



ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΙΩΑΝΝΗ Ε. ΣΦΑΕΛΟΥ

**ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΚΑΙ ΧΡΗΣΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ
ΜΕΘΟΔΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ
ΤΩΝ ΑΣΤΕΡΩΝ ΝΕΤΡΟΝΙΩΝ**

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ,
ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΑΣΤΡΟΦΥΣΙΚΗΣ

ΠΑΤΡΑ
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2010

ΕΠΤΑΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Β. Γερογιάννης (Επιβλέπων)

Καθηγητής Τμήματος Φυσικής Παν/μίου Πατρών

Δ. Γκίκας

Καθηγητής Τμήματος Φυσικής Παν/μίου Πατρών

Χ. Γούδης (Μέλος Τριμελούς Επιτροπής)

Καθηγητής Τμήματος Φυσικής Παν/μίου Πατρών

Β. Ζαφειρόπουλος

Επίκουρος Καθηγητής Τμήματος Φυσικής Παν/μίου Πατρών

Β. Λουκόπουλος

Λέκτορας Τμήματος Φυσικής Παν/μίου Πατρών

Δ. Σουρλής

Αναπληρωτής Καθηγητής Τμήματος Φυσικής Παν/μίου Πατρών

Ζ. Ψυλλάκης (Μέλος Τριμελούς Επιτροπής)

Επίκουρος Καθηγητής Τμήματος Φυσικής Παν/μίου Πατρών

Ευχαριστίες

Η παρούσα διδακτορική διατριβή εκπονήθηκε κατά το χρονικό διάστημα Ιουνίου 2005–Δεκεμβρίου 2010. Αισθάνομαι την ανάγκη να εκφράσω τις ευχαριστίες μου προς όλους όσους με βοήθησαν. Ιδιαίτερα, ευχαριστώ τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Βασίλη Γερογιάννη για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με αυτό το θέμα, όπως επίσης και για την εντατική και αποτελεσματική συνεργασία που είχαμε. Η αμέριστη συμπαράστασή του όλα αυτά τα χρόνια, με την πολύπλευρη υποστήριξη, τις καίριες υποδείξεις και πρωτίτως, τις συμβουλές σε διάφορα επιστημονικά θέματα, μου έδιναν την ώθηση και το κουράγιο να φτάσω στο τέλος αυτής της προσπάθειας για την απόκτηση του διδακτορικού μου.

Οφείλω επίσης να εκφράσω, τις θερμές μου ευχαριστίες στα υπόλοιπα μέλη της επιταμελούς επιτροπής, για την προσεκτική ανάγνωση του κειμένου της διδακτορικής διατριβής και τις εύστοχες παρατηρήσεις τους. Θα ήταν παράλειψη να μην ευχαριστήσω τον διδάκτορα κ. Αναστάσιο Κατελούζο για την πολύτιμη βοήθεια που μου προσέφερε από την αρχή.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω θερμά την οικογένειά μου για την υπομονή και την ουσιαστική της συμπαράσταση όλα αυτά τα χρόνια.

Περιεχόμενα

	iii
Ευχαριστίες	v
Περίληψη	ix
Summary	xiii
Εισαγωγή	xv
0.1 Μονάδες και συμβολισμοί	xx
1 Σχετικιστικές εξισώσεις αστέρα νετρονίων	1
1.1 Υποθέσεις	1
1.2 Γενικά στοιχεία για την περιγραφή αστέρα νετρονίων	2
1.3 Μοντέλα μη περιστρεφόμενων αστέρων νετρονίων	5
1.4 Μοντέλα ομοιόμορφα περιστρεφόμενων αστέρων νετρονίων	7
1.4.1 Η περιστροφικά διαταραγμένη μετρική	10
1.4.2 Σφαιρική παραμόρφωση	12
1.4.3 Τετραπολική παραμόρφωση	14
1.4.4 Διορθώσεις τρίτης τάξης στην γωνιακή ταχύτητα για την περίπτωση της ομοιόμορφης περιστροφής	16
2 Η μέθοδος Complex-Plane Strategy	21
2.1 Περιγραφή της μεθόδου <i>CPS</i>	21
2.1.1 Γενικά	21
2.1.2 Θεμελιώδεις πτυχές της <i>CPS</i>	22
2.1.3 Θεμελίωση της <i>CPS</i>	24
2.1.4 Συναρτήσεις, φυσικές ποσότητες, αρχικές συνθήκες στα πλαίσια της <i>CPS</i>	27
3 Υπολογισμοί	31
3.1 Υπολογισμοί μέχρι τις διορθώσεις τρίτης τάξης	31

3.1.1	Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης σύμφωνα με την μέθοδο διαταραχής του Hartle	31
3.1.2	Υπολογισμός συνόρου της περιστρεφόμενης δομής	35
3.1.3	Ένας αλγόριθμος για την λεπτή ρύθμιση του \mathcal{K}'	39
3.1.4	Το λογισμικό πακέτο "ATOMFT System"	41
3.1.5	Η αριθμητική διαδικασία μετά την εξαγωγή των αριθμητικών αποτελεσμάτων από το ATOMFT	45
3.2	Υπολογισμοί διορθώσεων τρίτης τάξης στην γωνιακή ταχύτητα	48
3.3	Υπολογισμός του ορίου της μάζας διαφυγής	50
4	Αποτελέσματα - Συμπεράσματα	55
4.1	Αριθμητικά αποτελέσματα και γραφικές παραστάσεις	55
4.2	Συμπεράσματα	84
A'	Απόδειξη της εξίσωσης υδροστατικής ισορροπίας Εξ. (1.17)	87
B'	Απόδειξη διαφορικής εξίσωσης συρμού από περιστροφή αδρανειακού συστήματος	93
Γ'	Πρόγραμμα επίλυσης του προβλήματος αρχικών τιμών με εφαρμογή του ATOMFT	99
Δ'	Μονάδες που χρησιμοποιούνται στην διατριβή	111

Περίληψη

Βασικός άξονας της παρούσας διατριβής είναι οι σχετικιστικοί υπολογισμοί πολυτροπικών μοντέλων περιστρεφόμενων αστέρων νετρονίων. Επειδή δεν υπάρχει ακριβής αναλυτική λύση των εξισώσεων του *Einstein* για το βαρυτικό πεδίο ενός περιστρεφόμενου αστέρα νετρονίων, επιχειρούμε την αριθμητική επίλυση στο μιγαδικό επίπεδο όλων των διαφορικών εξισώσεων, που εμπεριέχονται στην διαταρακτική μέθοδο του *Hartle*. Δίνουμε έμφαση στον υπολογισμό φυσικών ποσοτήτων, που περιγράφουν την γεωμετρία ταχέως περιστρεφόμενων μοντέλων. Συγκρίνοντας τα αριθμητικά αποτελέσματα που βρίσκουμε με ορισμένες πολύπλοκες επαναληπτικές μεθόδους, ελέγχουμε την αξιολογη βελτίωση των αποτελεσμάτων μας, έναντι εκείνων που δίνονται από το κλασσικό διαταρακτικό σχήμα του *Hartle*. Η παρούσα διατριβή χωρίζεται σε τέσσερα μέρη, που αναπτύσσονται στα κεφάλαια 1, 2, 3 και 4.

Στο πρώτο κεφάλαιο, θα εστιάσουμε την προσοχή μας στο σύστημα διαφορικών εξισώσεων *Oppenheimer – Volkov*, που εξάγονται από τις εξισώσεις πεδίου του *Einstein*. Σε συνδυασμό με μια καταστατική εξίσωση περιγράφουμε σχετικιστικά πολυτροπικά μοντέλα μη περιστρεφόμενων αστέρων νετρονίων σε υδροστατική ισορροπία. Ακολούθως, περιγράφουμε ένα καθαρά σχετικιστικό φαινόμενο, τον συρμό των αδρανειακών συστημάτων λόγω της περιστροφής του αστέρα. Στην συνέχεια, χρησιμοποιούμε την μέθοδο διαταραχής του *Hartle*, σύμφωνα με την οποία δεχόμαστε ότι ο στατικός αστέρας είναι το αδιατάρακτο σύστημα, πάνω στο οποίο εφαρμόζουμε μικρές διαταραχές (θεωρώντας την ομοιόμορφη περιστροφή ως διαταραχή) και έτσι υπολογίζουμε τις διορθώσεις στην μάζα και την ακτίνα, λόγω των σφαιρικών και τετραπολικών παραμορφώσεων. Τέλος, εφαρμόζουμε μία διαταρακτική προσέγγιση με όρους τρίτης τάξης στην γωνιακή ταχύτητα.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, θα κάνουμε μια εκτενή περιγραφή της στρατηγικής του μιγαδικού επιπέδου (Complex-Plane Strategy, εν συντομία *CPS*). Σύμφωνα με αυτή την μέθοδο, η αριθμητική ολοκλήρωση των διαφορικών εξισώσεων γίνεται στο μιγαδικό επίπεδο και όλες οι εμπλεκόμενες συναρτήσεις του προβλήματός μας είναι μιγαδικές, μιγαδικής μεταβλητής. Συνεπώς,

για την αποφυγή διαφόρων ιδιομορφιών ή και απροσδιόριστων μορφών, που προκύπτουν από τις οριακές συνθήκες του προβλήματος, κυρίως στο κέντρο και στην επιφάνεια του αστέρα, μας δίνεται η δυνατότητα να επιλέξουμε ένα κατάλληλο μιγαδικό μονοπάτι για την εκτέλεση πάνω σ' αυτό της αριθμητικής ολοκλήρωσης των διαφορικών εξισώσεων. Επιπλέον, οι αριθμητικές ολοκληρώσεις όλων των διαφορικών εξισώσεων του προβλήματος συνεχίζονται πολύ πέραν της επιφάνειας του αδιατάρακτου μοντέλου, με αποτέλεσμα η ακτίνα υπολογίζεται εύκολα ως η ρίζα του πραγματικού μέρους της συνάρτησης της πυκνότητας (χωρίς να είμαστε αναγκασμένοι να εκτελέσουμε οποιοσδήποτε αριθμητικές προεκβολές, που είναι γνωστό ότι επιφέρουν σημαντικά σφάλματα).

