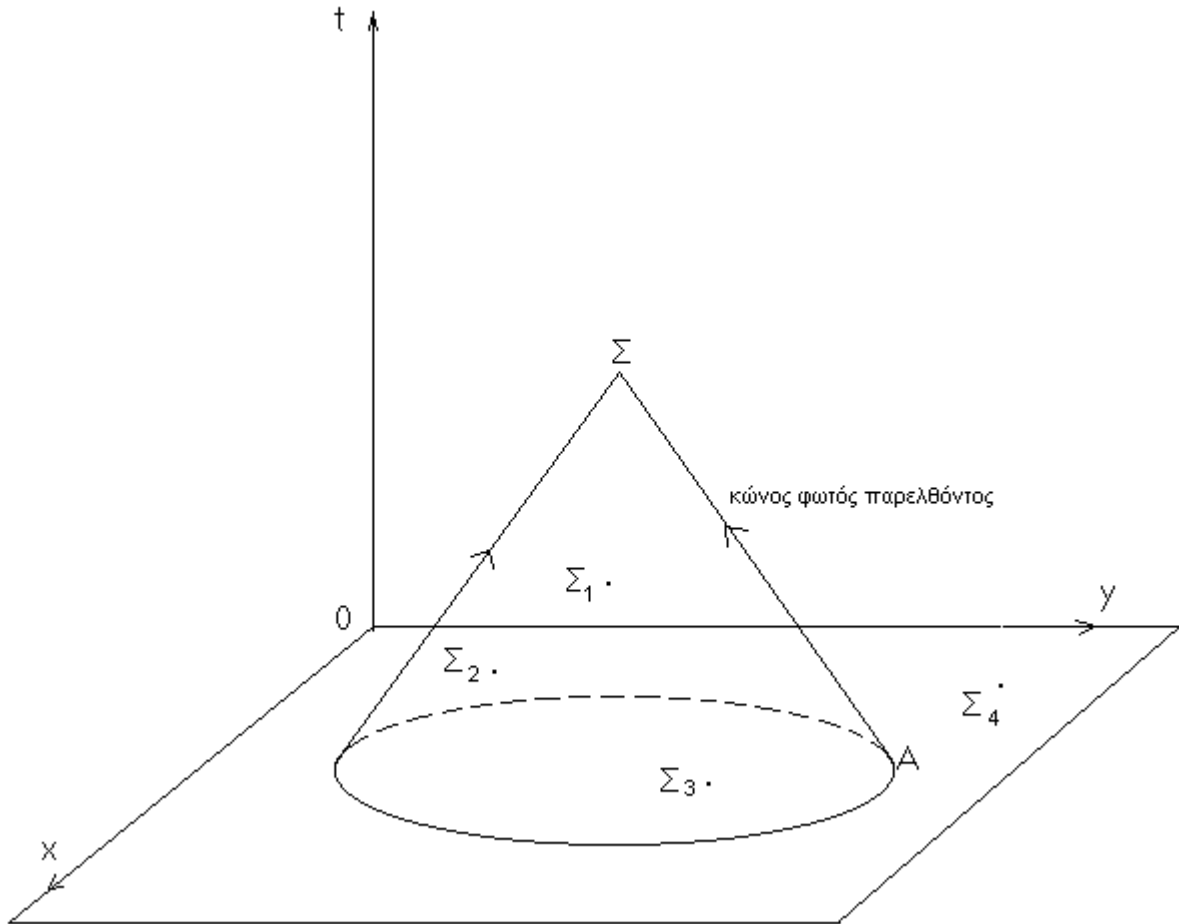
$$d_\sigma = \begin{cases} \frac{2c}{3} t^{3/2}, & \text{ακτινοβολία} \\ \frac{3c}{5} t^{5/3}, & \text{ύλη} \end{cases}$$

Τώρα, όσον αφορά το φυσικό μήκος ανάμεσα σε δύο σημεία με απόσταση συντεταγμένων d είναι :

$$d_{\text{φυσ}} = \int_0^t R(t) dt \cdot d = \begin{cases} \frac{2c}{3} t^{3/2}, & \text{ακτινοβολία} \\ \frac{3c}{5} t^{5/3}, & \text{ύλη} \end{cases}$$