Στο τρίτο κεφάλαιο, υπολογίζουμε σημαντικές φυσικές ποσότητες που αφορούν τον αστέρα νετρονίων, ολοκληρώνοντας αριθμητικά ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Ιδιαίτερα, υπολογίζουμε το σύνορο της περιστρεφόμενης αστρικής δομής με δύο τρόπους. Ο πρώτος είναι με βάση την κλασική διαπραγμάτευση της διαταρακτικής μεθόδου του *Hartle* και ο δεύτερος με τον αλγόριθμο λεπτής ρύθμισης που αναπτύσσουμε με την βοήθεια του οποίου παίρνουμε αξιόλογα αριθμητικά αποτελέσματα. Στην συνέχεια περιγράφουμε το λογισμικό πακέτο *ATOMFT System*. Ακολούθως, με την βοήθεια των λύσεων των διαφορικών εξισώσεων τρίτης τάξης ως προς την γωνιακή ταχύτητα, υπολογίζουμε τις διορθώσεις στην στροφορμή, την ροπή αδράνειας, την περιστροφική κινητική ενέργεια και την βαρυτική δυναμική ενέργεια του αστέρα. Εφαρμόζοντας τέλος μια κατάλληλη μέθοδο, υπολογίζουμε το όριο της μάζας διαφυγής.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, εκθέτουμε πίνακες αποτελεσμάτων και κάποιες σημαντικές γραφικές παραστάσεις. Δίνουμε επίσης ορισμένες λεπτομέρειες της εφαρμογής του προγράμματός μας. Επιπλέον, δίνουμε έμφαση στο γνωστό «παράδοξο» που αφορά την μέθοδο διαταραχών του *Hartle*, σύμφωνα με την οποία αυτή η μέθοδος αν και αντιπροσωπεύει μια προσέγγιση αργής περιστροφής ενός αστέρα νετρονίων, δίνει αξιόλογα αποτελέσματα ακόμη και όταν εφαρμόζεται σε ταχέως περιστρεφόμενα μοντέλα. Στην παρούσα έρευνα αφαιρέσαμε τον κρίσιμο περιορισμό του τερματισμού των αριθμητικών ολοκληρώσεων λίγο πριν από την επιφάνεια του μη περιστρεφόμενου αστέρα, συνεχίζοντας την ολοκλήρωση αρκετά πέραν του συνόρου του. Αυτό σημαίνει ότι η *CPS* "γνωρίζει" την παραμόρφωση που προκαλείται από την περιστροφή για ένα αρκετά εκτεταμένο διάστημα που περιβάλλει την αρχικά σφαιρική μορφή του αστέρα. Συνεπώς, για τους υπολογισμούς που απαιτούνται για τον περιστρεφόμενο αστέρα, η *CPS* δεν προεκβάλλει ποτέ, με αποτέλεσμα τα σφάλματα των υπολογισμών είναι πολύ μικρά. Τέλος, λαμβάνοντας υπόψη κατάλληλα στους υπολογισμούς μας ένα ορισμένο αριθμό συνθηκών, συνδυάζοντας την κλασική διαπραγμάτευση του διαταρακτικού σχήματος του

Hartle και τις σχέσεις που απορρέουν από την δομή της στρατηγικής του μιγαδικού επιπέδου, οδηγηθήκαμε τελικά στην επινόηση του αλγόριθμου λεπτής ρύθμισης, αποτέλεσμα του οποίου είναι η σημαντική βελτίωση της ακρίβειας των αριθμητικών αποτελεσμάτων που αφορούν την γεωμετρία του συνόρου του αστέρα νετρονίων. Άμεση συνέπεια όλων αυτών είναι ο υπολογισμός με ικανοποιητική ακρίβεια του ορίου της μάζας διαφυγής, εφαρμόζοντας μια κατάλληλη μέθοδο.

Summary

In the present dissertation we solve numerically in the complex plane all the differential equations involved in Hartle's perturbation method for computing general-relativistic polytropic models of rotating neutron stars. We give emphasis on computing quantities describing the geometry of models in rapid rotation. Compared to numerical results obtained by certain sophisticated iterative methods, we verify appreciable improvement of our results vs to those given by the classical Hartle's perturbative scheme. The description of the present investigation is constituted by four parts and has as follows.

In the first chapter, we start to describe the nonrotating neutron star model. Then, according to "Hartle's perturbation method", the solid rotation is added as a perturbation. So, the equations of structure for uniformly rotating stars are given up to second order in the angular velocity and the distortions to mass and radius are calculated as corrections owing to spherical and quadrupole deformations. Subsequently, the equations are given up to third order in the angular velocity.

In the second chapter, we describe extensively the numerical method called Complex-Plane Strategy (abbreviated *CPS*). According to this method, we solve numerically in the complex plane all the differential equations involved in Hartle's perturbation method. Any function of our problem is interpreted as a complex-valued function of a complex variable. *CPS* offers an alternative for avoiding any singularities and/or indeterminate forms, especially near the center and the surface of the nonrotating star, by performing numerical integration along a proper complex path. Moreover, the numerical integrations of all the differential equations governing the problem are continued well beyond the surface of the nonrotating star, thus, the radius is readily calculated as root of the density function (without been forced to perform any numerical extrapolations).

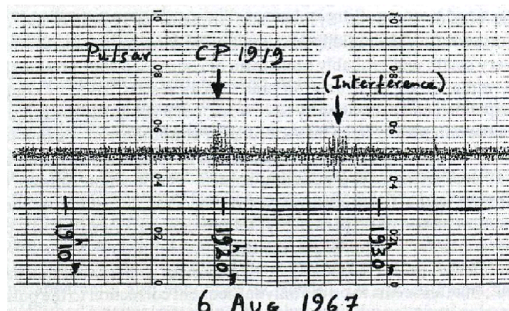
In the third chapter, we solve numerically in the complex plane the system of first-order differential equations resulting from Hartle's perturbation method. We give emphasis on computing the boundary of the rotating

configuration by the so-called fine tuning algorithm which gives appreciably improved results. Then, we describe the software systems that we use in our investigation, with emphasis on the ATOMFT System. Finally, we compute the third order corrections in the uniform angular velocity for the angular momentum, moment of inertia, rotational kinetical energy and gravitational potential energy. Furthermore, we describe a method for computing the mass-shedding limit.

In the fourth chapter, we present several numerical results and some significant graphical representations. We also give certain details of our program implementation. Concluding, we emphasize on the well-known “paradox” concerning Hartle’s perturbation method, according to which this method, although representing a slow-rotation approximation, gives remarkably accurate results even when applied to rapidly rotating models. In the present work, we have removed the certain critical limitations of terminating integrations below the radius of the star. Instead, the numerical integration of our problem continues well beyond the boundary of the star. This means that *CPS* knows the distortion to be caused by rotation over a sufficiently extended space surrounding the initially spherical configuration. So, to the computation of a particular rotating configuration, *CPS* never extrapolates beyond the end of the function tables computed by such extended numerical integrations. It is exactly the avoidance of any extrapolation which keeps the error in the computations appreciably small. Finally, we have properly taken into account certain conditions matching Hartle’s perturbative scheme and the relations arising in the framework of the Complex-Plane Strategy. This treatment has led to the fine tuning algorithm which, in turn, has improved appreciably the accuracy of our numerical results related to the geometry of the star’s boundary. Consequently, the mass-shedding limit can be calculated using a proper procedure which gives remarkably accurate results.

Εισαγωγή

Το 1932 ο *J. Chadwick* ανακάλυψε το νετρόνιο ως ένα στοιχειώδες σωματίδιο. Το 1934 οι αστρονόμοι *Walter Baade* και *Fritz Zwicky* πρότειναν για πρώτη φορά την ύπαρξη των αστέρων νετρονίων, διατυπώνοντας την θεωρία ότι όταν ένα πρωτόνιο και ένα ηλεκτρόνιο βρεθούν σε συνθήκες εξαιρετικά υψηλών πιέσεων, δημιουργείται ένα νετρόνιο. Τέτοιες συνθήκες υψηλών πιέσεων επικρατούν στο εσωτερικό ενός υπό κατάρρευση αστέρα, οπότε αυτός μπορεί να καταλήξει στον σχηματισμό ενός αστέρα νετρονίων. Ο αστέρας αυτός έχει βγει από την κύρια ακολουθία, δηλαδή δεν συμβαίνουν θερμοπυρηνικές αντιδράσεις στο εσωτερικό του. Η βαρυτική πίεση που τείνει να συμπιέσει τον αστέρα ακόμα περισσότερο, εξισορροπείται από μια αντίθετη κατεύθυνσης πίεση που δημιουργούν τα εκφυλισμένα νετρόνια. Τα νετρόνια ανήκουν στην οικογένεια των φερμιονίων και η πίεση που ασκούν για να αντισταθμίσουν τη βαρύτητα στο εσωτερικό των αστέρων νετρονίων οφείλεται σε κβαντομηχανικά φαινόμενα και περιγράφεται με την αρχή του *Pauli* και την αρχή της αβεβαιότητας του *Heisenberg*. Τον Ιούλιο του 1967, η μεταπτυχιακή φοιτήτρια του Πανεπιστημίου του *Cambridge*, *Jocelyn Bell*, ανακάλυψε αναλύοντας δεδομένα από ένα πείραμα που είχε σχεδιάσει ο *Anthony Hewish*, τον πρώτο pulsar, ένα αντικείμενο από το εξώτερο διάστημα που εκπέμπει ασθενείς περιοδικούς παλμούς στο φάσμα των ραδιοσυχνοτήτων. Η μεγάλη ακρίβεια της περιόδου επανάληψης των σημάτων ξάφνιασε τους ερευνητές που στην αρχή δεν παρέλειψαν να εξετάσουν την περίπτωση αποστολής σημάτων από εξωγήινα λογικά όντα. Σύντομα όμως, αυτή η ιδέα εγκαταλείφθηκε και προτάθηκε ότι η πηγή τους ήταν κάποιος γρήγορα περιστρεφόμενος αστέρας νετρονίων με ένα πολύ έντονο μαγνητικό πεδίο. Για την ανακάλυψή του ο *A. Hewish* τιμήθηκε με το βραβείο Nobel Φυσικής, το 1974. Χρησιμοποιώντας τον δορυφόρο *Swift* της *NASA*, φυσικοί των πανεπιστημίων *McGill* και *Penn State* κατάφεραν να εντοπίσουν ένα αντικείμενο, που είναι πιθανότατα ο πλησιέστερος αστέρας νετρονίων στον πλανήτη Γη. Το αντικείμενο αυτό που βρίσκεται στον αστερισμό της Μικρής Άρκτου, ονομάστηκε *Calvera*. Σήμερα είναι γνωστοί τουλάχιστον 1400 pulsars, από τους περίπου 10^5 που υπολογίζουμε ότι πρέπει να υπάρχουν στον Γαλαξία μας.



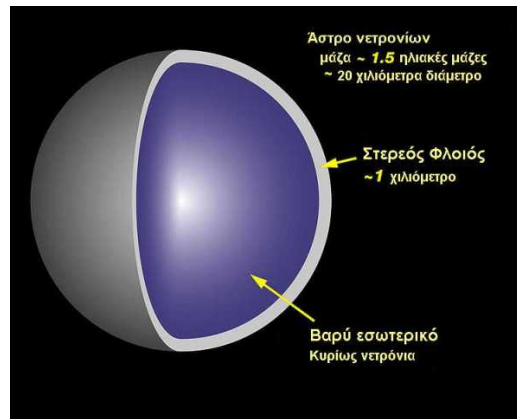
Σχήμα 1: Τα χαρακτηριστικά του σήματος που κατέγραψε η *Joselyn Bell*.

Οι αστέρες νετρονίων αποτελούν μία από τις τρεις μορφές των μόνιμων τελικών υπολειμμάτων της εξέλιξης ενός αστέρα: είναι το ένα είδος "αστρικού πτώματος" (τα άλλα δύο είναι ο λευκός νάνος και η μελανή οπή). Σχηματίζονται από την βαρυστική κατάρρευση ενός γεννήτορα αστέρα μεγάλης μάζας (περίπου $8M_{\odot}^1$ έως $20M_{\odot}$), μετά από μία έκρηξη υπερκαινοφανούς τύπου II και ίσως τύπων *Ia* και *Ib*. Για να σχηματιστεί ένας αστέρας νετρονίων, θα πρέπει η μάζα που θα απομείνει στον αστέρα μετά τις τελευταίες δυναμικές του διεργασίες να είναι μεταξύ $1.4M_{\odot}$ (όριο *Chandrasekhar*) και $3.2M_{\odot}$ (όριο *Landau – Oppenheimer – Volkoff (LOV)*). Η σημερινή κατανόηση της δομής τους στηρίζεται σε μαθηματικά μοντέλα της Θεωρητικής Φυσικής, αφού είναι απολύτως αδύνατο να διεξαχθεί ανάλογο πείραμα πάνω στην Γη. Οι αστέρες νετρονίων είναι υπερσυμπυκνωμένα αστρικά σώματα με ακτίνα της τάξης των 10Km . Το βαρυστικό τους πεδίο είναι τόσο ισχυρό, που η ταχύτητα διαφυγής προσεγγίζει το $1/3$ της ταχύτητας του φωτός. Οι κεντρικές πυκνότητες που εμφανίζουν είναι της τάξης των 10^{15}g/cm^3 , δηλαδή, μια τάξη μεγέθους πάνω από την πυρηνική πυκνότητα (με άγνωστες ιδιότητες για την σημερινή φυσική).

Οι αστέρες νετρονίων χαρακτηρίζονται από δύο πολύ βασικές ιδιότητες. Η πρώτη είναι το ισχυρότατο μαγνητικό τους πεδίο, της τάξης των 10^{12}Gauss , που προέρχεται από την διατήρηση της ροής του αρχικού μαγνητικού πεδίου του αστέρα πριν καταρρεύσει. Οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές κατευθύνονται κατά μήκος του ισημερινού (τοροειδές μαγνητικό πεδίο) στο εσωτερικό του και κατά την διεύθυνση Βορρά-Νότου (πολοειδές μαγνητικό πεδίο). Η δεύτερη είναι η πολύ μεγάλη ταχύτητα περιστροφής που πηγάζει από την αρχή διατήρησης της στροφορμής. Οι νεογέννητοι αστέρες νετρονίων περιστρέφονται συνήθως διαφορετικά. Η διαφορετική περιστροφή τους δίνει την δυνατότητα να συγκρατήσουν μεγαλύτερη μάζα σε κατάσταση ισορροπίας σε σύγκριση με τους μη-περιστρεφόμενους ή ομοιόμορφα περιστρεφόμενους α-

¹Με M_{\odot} συμβολίζουμε την ηλιακή μάζα.

στέρες νετρονίων, σύμφωνα με τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας. Από την περίοδο περιστροφής ενός παλμικού αστέρα και τον ρυθμό αύξησης αυτής, οι αστρονόμοι μπορούν να εκτιμήσουν την ηλικία του. Με την πάροδο του χρόνου επιβραδύνεται σταδιακά, με την περιστροφική ενέργεια να μετατρέπεται σε ραδιοκύματα με την μεσολάβηση του μαγνητικού πεδίου, με μηχανισμό που επίσης είναι άγνωστος στις λεπτομέρειες. Η αύξηση της περιόδου περιστροφής μπορεί να φθάσει τα λίγα εκατομμυριοστά του δευτερολέπτου ανά γήινο έτος για νεαρούς αστέρες, όπως είναι ο πάλσαρ στο κέντρο του υπολείμματος υπερκαινοφανούς $M1$ στον αστερισμό του Ταύρου, που περιστρέφεται με 1810 στροφές το λεπτό. Αν όμως ο αστέρας ανήκει σε διπλό αστρικό σύστημα και δέχεται ύλη που αποσπά από τον συνοδό (που συνήθως είναι ένας ερυθρός γίγαντας), μπορεί να επιταχύνει σημαντικά την περιστροφή του, διαχέοντας ταυτόχρονα βαρυτικά κύματα στο διάστημα, καθώς η νέα ύλη σχηματίζει γύρω του ένα ταχύτατα περιστρεφόμενο δίσκο προσαυξήσεως. Δημιουργούνται έτσι οι λεγόμενοι "millisecond pulsars", που έχουν όλοι περίοδο από $1 - 10ms$. Ο ταχύτερα περιστρεφόμενος αστέρας νετρονίων που είναι γνωστός αυτή την στιγμή είναι ο ΧΤΕ J1739-285, με 1122 στροφές το δευτερόλεπτο. Να σημειωθεί ότι και σε συνηθισμένους αστέρες νετρονίων, οι τεράστιες φυγόκεντρες δυνάμεις που αναπτύσσονται εξαιτίας της ιλιγγιώδους περιστροφής στο σύστημα αναφοράς του σώματος, είναι αρκετά ισχυρές ώστε να δώσουν στο άστρο ένα ελαφρώς πεπλατυσμένο σχήμα, όπως συμβαίνει με την Γη ή τον πλανήτη Δία και αυτό παρά το τρομακτικό βαρυτικό πεδίο του αστέρα. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, οι αστέρες νετρονίων επιβραδύνονται με την πάροδο του χρόνου. Υπάρχουν όμως χρονικές περίοδοι κατά τις οποίες παρατηρούνται ξαφνικές επιταχύνσεις στην περιστροφή τους. Αυτά τα επιταχυντικά γεγονότα ονομάζονται "*glitches*" και πιθανότατα οφείλονται σε κάποιον αστρικό σεισμό. Λίγες ημέρες αργότερα, ο αστέρας επαναλαμβάνει την κανονική του επιβράδυνση. Το παραπάνω φαινόμενο πιστεύεται ότι οφείλεται στα υπέρρευστα νετρόνια που βρίσκονται στο εσωτερικό του αστέρα νετρονίων. Καθώς ο αστέρας ακτινοβολεί, χάνει σταδιακά ενέργεια και η ταχύτητα περιστροφής του φλοιού του μειώνεται, ενώ το εσωτερικό του που βρίσκεται σε υπέρρευστη κατάσταση συνεχίζει να περιστρέφεται με σταθερή ταχύτητα. Τα υπέρρευστα νετρόνια σχηματίζουν δίνες όπου κάποιες απ' αυτές "κολλάνε" με το ένα άκρο τους στην εσωτερική επιφάνεια του φλοιού, ενώ το άλλο άκρο τους εκτείνεται μέχρι το εσωτερικό του αστέρα. Καθώς ο φλοιός επιβραδύνεται, οι δίνες αυτές "τεντώνονται" και όταν η τάση εφελκυσμού που υφίστανται γίνει πολύ μεγάλη, προκαλούν ένα απότομο τράνταγμα στο φλοιό που συνοδεύεται από μια ξαφνική επιτάχυνση αυτού. Αυτές οι ιδιαιτερότητες των αστέρων νετρονίων είναι που τους καθιστούν τόσο σημαντικούς για έρευνα, καθώς μπορούμε να τους χρησιμοποιήσουμε ως «φυσικά» εργαστήρια, από την μελέτη των οποίων μπορούμε να εξακριβώσουμε την ισχύ πολλών



Σχήμα 2: Θεωρητικό πρότυπο για την εσωτερική δομή ενός αστέρα νετρονίων.

νέων θεωριών που προτείνονται σε διάφορους τομείς της φυσικής.

Οι γνώσεις και η κατανόηση που έχουμε σήμερα για τους αστέρες νετρονίων προέρχεται αποκλειστικά από το ηλεκτρομαγνητικό φάσμα ακτινοβολίας και κυρίως από τα ραδιοκύματα και τις ακτίνες X και γ . Οι παρατηρήσεις των διπλών συστημάτων που περιέχουν αστέρες νετρονίων στην περιοχή των ακτίνων X σε συνδυασμό με οπτικές παρατηρήσεις, μας παρέχουν πληροφορίες όπως η λαμπρότητα και η μάζα από τις οποίες μπορούμε να εικάσουμε την ακτίνα του αστέρα και την ροπή αδράνειάς του. Η συχνότητα περιστροφής ενός αστέρα νετρονίων είναι η παράμετρος, που παρατηρείται πιο εύκολα και υπολογίζεται με μεγάλη ακρίβεια. Μια άλλη βασική παρατηρούμενη παράμετρος που υπολογίζεται σε μερικές περιπτώσεις με μεγάλη ακρίβεια είναι η μάζα του. Μελέτες από τους *Finn* και *van Kerkwijk et. al.* ([46], [47]), έχουν δείξει ότι τα όρια των μαζών για αστέρες νετρονίων κυμαίνονται από $1.04M_{\odot} < M < 1.44M_{\odot}$. Όσον αφορά την ακτίνα ενός αστέρα νετρονίων, οι παρατηρήσεις σε διπλά συστήματα που εκπέμπουν σε ακτίνες X δεν δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα. Με βάση αυτά τα παρατηρησιακά δεδομένα δεν είναι δυνατόν να εξάγουμε συγκεκριμένες πληροφορίες για την καταστατική εξίσωση του αστέρα νετρονίων. Για τον λόγο αυτό, οι προτεινόμενες καταστατικές εξισώσεις είναι πολλές και δίνουν ένα μεγάλο εύρος στην πιθανή ακτίνα των αστέρων νετρονίων.

Οι αστέρες νετρονίων εκπέμπουν μικρής διάρκειας και υψηλής ενέργειας ραδιοφωνικούς παλμούς (μη θερμικής φύσεως), που επαναλαμβάνονται με πολύ σταθερή περίοδο (παλμικοί αστέρες). Ο άξονας περιστροφής τους δεν συμπίπτει με τον μαγνητικό τους άξονα. Επειδή μέσα στο ισχυρό μαγνητικό τους πεδίο βρίσκονται εγκλωβισμένα φορτισμένα σωματίδια, ηλεκτρόνια και ιόντα, αυτά συμπαρασύρονται κατά την περιστροφική κίνηση των αστέρων

νετρονίων και εξαιτίας των τεράστιων επιταχύνσεων που αποκτούν, εκπέμπουν ακτινοβολία συγχρότρου που έχει σχήμα λεπτού κώνου, εφάπτεται στις τροχιές τους και διαδίδεται προς μία μόνο κατεύθυνση. Με τον τρόπο αυτό οι πάσσαρς δρουν σαν κοσμικοί φάροι σαρώνοντας συνεχώς με μια ταχύτητα περιστρεφόμενη δέσμη ακτινοβολίας τον ουρανό, η οποία στα γήινα παρατηρητήρια γίνεται αντιληπτή με τη μορφή περιοδικών παλμών. Στο Σχ. 3, βλέπουμε μια σχηματική αναπαράσταση ενός magnetar (αστέρας νετρονίων με ισχυρό μαγνητικό πεδίο της τάξης των $10^{15} Gauss$). Η σφαίρα στο κέντρο είναι ο αστέρας νετρονίων, η κατακόρυφη γραμμή είναι ο νοητός άξονας περιστροφής του και οι καμπύλες αναπαριστούν τις δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου. Οι προεξέχοντες κώνοι είναι οι δέσμες εκπομπής των ακτίνων X και γ και βρίσκονται πάνω στον μαγνητικό άξονα.

Με βάση όλες τις πληροφορίες που παίρνουμε από το ηλεκτρομαγνητικό φάσμα ακτινοβολίας, σε συνδυασμό με τις σύγχρονες γνώσεις για τη συμπεριφορά της ύλης σε υπερυψηλές πυκνότητες που μας παρέχει η φυσική υψηλών ενεργειών, μπορούμε να σχηματίσουμε την εξής εικόνα για τη δομή των αστέρων νετρονίων:

α) Εξωτερική επιφάνεια: Είναι πολύ μικρή σε πάχος (μερικά εκατοστά) και αποτελείται από αέριο πρωτονίων και εκφυλισμένων ηλεκτρονίων. Έχει πυκνότητα μικρότερη των $10^6 g/cm^3$. Η βαρύτητα είναι 10^{11} φορές μεγαλύτερη της Γης, το δε μαγνητικό πεδίο είναι $10^{12} Gauss$, αρκετά ισχυρό για να "καταστρέψει" την ατομική δομή.