Παρατηρούμε, ότι ο ορίζοντας $d_\sigma(t)$ αυξάνει γρηγορότερα από το $d_{\text{φυσ}}(t)$. Αυτό σημαίνει ότι στο παρελθόν, υπήρχαν περιοχές που δεν συνδέονταν μεταξύ τους αιτιοκρατικά και επομένως, δεν μπορούσαν εκείνη την στιγμή να ανταλλάξουν καμιά πληροφορία. Αυτές οι περιοχές κατέληξαν φυσικά στο σημερινό Σύμπαν. Αυτό βέβαια είναι πολύ περίεργο. Από την μικροκυματική ακτινοβολία υποβάθρου βρίσκουμε, ότι ολόκληρο το Σύμπαν είναι ισότροπο ($\Delta T / T \leq 10^{-4}$). Πώς όμως μπόρεσαν οι ασύνδετες αιτιοκρατικά περιοχές να αποκτήσουν την ίδια θερμοκρασία; Κάτι τέτοιο απαιτεί την ύπαρξη μιας αλληλεπίδρασης μεταξύ τους, πράγμα που δεν εξασφαλίζεται από το υπάρχον μοντέλο. Το πρόβλημα δε, γίνεται οξύτερο αν πάμε σε ακόμα παλαιότερους χρόνους.

Τα παραπάνω συνιστούν το λεγόμενο πρόβλημα του ορίζοντα.

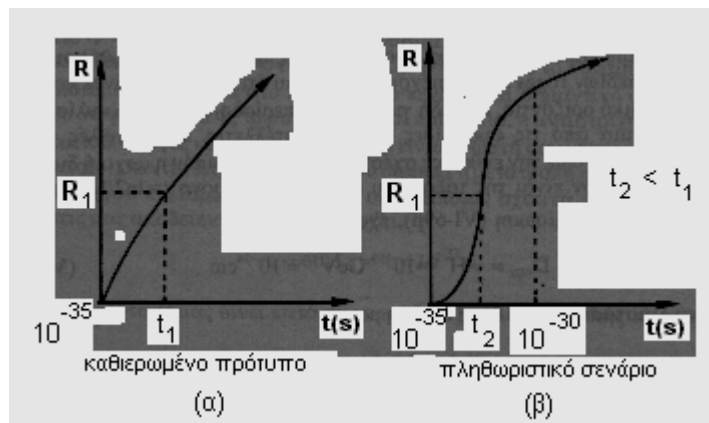


Εικ. 14

4.15. ΤΟ ΠΛΗΘΩΡΙΣΤΙΚΟ ΣΕΝΑΡΙΟ (Inflationary scenario)

Στην προσπάθεια να κατασκευαστεί ένα μοντέλο του Σύμπαντος όπου πολλά διαφορετικά αρχικά σύνολα χαρακτηριστικών θα μπορούσαν να εξελιχθούν σε κάτι σαν το σημερινό Σύμπαν, ο φυσικός Alan Guth το 1980 πρότεινε το πληθωριστικό σενάριο, για να διορθωθεί στην συνέχεια σημαντικά σε όσα σημεία του ερχόταν σε αντίθεση με την παρατήρηση. Χοντρικά έχει τα εξής χαρακτηριστικά. Σε κάποιο αρχικό στάδιο του Σύμπαντος (χρονικό διάστημα από 10^{-43} s μέχρι 10^{-30} s), μέσα στο οποίο είναι και η εποχή της μεγαλοενοποίησης, η κατάσταση του Σύμπαντος ήταν τέτοια, που το ενεργειακό περιεχόμενο του κενού (δηλαδή της κατάστασης εκείνης στην οποία δεν υπάρχει καθόλου οποιαδήποτε μορφή ύλης ή ακτινοβολίας) ήταν τρομερά μεγάλο. Το ενεργειακό αυτό περιεχόμενο του κενού οφείλεται στην παρουσία σ' αυτό βαθμωτών πεδίων Higgs, τα οποία μέσω του ομώνυμου μηχανισμού σπάνε αυθόρμητα την συμμετρία του ενοποιημένου πεδίου. Εδώ ο Alan Guth υπέθεσε ότι υπήρξε μια περίοδος ταχύτατης εκθετικής διαστολής του