β) Εξωτερικός φλοιός: Χαρακτηρίζεται από πυκνότητα που ξεκινά από την τιμή $10^6 g/cm^3$ και φτάνει μέχρι $4.3 \times 10^{11} g/cm^3$. Αποτελείται από κρυσταλλικό πλέγμα πάχους 100m περίπου και η σύστασή του είναι πιθανότατα πυρήνες σιδήρου εμπλουτισμένους με νετρόνια σε ισορροπία με εκφυλισμένα ηλεκτρόνια. Στην οριακή πυκνότητα $4.3 \times 10^{11} g/cm^3$ που ονομάζεται πυκνότητα ενστάλαξης νετρονίων (neutron drip density), είναι ενεργειακά προτιμητέο για τα νετρόνια να "δραπετεύσουν" από τους πυρήνες και να κινηθούν ελεύθερα στο γύρω χώρο.

γ) Εσωτερικός φλοιός: Η πυκνότητα συνεχίζει να αυξάνει μέχρι την τιμή $2.0 \times 10^{14} g/cm^3 - 2.4 \times 10^{14} g/cm^3$. Το σφαιρικό σχήμα των πυρήνων παύει να αποτελεί σταθερή λύση, έτσι οι πυρήνες αρχικά αποκτούν επιμήκες σχήμα και έπειτα πεπλατυσμένο. Αποτελείται από ένα κρυσταλλικό πλέγμα πυρήνων πλούσιων σε νετρόνια, από ένα υπέρρευστο νετρονίων και ένα αέριο ηλεκτρονίων.

δ) Υπέρρευστο νετρονίων: Η περιοχή αυτή αποτελείται κυρίως από υπέρρευστα νετρόνια και σ' ένα μικρότερο ποσοστό από υπέρρευστα πρωτόνια (με ιδιότητες υπεραγωγιμότητας) και κανονικά ηλεκτρόνια. Η πυκνότητα αυτής της περιοχής ξεκινά από $2.0 \times 10^{14} g/cm^3 - 2.4 \times 10^{14} g/cm^3$ και φθάνει μέχρι την πυκνότητα του πυρήνα.

ε) Πυρήνας: Οι γνώσεις μας γι' αυτή τη περιοχή είναι ελάχιστες, ενώ ακόμη και η ύπαρξή του αμφισβητείται. Πιθανότατα να υπάρχουν συμπυκνώματα πιονίων, λάμδα υπερόνια, δέλτα isobars και πλάσμα κουάρκ-γκλουονίων.

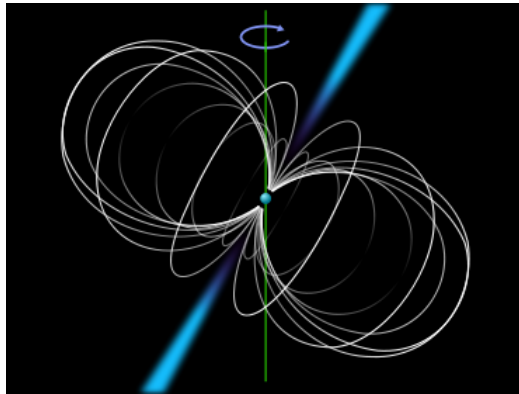
Ένα από τα βασικότερα ερωτήματα, που συνδέονται με τους αστέρες νετρονίων είναι αυτό της μέγιστης επιτρεπόμενης μάζας. Αυτή η γνώση θα μας επιτρέψει να τους διακρίνουμε σε κατηγορίες, αλλά και θα μας επιβεβαιώσει την ύπαρξη μελανών οπών με βάση την μελέτη της βαρυτικής αλληλεπίδρασης ενός ορατού αστέρα με έναν αόρατο συνοδό. Οι πρώτοι υπολογισμοί μοντέλων, που αφορούν την μελέτη των αστέρων νετρονίων έγινε από τους *Oppenheimer – Volkov* το 1939. Αυτοί θεώρησαν ότι οι αστέρες νετρονίων αποτελούνται από ιδανικό αέριο ελευθέρων και εκφυλισμένων ηλεκτρονίων. Μια πρώτη εκτίμηση ενός ανώτατου ορίου για τη μάζα ενός εκφυλισμένου αστέρα έγινε από τον *Landau* (1932). Γενικά για τον υπολογισμό της μάζας ενός αστέρα, ολοκληρώνουμε τις εξισώσεις ισορροπίας λαμβάνοντας υπ' όψιν μια καταστατική εξίσωση, από την οποία εξαρτάται ο υπολογισμός των ορίων για τις μάζες των αστέρων νετρονίων. Οι *Rhoades* και *Ruffini* (1974), κατάφεραν να υπολογίσουν τη μέγιστη μάζα τους με βάση μια σειρά συλλογισμών για μη περιστρεφόμενο αστέρα νετρονίων, χωρίς την εξάρτηση από την εκάστοτε καταστατική εξίσωση.

Στην παρούσα ερευνητική διατριβή, θα μελετήσουμε πολυτροπικά μοντέλα ομοιόμορφα περιστρεφόμενων με Κεπλεριανή γωνιακή ταχύτητα αστέρων νετρονίων μέγιστης μάζας, χρησιμοποιώντας την μέθοδο διαταραχής του *Hartle* ([1], [2], [3], [9]), όπου εφαρμόζουμε μια διαταρακτική προσέγγιση με όρους τρίτης τάξης στην γωνιακή ταχύτητα του αστέρα. Για την αριθμητική διαπραγμάτευση αυτής της διαταρακτικής μεθόδου υλοποιούμε την αριθμητική μέθοδο *CPS*, που αρχικά αναπτύχθηκε και χρησιμοποιήθηκε για τους υπολογισμούς σε κλασικά πολυτροπικά μοντέλα με ταχεία περιστροφή (επ' αυτού του ζητήματος βλέπε [10], [11]). Σύμφωνα με την μέθοδο αυτή, η αριθμητική ολοκλήρωση όλων των διαφορικών εξισώσεων που διέπουν την αστρική δομή θα γίνει στο μιγαδικό επίπεδο, όπου όλες οι απαιτούμενες συναρτήσεις είναι σε μιγαδική μορφή. Η στροφορμή, η ροπή αδράνειας, η περιστροφική κινητική ενέργεια, η βαρυτική κινητική ενέργεια, η τετραπολική ροπή και το όριο μάζας διαφυγής είναι μερικές σημαντικές φυσικές ποσοότητες που περιγράφουν τον αστέρα νετρονίων.

0.1 Μονάδες και συμβολισμοί

(1) Όλες οι φυσικές ποσότητες, που υπεισέρχονται στους υπολογισμούς εκφράζονται σε βαρυτικές μονάδες.²

²Για περισσότερες λεπτομέρειες, βλέπε Παράρτημα Δ).



Σχήμα 3: Άξονας περιστροφής - Μαγνητικός άξονας - Δέσμη ακτινοβολίας ενός αστέρα νετρονίων.

- (2) Το ίχνος της μετρικής είναι $- + ++$, δηλαδή τα χρονοειδή τετραδιανύσματα έχουν αρνητική ορίζουσα.
- (3) Οι παράγωγοι ως προς τον χρόνο t , συμβολίζονται με μια τελεία πάνω από το γράμμα, ενώ οι παράγωγοι ως προς την ακτινική διεύθυνση r , με έναν τόνο δεξιά του γράμματος.
- (4) Οι συναλλοίωτες παράγωγοι συμβολίζονται με ελληνικό ερωτηματικό ($;$), ενώ οι μερικές παράγωγοι ως προς x^μ , συμβολίζονται με $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$, ή με ∂_μ , ή με κόμμα $,_\mu$.

Κεφάλαιο 1

Σχετικιστικές εξισώσεις αστέρα νετρονίων

1.1 Υποθέσεις

Σ' αυτό το κεφάλαιο, θα περιγράψουμε αρχικά το στατικό μοντέλο, ακολούθως το ομοιόμορφα περιστρεφόμενο μοντέλο που θεωρείται ως διαταραχή σύμφωνα με την μέθοδο *Hartle* και υπολογίζονται διορθώσεις μέχρι τρίτης τάξης στην γωνιακή ταχύτητα. Βασική μας υπόθεση είναι ότι έχουμε έναν περιστρεφόμενο αστέρα νετρονίων που αποτελείται από ένα ιδανικό ρευστό, μηδενικής θερμοκρασίας και περιστρέφεται ομογενώς γύρω από τον άξονά του με σταθερή γωνιακή ταχύτητα Ω . Αυτή η υπόθεση περιγράφει με αρκετή ακρίβεια τις γενικές ιδιότητες ενός αστέρα νετρονίων, παρόλο που αυτός έχει πιο πολύπλοκη δομή. Οι παρατηρήσεις των απότομων επιταχύνσεων στην περιστροφή (*glitches*), όπως προαναφέραμε στην εισαγωγή, δείχνουν ότι η απόκλιση που προκαλείται από το μοντέλο του ιδανικού ρευστού είναι πάρα πολύ μικρή. Επίσης, η υπόθεση της μηδενικής θερμοκρασίας δικαιολογείται από το γεγονός ότι η θερμική ενέργεια ($< 1\text{MeV}$), είναι πολύ μικρότερη από την ενέργεια *Fermi* ($> 60\text{MeV}$) στο εσωτερικό τους. Όσον αφορά την τελευταία υπόθεση της ομογενούς περιστροφής έχουμε να σημειώσουμε ότι ο αστέρας νετρονίων κατά την φάση της δημιουργίας του είναι διαφορετικά περιστρεφόμενος, αλλά πολύ σύντομα (πιστεύεται ότι είναι της τάξης των δευτερολέπτων), η διαφορετική περιστροφή εκφυλίζεται σε ομογενή, εξαιτίας ενός συνδυασμού φαινομένων όπως της ψύξης και της μεταβολής του ιξώδους (λόγω εκπομπής νετρίνων), της τυρβώδους ροής στην ζώνη μεταφοράς του και πιθανόν της μαγνητικής πέδησης λόγω της επανασύνδεσης μαγνητικών δυναμικών γραμμών.

1.2 Γενικά στοιχεία για την περιγραφή αστέρα νετρονίων

Για την σχετικιστική περιγραφή ενός αστέρα νετρονίων απαιτούνται τα παρακάτω στοιχεία:

(1) Καταστατική εξίσωση *EOS*. Η πίεση και η πυκνότητα που εμφανίζονται στον τανυστή ενέργειας-ορμής, μπορούν να συνδέονται μέσω μιας καταστατικής εξίσωσης (εν συντομία *EOS*). Καταστατική εξίσωση ενός υλικού ονομάζουμε μια σχέση, που συνδέει μεταξύ τους τοπικές παραμέτρους του υλικού. Η δομή των αστέρων νετρονίων και το εύρος των μαζών για τις οποίες είναι σταθεροί, καθορίζονται από την καταστατική εξίσωση της ύλης στο εσωτερικό τους. Θεωρώντας ότι ο αστέρας βρίσκεται σε ισορροπία, που σημαίνει ότι δεν έχουμε έκλυση ενέργειας ή ύλης και δεν υφίστανται μεταβολές του όγκου του αστέρα με τον χρόνο, οι καταστατικές εξισώσεις που θα μας απασχολήσουν θα είναι της μορφής

$$P = P(\rho), \quad (1.1)$$

όπου P είναι η πίεση και ρ είναι η πυκνότητα της μάζας ηρεμίας (rest-mass density), που ονομάζεται και πυκνότητα της ενέργειας ηρεμίας [22]. Μπορούμε βέβαια να επιβάλουμε κάποιους φυσικούς περιορισμούς στις καταστατικές εξισώσεις, χρησιμοποιώντας γενικές υποθέσεις για την ύλη, όπως:

- α) Η απαίτηση της θετικής πυκνότητας ($\rho \geq 0$), εφόσον η βαρύτητα είναι πάντα ελκτική.
- β) Ο περιορισμός της "μικροσκοπικής σταθερότητας" ($dP/d\rho \geq 0$). Αν, σε κάποια περιοχή του αστέρα δεν ικανοποιείται αυτή η σχέση, τότε μια ελάχιστη μείωση του όγκου θα δημιουργήσει δυνάμεις που θα οδηγήσουν σε κατάρρευση αυτής της περιοχής. Η συνθήκη αυτή έχει ως αποτέλεσμα το πρόσημο της πίεσης να είναι θετικό σε όλο τον όγκο του αστέρα ($P \geq 0$).
- γ) Υποθέτουμε ότι ικανοποιείται η απαίτηση της αιτιότητας ($dP/d\rho \geq c^2$), δηλαδή ότι η ταχύτητα του ήχου στο εσωτερικό του αστέρα να είναι μικρότερη της ταχύτητας του φωτός στο κενό.

Εμείς στην παρούσα διατριβή θα αναφερθούμε στο πολυτροπικό μοντέλο, που συνίσταται στο να θεωρήσουμε ότι η καταστατική εξίσωση που περιγράφει την ύλη του αστέρα γράφεται στην απλή μορφή ([15], Εξ.(7): το σύμβολο ρ χρησιμοποιείται εδώ στην θέση του ϱ)

$$P = K \rho^\Gamma = K \rho^{1+1/n} = \frac{1}{n} U, \quad (1.2)$$

όπου K είναι η πολυτροπική σταθερά, Γ ($\Gamma = 1 + 1/n$) είναι ο αδιαβατικός δείκτης και n ο πολυτροπικός δείκτης. Η ποσότητα U ($U = nP$), είναι η

πυκνότητα της εσωτερικής ενέργειας και ισχύει

$$E = \rho + U = \rho + \frac{P}{\Gamma - 1} = \rho + n P, \quad (1.3)$$

όπου E , είναι η πυκνότητα μάζας-ενέργειας. Σύμφωνα με τις τελευταίες πολυτροπικές σχέσεις (1.2)-(1.3), μπορούμε να εκφράσουμε τους όρους dE/dP και $E + P$, που εμφανίζονται σε κάποιες διαφορικές εξισώσεις που θα συναντήσουμε παρακάτω, ως εξής

$$\frac{dE}{dP} = \frac{1}{K \Gamma \rho^{1/n}} + n. \quad (1.4)$$

$$E + P = \rho + n P + P = \rho + K (1 + n) \rho^\Gamma. \quad (1.5)$$

Αυτού του είδους τα μοντέλα (οι πιο απλές περιπτώσεις), μελετήθηκαν για πρώτη φορά από τον *Chandrasekhar* το 1969 αναλυτικά. Ένα πολύτροπο είναι μία λύση της εξίσωσης (*Lane – Emden*), στην οποία η πίεση εκφράζεται σαν συνάρτηση της πυκνότητας σύμφωνα με την σχέση (1.2). Όσο ο πολυτροπικός δείκτης n αυξάνει, τόσο πιο σχετικιστικός γίνεται ο αστέρας, οπότε και η πολυτροπική καταστατική εξίσωση θεωρείται πιο "μαλακή". Με τους όρους "μαλακές" (*soft EOS*) ή "σκληρές" (*stiff EOS*), περιγράφουμε την συμπεριφορά της καμπύλης που χαρακτηρίζει τον αστέρα νετρονίων σε ένα διάγραμμα πίεσης-πυκνότητας. Αν, αυξανόμενη της πυκνότητας, η κλίση της καμπύλης από ένα σημείο και μετά αλλάζει, δείχνοντάς μας ότι για τον ίδιο ρυθμό αύξησης της πυκνότητας η πίεση δεν αυξάνει τόσο γρήγορα όσο στην περιοχή των χαμηλών πυκνοτήτων, τότε η *EOS* θεωρείται ότι είναι "μαλακή" στις μεγάλες πυκνότητες. Αντίστοιχα, αν η κλίση της καμπύλης αυξάνει, συνεπώς και η πίεση αρχίζει να αυξάνει με σημαντικά μεγαλύτερο ρυθμό, τότε η *EOS* θεωρείται ότι είναι "σκληρή" στις μεγάλες πυκνότητες, κατά συνέπεια, παρουσιάζει δυσκολίες στην ολοκλήρωσή της. Στα πολυτροπικά μοντέλα που επεξεργαζόμαστε ($n = 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 2.9$), αυτή με πολυτροπικό δείκτη $n = 1.0$ θεωρείται ότι είναι η πιο σκληρή, ενώ με $n = 2.9$ η πιο μαλακή καταστατική εξίσωση.

Λαμβάνοντας υπόψη μια πολυτροπική *EOS*, $P = P(\rho)$, μπορούμε να καθορίσουμε την αντίστοιχη *EOS*, $P = P(E)$, εφαρμόζοντας μια αριθμητική διαδικασία (όπως περιγράφεται στην [15], § 2, στο τμήμα που αφορά την Εξ.(8)). Συνεπώς, για μια δεδομένη πυκνότητα μάζας-ενέργειας E_0 , μπορούμε εύκολα να ορίσουμε μια πυκνότητα μάζας ηρεμίας ρ_0 από την σχέση

$$\rho_0 = \rho(E_0) = E_0 - n P(E_0) = E_0 - n P_0. \quad (1.6)$$

(2) Μέθοδος επίλυσης των εξισώσεων πεδίου του Einstein . Οι αστέρες νετρονίων έχουν μια ιδιαίτερα συμπιεσμένη ύλη, έτσι η γεωμετρία του χωροχρόνου

παραμορφώνεται σημαντικά. Για την μελέτη επομένως αυτών των αστέρων, είναι απαραίτητη η αντικατάσταση της Νευτώνειας βαρυτικής θεωρίας από την Γενική Θεωρία Σχετικότητας (ΓΘΣ) του *Einstein*. Μια σημαντική μέθοδος, που θα χρησιμοποιήσουμε για υπολογισμούς σε αστέρες νετρονίων είναι η μέθοδος διαταραχής του *Hartle*, που παρουσιάστηκε στην [1], αναπτύχθηκε στην συνέχεια περαιτέρω στην [2], γι' αυτό τον λόγο καλείται επίσης και ως "μέθοδος διαταραχής των *Hartle – Thorne*" (βλέπε επίσης [3]). Αυτή η μέθοδος που ουσιαστικά δημιουργήθηκε για την μελέτη αστέρων νετρονίων που περιστρέφονται αργά, έχει χρησιμοποιηθεί εκτενώς για υπολογισμούς σε αστέρες νετρονίων ακόμα και στην περίπτωση, ταχείας ομοιόμορφης περιστροφής ([9], §III), ([13], §5.3) καθώς επίσης ([9], §I) και ([16], §4), όπου αναφέρονται οι περιορισμοί της μεθόδου). Η αριθμητική διαπραγματεύση της μεθόδου, με χρήση σχετικιστικών πολυτροπικών μοντέλων, όπου έχουμε να επιλύσουμε ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων, αποτελεί μία εναλλακτική μέθοδο αντί της απευθείας αριθμητικής ολοκλήρωσης των μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πεδίου του *Einstein*, όπου σ' αυτή την περίπτωση έχουμε να διαπραγματευτούμε ένα σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Η βασική ιδέα της διαταρακτικής μεθόδου του *Hartle*, είναι η εξής: Θεωρούμε ότι οι μεταβολές των βασικών παραμέτρων του περιστρεφόμενου αστέρα, είναι πολύ μικρές σε σχέση με την περίπτωση του μη περιστρεφόμενου αστέρα έτσι ώστε να μπορούμε να τις αντιμετωπίσουμε ως διαταραχές. Έτσι, ο στατικός αστέρας είναι το αδιατάρακτο σύστημα, πάνω στο οποίο θα εφαρμόσουμε μικρές διαταραχές. Να τονίσουμε ότι σύμφωνα με την μέθοδος διαταραχής του *Hartle*, η περιστροφή του αστέρα θεωρείται ως διαταραχή του μη περιστρεφόμενου μοντέλου τάξης

$$\epsilon = \Omega/\Omega_{\max} = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}, \quad (1.7)$$

όπου Ω είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του αστέρα, M είναι η βαρυτική μάζα του και R είναι η ακτίνα του.

(3) Σταθερότητα. Ως γνωστόν, η μέγιστη δυνατή μάζα ενός αστέρα είναι μεγαλύτερη αν αυτός περιστρέφεται. Αυτό οφείλεται σε δύο λόγους: α) οι φυγόκεντρες δυνάμεις που αναπτύσσονται μαζί με την πίεση, αντιστέκονται στις συνθλιπτικές τάσεις της βαρύτητας και β) η ενέργεια εξαιτίας της περιστροφής συνεισφέρει στην ολική μάζα. Συνεπώς, η γωνιακή ταχύτητα του αστέρα δεν μπορεί να αυξάνεται συνεχώς, εφόσον πρέπει να υπάρχει ένα όριο στην μέγιστη μάζα του λόγω του προβλήματος της αστάθειας. Θεωρούμε ότι το ανώτερο όριο της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής, είναι αυτή που θα είχε ένα σωματίδιο σε κυκλική τροχιά γύρω από τον αστέρα στο επίπεδο του ισημερινού και με ακτίνα ίση με αυτή του αστέρα στον ισημερινό. Αυτή η

γωνιακή ταχύτητα καλείται γωνιακή ταχύτητα *Kepler* Ω_K . Η τιμή αυτή της Ω_K , εξαρτάται από την μάζα και την πυκνότητα του αστέρα. Αν ο αστέρας νετρονίων περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα Ω_K , θα έχουμε διαφυγή μάζας από τον ισημερινό του με αποτέλεσμα την αποσταθεροποίηση και την τελική διάλυσή του.