Σύμπαντος. Η εκθετική αυτή διαστολή διάρκεσε πολύ λίγο χρόνο, αρκετό όμως ώστε το Σύμπαν να μπορέσει να πολλαπλασιάσει την ακτίνα του κατά έναν τρομακτικά μεγάλο παράγοντα. Ο μηχανισμός που οδήγησε σ' αυτή την διαστολή προέρχεται από τις σύγχρονες θεωρίες της φυσικής που ονομάζονται GUT από τα αρχικά των λέξεων Grand Unified Theories και οι οποίες προσπαθούν να ενώσουν τρεις από τις τέσσερις βασικές αλληλεπιδράσεις, την ισχυρή πυρηνική, την ασθενή πυρηνική και την ηλεκτρομαγνητική. Ο Alan Guth υπολόγισε ότι η ακτίνα του Σύμπαντος μεγάλωσε κατά ένα εννεάκις εκατομμύριο φορές μέσα σε ένα πάρα πολύ μικρό κλάσμα του δευτερολέπτου. Καθώς το Σύμπαν διαστελλόταν, άρχιζε παράλληλα να ψύχεται και οι ενέργειες των σωματιδίων να ελαττώνονται. Κάποτε, συνέβη αυτό που ονομάζεται " αλλαγή φάσης " και η συμμετρία μεταξύ των δυνάμεων καταστράφηκε με την βοήθεια των βαθμωτών σωματιών Higgs. Η ισχυρή έγινε διαφορετική από τις ηλεκτρομαγνητικές και τις ασθενείς πυρηνικές δυνάμεις. Κάτι παρόμοιο συμβαίνει με την μετατροπή φάσης του νερού που γίνεται πάγος. Το νερό είναι συμμετρικό όσο βρίσκεται στην υγρή φάση. Καθώς σχηματίζονται όμως οι κρύσταλλοι του πάγου, που βρίσκονται σε συγκεκριμένες θέσεις και έχουν συγκεκριμένο προσανατολισμό, η συμμετρία του νερού καταστρέφεται. Στην περίπτωση του νερού όμως, μπορούμε να το υπερψύξουμε, δηλαδή να το ψύξουμε με τέτοιο τρόπο ώστε να μην σχηματιστεί πάγος, ακόμη και όταν η θερμοκρασία πέσει κάτω από το σημείο πήξης. Ο Guth



Εικ. 15

υπέθεσε, ότι το Σύμπαν μπορεί να παρουσιάσει ανάλογη συμπεριφορά, δηλαδή μπορεί η θερμοκρασία του να πέσει κάτω από την κρίσιμη τιμή, χωρίς να καταστραφεί η συμμετρία μεταξύ των δυνάμεων. Το Σύμπαν θα βρέθηκε επομένως σε μια ασταθή κατάσταση, με περισσότερη ενέργεια απ' όση θα διέθετε κανονικά αν είχε καταστραφεί η συμμετρία. Αυτή η πρόσθετη ενέργεια ασκεί αντιβαρυντική επίδραση. Το αποτέλεσμα της είναι το ίδιο με αυτό της κοσμολογικής σταθεράς του στατικού μοντέλου του Einstein. Αφού το Σύμπαν θα βρίσκεται ήδη σε μια κατάσταση διαστολής, η απωστική επίδραση της κοσμολογικής σταθεράς θα αναγκάσει το Σύμπαν να διασταλεί με ένα συνεχώς αυξανόμενο ρυθμό. Θα έχουμε

έτσι, μια εικόνα ενός διαστελλόμενου Σύμπαντος που περιέχει πολύ λίγα σωματίδια ύλης και να βρίσκεται ακόμη στην ασταθή κατάσταση υπερψύξης. Οποιοσδήποτε αρχικές ανομοιογένειες κάποιων περιοχών του Σύμπαντος, θα έχουν εξαλειφθεί από την διαδικασία της διαστολής. Η εποχή της επιταχυνόμενης διαστολής του Σύμπαντος ονομάζεται "εποχή πληθωρισμού".