1.3 Μοντέλα μη περιστρεφόμενων αστέρων νετρονίων

Οι εξισώσεις πεδίου του *Einstein* στη $\Gamma\Theta\Sigma$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) είναι

$$G_{\mu\nu} = -8\pi T_{\mu\nu}, \quad (1.8)$$

όπου $G_{\mu\nu}$ είναι ο τανυστής *Einstein*, και $T_{\mu\nu}$ ο τανυστής ενέργειας-ορμής. Ο τανυστής *Einstein* υπολογίζεται από την μετρική

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (1.9)$$

όπου $R_{\mu\nu}$ είναι ο τανυστής *Ricci* και R η βαθμωτή καμπυλότητα *Ricci*. Οι εξισώσεις πεδίου του *Einstein* είναι μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και οι μαθηματικές μας γνώσεις δεν επιτρέπουν την γενική επίλυσή τους. Για τον λόγο αυτό, θεωρούμε ότι η ζητούμενη λύση έχει μερικές "λογικές" συμμετρίες που απορρέουν από κάποιες συγκεκριμένες φυσικές παραδοχές, οπότε είναι δυνατόν να τις επιλύσουμε, ώστε να προκύψουν λύσεις που μπορούν να αναπαριστούν τον χωροχρόνο στο εσωτερικό των αστέρων και γύρω από αυτούς. Θεωρούμε λοιπόν τον αστέρα νετρονίων στατικό,¹ αποτελούμενο από ιδανικό ρευστό,² αγνοώντας την θερμική αγωγιμότητα και το ιξώδες. Συνέπεια αυτών των απαιτήσεων είναι ότι ο αστέρας είναι σφαιρικά συμμετρικός. Η αντίστοιχη μετρική του *Schwarchild* σε σφαιρικές συντεταγμένες γι' αυτόν τον αστέρα είναι ([1], Εξ.(25))

$$ds^2 = -e^\nu dt^2 + e^\lambda dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (1.10)$$

όπου $\nu(r)$ και $\lambda(r)$ είναι οι ακτινικές συναρτήσεις της μετρικής. Οι συντελεστές e^ν και e^λ περιγράφουν τον ρυθμό μεταβολής της ροής του χρόνου και την

¹Ορίζουμε ως στατικό χωρόχρονο, ένα χωρόχρονο στον οποίο μπορούμε να βρούμε μια χρονική συντεταγμένη t με τις εξής ιδιότητες: α) όλες οι συνιστώσες της μετρικής να είναι ανεξάρτητες του t και β) η γεωμετρία να διατηρείται αμετάβλητη σε χρονικές αναστροφές $t \rightarrow -t$.

²Ένα ιδανικό ρευστό χαρακτηρίζεται από μια ταχύτητα v σε κάθε σημείο, για την οποία ένας παρατηρητής θα βλέπει το ρευστό γύρω του ως ισότροπο, χαρακτηριζόμενο από ιστροπική πίεση R .

απόκλιση από την Ευκλείδεια γεωμετρία, αντίστοιχα. Επειδή το ενδιαφέρον μας περιορίζεται στους αστέρες οι οποίοι αποτελούν φραγμένα συστήματα, απαιτούμε ο χωροχρόνος να είναι ασυμπτωτικά επίπεδος σε μεγάλη απόσταση από τον αστέρα. Συνεπώς, είναι δυνατές οι ακόλουθες συνοριακές συνθήκες που θα συνοδεύουν τις εξισώσεις του *Einstein*: $\nu(r) \rightarrow 0$, $\lambda(r) \rightarrow 0$ καθώς $r \rightarrow \infty$. Ο τανυστής ενέργειας-ορμής υπολογίζεται από την σχέση

$$T_{\mu\nu} = u_\mu u_\nu (P + E) + g_{\mu\nu} P. \quad (1.11)$$

Οι ποσότητες u_μ , u_ν στην Εξ.(1.11) είναι οι τετραταχύτητες που ορίζονται ως $u_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau}$, $u_\nu = \frac{dx_\nu}{d\tau}$ όπου $d\tau^2 = -ds^2$. Λόγω κανονικοποίησης ισχύει

$$u_\mu u^\nu = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1. \quad (1.12)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την απαίτηση της στατικότητας, η τετραταχύτητα του ρευστού θα είναι

$$u^\mu = ((-g_{tt})^{1/2}, 0, 0, 0) = (e^{-\nu/2}, 0, 0, 0). \quad (1.13)$$

Με την βοήθεια των εξισώσεων

$$T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0, \quad (1.14)$$

που προκύπτουν ταυτοτικά από τις εξισώσεις πεδίου *Einstein* και εκφράζουν την αρχή της τοπικής διατήρησης ενέργειας-ορμής, καταλήγουμε στην σχέση

$$\frac{d\nu}{dr} = -\frac{2}{E + P} \frac{dP}{dr}. \quad (1.15)$$

Αν το Νευτώνειο βαρυτικό δυναμικό $\Phi(r)$ είναι ασθενές, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε $g_{tt} = -e^\nu \cong -(1 + 2\Phi)$ και όταν $\nu \ll 1$, τότε προκύπτει $e^\nu = 1 + \nu$, οπότε $\nu = 2\Phi$ και επομένως η εξίσωση (1.15) καταλήγει στην σχέση (βλ. Παράρτημα Α)

$$\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{1}{E + P} \frac{dP}{dr}. \quad (1.16)$$

Από αυτήν την εξίσωση γνωρίζουμε ποια είναι η αναγκαία βαθμίδα πίεσης ώστε το ρευστό να παραμείνει στατικό στο βαρυτικό πεδίο, του οποίου η επίδραση εξαρτάται από το $d\Phi/dr$.

Η συνιστώσα (rr) των εξισώσεων του *Einstein* καταλήγει (βλ. Παράρτημα Α), στην εξίσωση υδροστατικής ισορροπίας ([1], Εξ.(28)) και ([15], Εξ.(3))· το σύμβολο E χρησιμοποιείται στην θέση του ρ

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{(E + P)(m + 4\pi r^3 P)}{r(r - 2m)}. \quad (1.17)$$

Αντίστοιχα, η συνιστώσα (tt) των εξισώσεων του *Einstein*, ορίζοντας την ποσότητα

$$g_{rr} = e^\lambda = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}, \quad (1.18)$$

καταλήγει (βλ. Παράρτημα Α), στην εξίσωση μάζας-ενέργειας, ([1], Εξ.(29a)) και ([15], Εξ.(4))

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 E(r). \quad (1.19)$$

Η εξίσωση αυτή αν και έχει την ίδια μορφή με την αντίστοιχη Νευτώνεια, στην οποία η $m(r)$ είναι η μάζα-ενέργεια στο εσωτερικό μιας σφαίρας ακτίνας r , στην $\Gamma\Theta\Sigma$ ονομάζεται συνάρτηση μάζας και έχει μια εντελώς διαφορετική έννοια, χωρίς να μπορούμε να την ερμηνεύσουμε ως την ενέργεια της μάζας στο εσωτερικό της σφαίρας και τούτο γιατί στη $\Gamma\Theta\Sigma$ η ολική ενέργεια δεν είναι εντοπίσιμη. Οι σχέσεις (1.19) και (1.17) αποτελούν τις γνωστές σχετικιστικές εξισώσεις *Oppenheimer – Volkoff* (*OV*). Να σημειώσουμε ότι όλες οι συναρτήσεις που αφορούν τον μη περιστρεφόμενο αστέρα, εξαρτώνται μόνον από την γνωστή ακτινική συντεταγμένη r .

Από τις Εξς. (1.16), (1.17) προκύπτει η σχέση ([1], Εξ.(29b)), ([15], Εξ.(10))

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{(m + 4\pi r^3 P)}{r(r - 2m)} = \frac{(m + 4K\pi r^3 \rho^\Gamma)}{r(r - 2m)}. \quad (1.20)$$

1.4 Μοντέλα ομοιόμορφα περιστρεφόμενων αστέρων νετρονίων

Ως γνωστόν, η γεωμετρία *Schwarzschild* είναι σφαιρικά συμμετρική και αποτελεί μια καλή προσέγγιση της εξωτερικής γεωμετρίας ενός μη περιστρεφόμενου αστέρα. Ο καμπυλωμένος χωρόχρονος ενός περιστρεφόμενου αστέρα έχει μια πιο πολύπλοκη δομή από την αντίστοιχη γεωμετρία *Schwarzschild*. Σύμφωνα με την $\Gamma\Theta\Sigma$, πηγή καμπυλότητας του χώρου δεν είναι μόνο η κατανομή της μάζας-ενέργειας, αλλά και η ίδια η κίνηση της ύλης. Το μέγεθος των φυγόκεντρων δυνάμεων που επιδρούν πάνω σε ένα στοιχειώδες ρευστό, εξαρτάται σημαντικά από τον ρυθμό περιστροφής του ίδιου του ρευστού σχετικά ως προς ένα τοπικό αδρανειακό σύστημα. Τα τοπικά όμως αυτά συστήματα δέχονται την στρέβλωσή τους (ή καλύτερα τον συρμό τους), από την περιστροφή του ρευστού. Ο αστέρας κατά την περιστροφή του, περιστρέφει, παρασύρει στην ουσία τον χώρο γύρω του. Το σχετικιστικό αυτό φαινόμενο είναι εντονότερο κοντά στο κέντρο του αστέρα και εξασθενεί πηγαίνοντας προς τα έξω. Στην ξένη βιβλιογραφία το συναντούμε με τον όρο

"dragging of the inertial frames" (*Thirring* 1918) και συσχετίζει άμεσα τον χωροχρόνο με το ρευστό. Με άλλα λόγια μας λέει ότι ένας αδρανειακός παρατηρητής που βρίσκεται έξω από ένα περιστρεφόμενο αστέρα δεν μπορεί να παραμείνει ακίνητος, αλλά παρασύρεται και αυτός σε περιστροφή. Αυτό που θα μας απασχολήσει τώρα είναι πως αυτός ο συρμός των αδρανειακών συστημάτων εκδηλώνεται στην μετρική του χώρου ενός αργά περιστρεφόμενου αστέρα. Θα περιγράψουμε την προσεγγιστική μέθοδο *Hartle*, [1], [2], για τον υπολογισμό καταστάσεων ισορροπίας αργά περιστρεφόμενων αστέρων νετρονίων. Η μετρική ενός στατικού, συμμετρικού ως προς άξονα περιστρεφόμενου συστήματος δίνεται από την σχέση

$$ds^2 = -e^\nu dt^2 + e^\lambda dr^2 + r^2[d\theta^2 + \sin^2\theta(d\varphi - Ldt)^2], \quad (1.21)$$

όπου ν , λ και L είναι συναρτήσεις των συντεταγμένων r, θ . Η ποσότητα $L(r, \theta)$ είναι η γωνιακή ταχύτητα $d\varphi/dt$, που αποκτάται από έναν παρατηρητή που πέφτει ελεύθερα από το άπειρο προς το σημείο (r, θ) . Γι' αυτό τον λόγο η $L(r, \theta)$ αναφέρεται και ως ρυθμός περιστροφής του αδρανειακού συστήματος στο σημείο (r, θ) , σε σχέση με ένα σύστημα στο άπειρο. Ο συρμός λοιπόν των αδρανειακών συστημάτων παρουσιάζεται στην μετρική με τον όρο $g_{t\varphi}$.