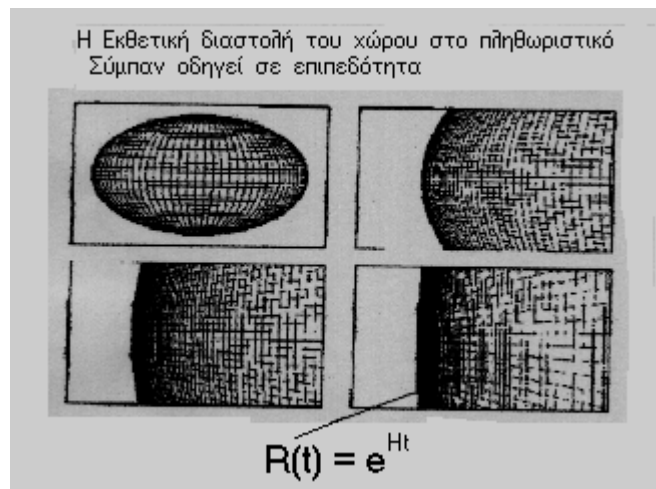
Στην εικ. 15 παρατηρούμε ότι ενώ το καθιερωμένο πρότυπο προβλέπει μια ομαλή αύξηση της ακτίνας του Σύμπαντος με τον χρόνο (α), το πληθωριστικό σενάριο προβλέπει ότι στην αρχή της ζωής του υπήρξε μια εκθετική διαστολή, που πολλαπλασίασε κατά ένα πολύ μεγάλο παράγοντα, της τάξης 10^{28} τις διαστάσεις του (β).

Η ιδέα της πληθωριστικής διαστολής μπορεί να εξηγήσει γιατί υπάρχει τόση μεγάλη ποσότητα ύλης στο Σύμπαν. Η απάντηση δίνεται από την κβαντική θεωρία, σύμφωνα με την οποία τα σωματίδια μπορούν να δημιουργηθούν από την ενέργεια με την διαδικασία σχηματισμού ζευγών σωματιδίων - αντισωματιδίων. Η απάντηση στο ερώτημα : από πού προέρχεται όλη αυτή η ενέργεια είναι ότι η συνολική ενέργεια του Σύμπαντος είναι ίση με μηδέν. Η ύλη στο Σύμπαν αποτελείται από θετική ενέργεια. Καθώς όμως η ύλη έλκεται λόγω της βαρύτητας, η ενέργειά της ελαττώνεται.

Έτσι, υπ'αυτήν την έννοια το βαρυτικό πεδίο έχει αρνητική ενέργεια. Στην περίπτωση ενός Σύμπαντος που είναι κατά προσέγγιση ομοιόμορφο στον χώρο, αποδεικνύεται ότι αυτή η αρνητική βαρυτική ενέργεια εξουδετερώνει ακριβώς την θετική ενέργεια που αντιπροσωπεύεται από την ύλη.

Σήμερα έχουν διατυπωθεί τροποποιημένες μορφές του πληθωριστικού σεναρίου, όπως το "νέο πληθωριστικό μοντέλο" των Steinhardt, Albrecht και Linde, που βασίζεται στην ιδέα της αργής καταστροφής της συμμετρίας. Ένα καλύτερο μοντέλο είναι το "χαοτικό πληθωριστικό μοντέλο" από τον Linde το 1983. Το μοντέλο αυτό έχει όλα τα πλεονεκτήματα των προηγούμενων πληθωριστικών μοντέλων, αλλά δεν εξαρτάται από την αμφίβολη αλλαγή φάσης. Σύμφωνα μ'αυτό δεν υπήρξε αλλαγή φάσης ή "υπέρψυξη" του Σύμπαντος κάτω από την οριακή τιμή, όπου συμβαίνει η καταστροφή της συμμετρίας του. Ο Linde θεωρεί ότι υπάρχει ένα πεδίο με spin 0, που οι κβαντικές διακυμάνσεις, του επιτρέπουν να έχει πολύ μεγάλες τιμές σε ορισμένες περιοχές του Σύμπαντος κατά τα αρχικά του στάδια. Η ενέργεια του πεδίου στις περιοχές αυτές θα λειτουργεί ως κοσμολογική σταθερά : θα ασκεί αντιβαρυτική απωστική επίδραση, αναγκάζοντας έτσι αυτές τις περιοχές να διαστέλλονται με πληθωριστικό τρόπο. Καθώς θα διαστέλλονται, η ενέργεια του πεδίου θα μειώνεται με αργό ρυθμό, μέχρις ότου η πληθωριστική διαστολή μεταβληθεί σε επιβραδυνόμενη διαστολή, όπως αυτή που προβλέπει το μοντέλο της θερμής μεγάλης έκρηξης. Μια απ'αυτές τις περιοχές θα γίνει το μέρος του Σύμπαντος που παρατηρούμε σήμερα.

Το "χαοτικό πληθωριστικό μοντέλο" προβλέπει λογικές διαφορές στην θερμοκρασία της διάχυτης ακτινοβολίας μικροκυμάτων, που συμφωνούν με τις παρατηρήσεις.