Η πυκνότητα και η μετρική του στατικού και συμμετρικού ως προς άξονα, περιστρεφόμενου αστέρα παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από μια αναστροφή στην διεύθυνση περιστροφής ή σε αναστροφή του χρόνου. Λόγω της παραπάνω συμμετρίας μια ανάπτυξη των e^ν και e^λ σε δυνάμεις της γωνιακής ταχύτητας³ Ω του αστέρα μπορούν να περιέχουν μόνο άρτιους όρους αυτής, ενώ μια ανάπτυξη του L θα περιέχει μόνο περιττούς όρους. Εάν λοιπόν θέλουμε να μελετήσουμε όλα τα φαινόμενα που συμβαίνουν με ακρίβεια μέχρι την δεύτερη τάξη του όρου Ω , δηλαδή Ω^2 , θα πρέπει να θεωρήσουμε μέχρι πρώτης τάξης όρους Ω , στην ποσότητα L . Αυτή την πρώτη τάξη στον όρο L θα την συμβολίσουμε με $\omega(r, \theta)$,⁴ δηλαδή

$$L(r, \theta) = \omega(r, \theta) + O(\Omega^3), \quad (1.22)$$

Σε κατάσταση ισορροπίας, ένας περιστρεφόμενος αστέρας αντισταθμίζει φυγόκεντρες δυνάμεις, δυνάμεις πίεσης, και δυνάμεις βαρύτητας. Το μέγεθος των φυγόκεντρων δυνάμεων που αναπτύσσονται δεν καθορίζεται από τη γωνιακή ταχύτητα που οφείλεται στην ομοιόμορφη περιστροφή του αστρικού ρευστού, Ω , αλλά από την γωνιακή ταχύτητα, $\bar{\omega}(r)$, που ορίζεται ως προς το τοπικό αδρανειακό σύστημα αναφοράς ([2], Εξ.(6) και §IIe)

$$\bar{\omega} = \Omega - \omega, \quad (1.23)$$

³ Ω είναι η γωνιακή ταχύτητα του ρευστού και κατά συνέπεια του αστέρα, όπως την μετρά ένας ακίνητος παρατηρητής σε κάποιο σημείο (t, r, θ, φ) μέσα στο ρευστό.

⁴ ω είναι η γωνιακή ταχύτητα που μετράει ένας παρατηρητής (στο άπειρο), που πέφτει ελεύθερα από το άπειρο με μηδενική στροφορμή.

όπου $\omega(r)$ είναι η γωνιακή ταχύτητα όπως την μετράει ένας παρατηρητής σε ελεύθερη πτώση (ως προς τον αστέρα με εκκίνηση από άπειρη απόσταση), υπολογιζόμενη σε πρώτη τάξη ως προς Ω .⁵ Η συνάρτηση $\bar{\omega}$, είναι η συντεταγμένη γωνιακή ταχύτητα ενός στοιχείου του ρευστού στο σημείο r , που βλέπει ο παρατηρητής που πέφτει ελεύθερα προς αυτό και εξαρτάται από την πρώτη δύναμη του Ω και προκύπτει ως λύση της διαφορικής εξίσωσης βαρυτικού συρμού του αδρανειακού συστήματος (dragging of the inertial frame) ([2], Εξ.(9)), ([15], Εξ.(18))

$$\frac{1}{r^4} \frac{d}{dr} \left(r^4 j \frac{d\bar{\omega}}{dr} \right) + \frac{4}{r} \frac{dj}{dr} \bar{\omega} = 0. \quad (1.24)$$

Η απόδειξη της παραπάνω σχέσης βρίσκεται στο Παράρτημα Β'.

Η διαφορική εξίσωση (1.24), μετασχηματίζεται σε ένα σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης ως προς την γωνιακή ταχύτητα, $\bar{\omega}$, σε σχέση με ένα τοπικό αδρανειακό σύστημα, θέτοντας $\frac{d\eta}{dr} = \eta$, ([15], Εξς.(126)-(127)),

$$\frac{d\bar{\omega}}{dr} = \eta, \quad (1.25)$$

$$\frac{d\eta}{dr} = -\frac{4\eta}{r} - \frac{\eta}{j} \frac{dj}{dr} - \frac{4\bar{\omega}}{rj} \frac{dj}{dr}. \quad (1.26)$$

Η λύση της Εξ. (1.24), $\bar{\omega}$, πρέπει να είναι ομαλή στην αρχή των αξόνων και προκύπτει με την αριθμητική ολοκλήρωση από το κέντρο του αστέρα και προς τα έξω, με την επιβολή των αρχικών συνθηκών

$$\bar{\omega}(0) = \bar{\omega}_c, \quad d\bar{\omega}/dr = \eta = 0, \quad (1.27)$$

όπου η σταθερά $\bar{\omega}_c$, επιλέγεται αυθαίρετα.

Η συνάρτηση $j(r)$ δίνεται από την ([2], Εξ.(10))

$$j(r) = e^{-\frac{2\Phi+\lambda}{2}} = \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\Phi}. \quad (1.28)$$

Έξω από τον αστέρα ισχύει

$$j(r) = 1, \quad dj/dr = 0. \quad (1.29)$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις σχέσεις στην Εξ. (1.24), καταλήγουμε σε μια σχέση για την $\bar{\omega}$, που ισχύει έξω από τον αστέρα και έχει την μορφή ([2], Εξ.(13b))

$$\bar{\omega}_{\text{ext}} = \Omega - \frac{2J}{r^3}, \quad (1.30)$$

⁵το ω εξαρτάται μόνο από το r και αυτό γιατί το θ εμφανίζεται στους δεύτερης τάξης όρους του ω που παραλείψαμε, καθότι θεωρήσαμε αργή περιστροφή.

όπου η ποσότητα, J , αντιστοιχεί στην ολική στροφορμή του αστέρα που δίνεται από την σχέση ([2], Εξ.(13a)) και ([15], Εξ.(21))

$$J = \frac{1}{6} (r^4 j \eta) \Big|_{r=R}. \quad (1.31)$$

Αν πάρουμε την Εξ.(1.30), στην επιφάνεια του αδιατάρακτου μοντέλου και σ' αυτήν αντικαταστήσουμε την (1.31), καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\Omega^{\text{arb}} = \bar{\omega}^{\text{arb}}(R) + \frac{R}{3} \eta^{\text{arb}}(R). \quad (1.32)$$

1.4.1 Η περιστροφικά διαταραγμένη μετρική

Όταν ένας αστέρας περιστρέφεται, το σχήμα του δεν είναι σφαιρικό. Θα εισάγουμε όλες τις ποσότητες που περιγράφουν τον αστέρα νετρονίων, με διορθώσεις μέχρι και τρίτης τάξης στην γωνιακή ταχύτητα Ω . Η διαταραγμένη μετρική, δίνεται από την ([9], Εξ.(1))

$$ds^2 = -e^{2\Phi} [1 + 2h(r, \theta)] dt^2 + \left[1 + \frac{2\bar{m}(r, \theta)}{r - 2m(r)} \right] e^\lambda dr^2 + r^2 [1 + 2k(r, \theta)] [d\theta^2 + \sin^2 \theta (d\phi - w(r, \theta) dt)^2]. \quad (1.33)$$

Οι συναρτήσεις $h(r, \theta)$, $\bar{m}(r, \theta)$, $k(r, \theta)$ και $w(r, \theta)$ είναι οι διαταρακτικές διορθώσεις ([9], Εξς.(2)–(5)). εδώ το σύμβολο \bar{m} χρησιμοποιείται αντί του m) και μπορούν να αναπτυχθούν με την βοήθεια των πολυωνύμων *Legendre*, ως εξής

$$h(r, \theta) = h_0(r) + h_2(r) P_2(\mu) + O(\Omega^4), \quad (1.34)$$

$$\bar{m}(r, \theta) = m_0(r) + m_2(r) P_2(\mu) + O(\Omega^4), \quad (1.35)$$

$$k(r, \theta) = k_2(r) P_2(\mu) = [v_2(r) - h_2(r)] P_2(\mu) + O(\Omega^4), \quad (1.36)$$

$$w(r, \theta) = \omega(r) + w_1(r) - w_3(r) \frac{1}{\sin \theta} \frac{dP_3(\mu)}{d\theta} + O(\Omega^5). \quad (1.37)$$

όπου $P_2(\mu)$ και $P_3(\mu)$ είναι τα πολυώνυμα *Legendre* δευτέρου και τρίτου βαθμού, αντίστοιχα ($\mu = \cos \theta$). Η συνάρτηση ω είναι της τάξης του Ω , οι συναρτήσεις h_0 , h_2 , m_0 , m_2 , και v_2 είναι της τάξης του Ω^2 , ενώ τέλος οι συναρτήσεις w_1 και w_3 είναι της τάξης του Ω^3 .

Ας συνοψίσουμε τα είδη των διαταραχών, στις οποίες υπόκειται ένας μη περιστρεφόμενος αστέρας.

1. Διαταραχές λόγω των συναρτήσεων $l = 0$ (μονοπολικό μέρος) που αναφέρονται ως σφαιρικές διαταραχές. Αυτές οι διαταραχές δεν επηρεάζουν το τελικό σχήμα του αστέρα, που εξακολουθεί να είναι σφαιρικό, ενώ επηρεάζονται η ακτίνα, η μάζα και η ενέργεια σύνδεσης του αστέρα.

2. Διαταραχές λόγω των συναρτήσεων $l = 2$ (τετραπολικό μέρος) που αναφέρονται ως τετραπολικές διαταραχές. Αυτές οι διαταραχές επηρεάζουν το σχήμα του αστέρα, που αποκλίνει πλέον του σφαιρικού.

3. Οι τρίτης τάξης διορθώσεις περιλαμβάνουν δύο συναρτήσεις, τις w_1 και w_3 . Η w_1 δίνει μια συνεισφορά στην ροπή αδράνειας η δε w_3 έχει επιπτώσεις στην τιμή της ταχύτητας της μάζας διαφυγής (mass-shedding velocity). Και οι δύο συναρτήσεις w_1 , w_3 συμβάλλουν στον συρμό των αδρανειακών συστημάτων.

Με το Ω να είναι η γωνιακή ταχύτητα του ρευστού, η τετραταχύτητα που ικανοποιεί την συνθήκη κανονικοποίησης $u^\mu u_\mu = -1$ είναι

$$\begin{aligned} u^r &= u^\theta = 0 \\ u^\varphi &= \Omega u^t \\ u^t &= [-(g_{tt} + 2\Omega g_{t\varphi} + \Omega g_{\varphi\varphi})]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Η πρώτη εξίσωση προκύπτει, λόγω του ότι ο αστέρας εκτελεί μόνο περιστροφική κίνηση, ενώ οι u^φ , u^t είναι οι τετραταχύτητες ως προς την συντεταγμένη φ και t αντίστοιχα. Η μετατόπιση για ένα στοιχειώδες τμήμα του ρευστού που βρίσκεται στην θέση (r, θ) στον μη περιστρεφόμενο αστέρα, μετατοπίζεται στην περίπτωση του περιστρεφόμενου αστέρα στην θέση $r + \xi$, ([9], Εξ.(6))

$$\xi(r) = \xi_0(r) + \xi_2(r) P_2(\mu) + O(\Omega^4). \quad (1.39)$$

Οι εμπλεκόμενες συναρτήσεις, ξ_0 και ξ_2 (αμφότερες είναι της τάξης του Ω^2), ορίζονται από τις σχέσεις ([2], Εξ.(24b)), ([15], Εξς.(31)-(32))

$$\xi_0 = -p_0 (E + P) \left(\frac{dP}{dr} \right)^{-1}, \quad (1.40)$$

$$\xi_2 = -p_2 (E + P) \left(\frac{dP}{dr} \right)^{-1}. \quad (1.41)$$

Οι συναρτήσεις $p_0(r)$ και $p_2(r)$ είναι της τάξης του Ω^2 και περιγράφουν την μεταβολή στην πίεση, δP , του στοιχειώδους μετατοπισμένου τμήματος του ρευστού· και συγκεκριμένα, ως προς το σύστημα αναφοράς που κινείται μαζί με το στοιχειώδες τμήμα ύλης του αστέρα ([9], Εξ.(8)) και $E(r), P(r)$ η πυκνότητα μάζας-ενέργειας και η πίεση αντίστοιχα του μη περιστρεφόμενου μοντέλου.