Εικ. 16

Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι μπορεί μια "φουσαλίδα με τίποτα" μετά την εποχή του πληθωρισμού να κατέληξε στο σημερινό Σύμπαν.

Θα πρέπει πάντως να σημειωθεί ότι τέτοιου είδους απόψεις χρειάζονται, εκτός των άλλων, βοήθεια από μια ολοκληρωμένη κβαντική θεωρία για την βαρύτητα. Βέβαια τα προβλήματα που παραμένουν ανοικτά είναι πολλά και σημαντικά, όπως αυτό της σκοτεινής ύλης, του αριθμού και της μάζας των νετρίνων, της σωστής δομής των μεγαλοενοποιημένων θεωριών βαθμίδας κ.λ.π. Ο ρυθμός όμως που τρέχει η δουλειά των φυσικών τα τελευταία χρόνια, δίνει την υπόσχεση για πολλά και εντυπωσιακά αποτελέσματα στο μέλλον.

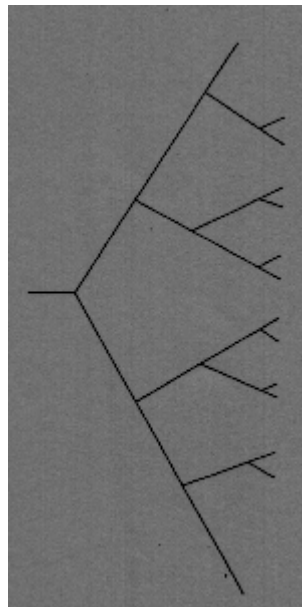
4.16. Η ΑΝΘΡΩΠΙΚΗ ΑΡΧΗ

Η Κοσμολογία βασίζεται όπως έχουμε αναφέρει, στην κοσμολογική αρχή, η οποία οδηγεί σ' ένα επίπεδο Σύμπαν, δηλαδή σ' ένα Σύμπαν ομογενές και ισότροπο. Αλλά γιατί το Σύμπαν είναι τόσο επίπεδο; Η απάντηση είναι ότι το Σύμπαν δεν μπορεί, παρά να είναι κατασκευασμένο έτσι ώστε να ευνοείται η ανθρώπινη ύπαρξη. Άρα, ένα μη επίπεδο Σύμπαν δεν θα επέτρεπε στους ανθρώπους να αναπτυχθούν. Αυτό αποτελεί ένα παράδειγμα της ανθρωπικής αρχής, που είναι η εξής :

Ανθρωπική αρχή : Βλέπουμε το Σύμπαν με τον τρόπο που είναι, γιατί υπάρχουμε.

Η αρχή αυτή έχει δύο εκδοχές, την ασθενή και την ισχυρή, που η διατύπωσή τους είναι :

Ασθενής ανθρωπική αρχή : Οι συνθήκες για την ανάπτυξη της ζωής συναντώνται μόνο σε συγκεκριμένες περιοχές του Σύμπαντος.



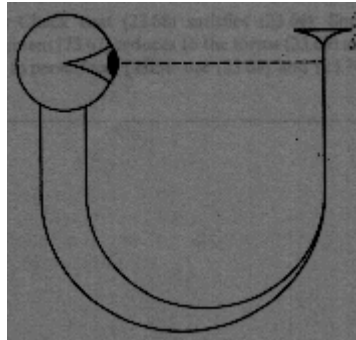
Εικ. 17

Αυτή η μορφή της αρχής μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εξηγήσει, γιατί η μεγάλη έκρηξη συνέβει περίπου πριν δέκα δισεκατομμύρια χρόνια; Η απάντηση είναι, διότι τόσοσ χρόνος απαιτείται για να προκύψουν συνειδητά όντα.

Οι πρώτες στιγμές του Σύμπαντος οδηγούν στην Κβαντική Κοσμολογία. Η κυματοσυνάρτηση, που περιγράφει το Σύμπαν οδηγεί σε διάφορες κατανομές Συμπάντων, που έχουν μέγιστο στην περιοχή που αντιστοιχεί στο δικό μας Σύμπαν. Κάθε Σύμπαν έχει τις δικές του αρχικές συνθήκες και ίσως το δικό του σύνολο φυσικών νόμων. Έτσι η ισχυρή μορφή της ανθρωπικής αρχής διατυπώνεται ως εξής:

Ισχυρή ανθρωπικής αρχή : Οι συνθήκες για την ανάπτυξη της ζωής συναντώνται μόνο σε μερικά Σύμπαντα.

Οι κοσμολόγοι υπολογίζουν, ότι από την μεγάλη έκρηξη θα μπορούσε να προκύψει μια σχεδόν άπειρη ποικιλία Συμπάντων και προβληματίζονται γύρω από τους λόγους, που επέβαλαν στο Σύμπαν που μας φιλοξενεί να έχει τις συγκεκριμένες γνωστές ιδιότητες, όπως την εκπληκτική του προσέγγιση στην διαχωριστική γραμμή ανάμεσα στο " ανοικτό " και στο " κλειστό " σχήμα. Είναι σχεδόν ομοιόμορφο, με αποτέλεσμα να επεκτείνεται ισότιμα, αλλά παράλληλα εμπεριέχει αρκετή ασυμμετρία ώστε να παράγει γαλαξίες και άστρα, ενώ θα μπορούσε να επεκτείνεται πιο αργά, ή να ξανασυσταλεί πριν διαμορφωθούν στο εσωτερικό του τα άστρα, ή να επεκτείνεται πολύ πιο γρήγορα, σκορπίζοντας την ύλη σε τόσο μικρές ποσότητες, που θα απαγόρευαν τον σχηματισμό των άστρων. Και το όλον θέμα είναι ότι, οι περιοριστικοί όροι της ύπαρξης του Σύμπαντος ευνοούν ειδικά την επίγεια, αν όχι την ανθρώπινη ζωή.



Εικ. 18

Κανένας από τους γνωστούς νόμους της φυσικής δεν υποχρεώνει το Σύμπαν να έχει εξελιχθεί όπως εξελίχθηκε. Το Σύμπαν εξελίχθηκε σύμφωνα με μία από τις πολλές παραλλαγές, που προέβλεψαν οι φυσικοί νόμοι, αλλά τι έγιναν οι άλλες "χαμένες" παραλλαγές; Στην εικ. 17, βλέπουμε την ερμηνεία των "πολλών κόσμων" των Everett και Wheeler. Ο Everett βασίζεται στην αρχή της απροσδιοριστίας της Κβαντομηχανικής. Σύμφωνα μ' αυτόν, μια μικροσωματιδιακή οντότητα, όπως το ηλεκτρόνιο βρίσκεται σε όλες τις θέσεις, που προσδιορίζει η κυματική του λειτουργία και υπάρχει ένας ξεχωριστός κόσμος (ένα ξεχωριστό Σύμπαν), που αντιστοιχεί σε κάθε πιθανότητα. Γι' αυτό το λόγο, η άποψη αυτή ονομάζεται "πολυκοσμική" ερμηνεία της Κβαντομηχανικής. Αυτό που συμβαίνει όταν κάνουμε μία μέτρηση είναι, ότι επιλέγουμε μια από τις άπειρες πιθανότητες, συμπύσσοντας την κυματική λειτουργία σ' ένα σημείο και αφήνοντας τους άλλους κόσμους, εξίσου πραγματικούς, αλλά μη επιλεγμένους, κάπου έξω από τα όρια του χωροχρόνου.

Ο Wheeler προωθεί ακόμη περισσότερο την συλλογιστική της Κβαντομηχανικής, υποστηρίζοντας ότι η "κυματική λειτουργία" δεν μπορεί να συμπυκνωθεί σ' ένα σημείο παρά μόνο αν υπάρχει κάποιος για να κάνει μια παρατήρηση. Η άπειρη σειρά των πιθανών Κβαντομηχανικών κόσμων χάνει τον φαντασματικό χαρακτήρα της, μόνο όταν και όπου εμφανιστεί η ζωή για να παρατηρήσει το περιβάλλον της. Στην εικ. 18, βλέπουμε το "μεγάλο U" του Wheeler, από την στιγμή της μεγάλης έκρηξης μέχρι την στιγμή της ανάπτυξης του ανθρώπινου ματιού. Όπως λέει ο Wheeler: "η Κβαντομηχανική μας ανάγκασε να πάρουμε στα σοβαρά την άποψη, ότι ο παρατηρητής είναι αναγκαίος για την δημιουργία του Σύμπαντος, όπως και το Σύμπαν είναι αναγκαίο για την δημιουργία του παρατηρητή".