Η επιφάνεια του περιστρεφόμενου αστέρα θα δίνεται από την σχέση

$$r = r(\mu) = R + \xi_0(R) + \xi_2(R) P_2(\mu), \quad (1.42)$$

όπου R είναι η ακτίνα του μη περιστρεφόμενου αστέρα.

Εδώ, θα πρέπει να επιστήσουμε την προσοχή όσον αφορά το σύστημα συντεταγμένων, στο οποίο θα συμπεριλάβουμε στην λύση των εξισώσεων πεδίου του *Einstein* (1.8) και το ανάπτυγμα με τους επιπλέον όρους δεύτερης τάξης. Πιο συγκεκριμένα, το ανάπτυγμα της διαταραχής της πίεσης ή της πυκνότητας του αστέρα σε κανονικές πολικές συντεταγμένες (r, θ) , δεν ισχύει παντού στο εσωτερικό του αστέρα. Αυτά τα αναπτύγματα έχουν νόημα μόνο στην περίπτωση που οι διαταραχές είναι πολύ μικρότερες από τις ποσότητες του στατικού μοντέλου. Κοντά όμως στην επιφάνεια του αστέρα, η πίεση και η πυκνότητα του αδιατάρακτου μοντέλου μηδενίζονται, ενώ οι διαταραχές αυτών μπορεί να είναι πεπερασμένες. Συνεπώς, τα αναπτύγματα που προαναφέραμε δεν έχουν νόημα στην επιφάνεια του αστέρα. Για τον λόγο αυτό, προκειμένου να αποφύγουμε τέτοια προβλήματα, τα αναπτύγματα δεν θα γίνουν στις κανονικές πολικές συντεταγμένες (r, θ) , αλλά σε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων (\bar{r}, Θ) που ορίζονται ως εξής ([1], σελ. 1008, όπου έχουμε αντικαταστήσει το R , με το \bar{r}): θεωρούμε ένα σημείο στο εσωτερικό του βραδέως περιστρεφόμενου αστέρα, που βρίσκεται πάνω σε μια συγκεκριμένη επιφάνεια σταθερής πυκνότητας. Η αντίστοιχη ακτίνα του μη περιστρεφόμενου αστέρα που έχει την ίδια πυκνότητα θα είναι η νέα ακτινική συντεταγμένη \bar{r} , ενώ η συντεταγμένη Θ εκφράζει την συνηθισμένη πολική γωνία θ . Συνεπώς, η σχέση νέων και παλαιών μεταβλητών δίνεται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \Theta &= \theta, \\ E(r(\bar{r}, \Theta), \Theta) &= E(\bar{r}). \end{aligned} \quad (1.43)$$

Στο Σχ.(1.1), βλέπουμε την σχέση μεταξύ του νέου και παλαιού συστήματος συντεταγμένων. Η διακεκομμένη γραμμή παριστάνει την επιφάνεια σταθερής πυκνότητας του μη περιστρεφόμενου αστέρα ακτίνας \bar{r} , ενώ η συνεχής γραμμή αφορά τον περιστρεφόμενο ακτίνας r και $\xi = r - \bar{r}$. Για μικρές γωνιακές ταχύτητες του αστέρα, ο λόγος

$$\frac{\xi(\bar{r}, \Theta)}{\bar{r}} \ll 1, \quad (1.44)$$

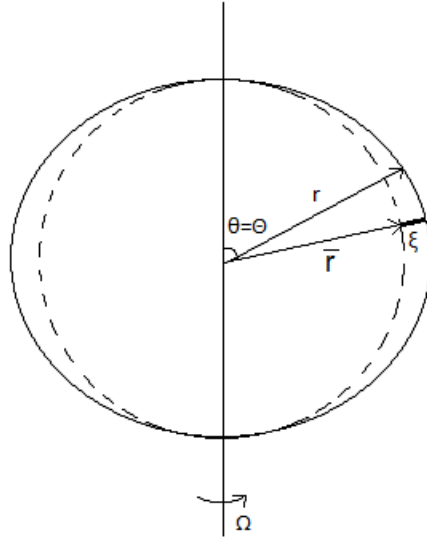
είναι πολύ μικρότερος της μονάδας μέσα στο εσωτερικό του αστέρα. Αν επιπλέον επιλεγεί η κεντρική πυκνότητα του περιστρεφόμενου αστέρα να είναι ίδια με αυτήν του μη περιστρεφόμενου, τότε θα ισχύει

$$\xi(\bar{r} = 0, \Theta) = 0, \quad (1.45)$$

οπότε οι παλιές και οι νέες συντεταγμένες συμπίπτουν.

1.4.2 Σφαιρική παραμόρφωση

Ο υπολογισμός της συνεισφοράς των μονοπολικών διορθώσεων στο στατικό μοντέλο για την σφαιρική παραμόρφωση (spherical deformation) του



Σχήμα 1.1: Σχηματική αναπαράσταση των δύο συστημάτων συντεταγμένων στον περιστρεφόμενο αστέρα.

αστέρα που οφείλεται στην ομοιόμορφη περιστροφή, μας οδηγεί στην χρησιμοποίηση των συνιστωσών $G_{tt} = 8\pi T_{tt}$, $G_{rr} = 8\pi T_{rr}$, των εξισώσεων πεδίου του *Einstein* (1.8), με $l = 0$. Τελικά προκύπτουν οι ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις ([13], Εξς.(27)–(28)), ([2], Εξς.(15a, b)), ([15], Εξς.(40)–(41)),

$$\begin{aligned} \frac{dm_0}{dr} &= 4\pi r^2 (E + P) \left(\frac{dP}{dE} \right)^{-1} p_0 \\ &\quad + \frac{1}{12} r^3 (r - 2m) \left(\frac{d\bar{\omega}}{dr} \right)^2 e^{-2\Phi} \\ &\quad + \frac{8\pi}{3} r^4 (E + P) \bar{\omega}^2 e^{-2\Phi} \end{aligned} \quad (1.46)$$

και

$$\begin{aligned} \frac{dp_0}{dr} &= -\frac{1 + 8\pi r^2 P}{(r - 2m)^2} m_0 - \frac{4\pi r^2 (E + P)}{r - 2m} p_0 \\ &\quad - \frac{2r(-r + 4\pi r^3 P + 3m) \bar{\omega}^2 e^{-2\Phi}}{3(r - 2m)} \\ &\quad + \frac{1}{12} r^2 \frac{d\bar{\omega}}{dr} \left(8\bar{\omega} + r \frac{d\bar{\omega}}{dr} \right) e^{-2\Phi}. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Ολοκληρώνοντας αριθμητικά τις Εξς. (1.46), (1.47) από το κέντρο προς την επιφάνεια του αστέρα με αρχικές συνθήκες $m_0(0) = 0$, $p_0(0) = 0$, παίρνουμε

τις μονοπολικές (σφαιρικές) διορθώσεις, δηλαδή τις συναρτήσεις $m_0(r)$ και $p_0(r)$ που αποτελούν τις συναρτήσεις διαταραχής στην μάζα και την πίεση αντίστοιχα. Η διόρθωση δεύτερης τάξης $h_0(r)$ της χρονικής συνιστώσας του μετρικού τανυστή που εμφανίζεται στην Εξ. (1.34) και αφορά το εσωτερικό του αστέρα, μπορεί να υπολογιστεί από την σχέση

$$h_{0\text{in}} = -p_0 + \frac{1}{3} r^2 \bar{\omega}^2 e^{-2\Phi} + h_{0c}, \quad (1.48)$$

όπου η τιμή της σταθεράς h_{0c} προσδιορίζεται με την βοήθεια της συνθήκης συνέχειας στην επιφάνεια του αστέρα ([13], Εξ.(34)), οπότε προκύπτει

$$h_{0c} = -\frac{\delta M}{R - 2M} + \frac{J^2}{R^3(R - 2M)} + p_0(R) - \frac{1}{3} R^2 \bar{\omega}^2(R) e^{-2\Phi(R)}, \quad (1.49)$$

όπου δM είναι η αύξηση της βαρυτικής μάζας λόγω της σφαιρικής παραμόρφωσης. Έξω από τον αστέρα η διόρθωση δεύτερης τάξης $h_0(r)$ μπορεί να υπολογιστεί με την βοήθεια της συνθήκης συνέχειας στην επιφάνεια του αστέρα ([13], Εξς.(32)-(33))

$$h_{0\text{ext}} = -\frac{\delta M}{r - 2M} + \frac{J^2}{r^3(r - 2M)}. \quad (1.50)$$

1.4.3 Τετραπολική παραμόρφωση

Από τις δεύτερης τάξης ως προς Ω με $l = 2$ τετραπολικές εξισώσεις θα πάρουμε την παραμόρφωση της επιφάνειας του αστέρα νετρονίων λόγω περιστροφής. Για την εύρεση των διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν τις τετραπολικές συναρτήσεις h_2, k_2, m_2 , θα χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις πεδίου του *Einstein* για $l = 2$

$$R_{\theta\theta} - R_{\varphi\varphi} = 8\pi(T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi}), \quad G_{rr} = 8\pi T_{rr}, \quad G_{r\theta} = 0. \quad (1.51)$$

Εισάγοντας την μεταβλητή $v_2 = h_2 + k_2$ στις παραπάνω εξισώσεις για λόγους απλότητας στην αριθμητική ολοκλήρωση, παίρνουμε αντίστοιχα

$$\frac{dv_2}{dr} = -\nu' h_2 + \frac{r^4}{6} \left(\frac{1}{r} + \frac{\nu'}{2} \right) e^{-\nu} \left[16\pi(E + P)\bar{\omega}^2 + e^{-\lambda} \left(\frac{d\bar{\omega}}{dr} \right)^2 \right], \quad (1.52)$$

$$\begin{aligned} \frac{dh_2}{dr} = & \left[-\nu' + \frac{2e^\lambda}{\nu'} \left(4\pi(E + P) - \frac{2m}{r^3} \right) \right] h_2 - \frac{4}{r^2\nu'} e^\lambda v_2 + \\ & \frac{r^3}{6} e^{-(\nu+\lambda)} \left(\frac{d\bar{\omega}}{dr} \right)^2 \left(\frac{r\nu'}{2} - \frac{e^\lambda}{r\nu'} \right) + \frac{8\pi}{3} r^3 e^{-\nu} \bar{\omega}^2 (E + P) \left(\frac{r\nu'}{2} - \frac{e^\lambda}{r\nu'} \right), \end{aligned} \quad (1.53)$$

$$h_2 = -e^\lambda \frac{m_2}{r} + \frac{8\pi}{3} r^4 e^{-\nu} \bar{\omega}^2 (E + P) - \frac{r^4}{6} e^{-(\nu+\lambda)} \left(\frac{d\bar{\omega}}{dr} \right)^2. \quad (1.54)$$

Οι δύο πρώτες εξισώσεις είναι συνήθεις συζευγμένες διαφορικές εξισώσεις, που έπειτα από πράξεις καταλήγουν στις εξής ([13], Εξς.(42)-(43)),

$$\begin{aligned} \frac{dv_2}{dr} &= \frac{1}{6} \left(1 + r \frac{d\Phi}{dr} \right) \left\{ r^2 \left[r \left(\frac{d\bar{\omega}}{dr} \right)^2 + 4\bar{\omega}^2 \left(4\pi r E + \frac{d\Phi}{dr} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - 2m \left[r^2 \left(\frac{d\bar{\omega}}{dr} \right)^2 + \bar{\omega}^2 \left(2 + 4r \frac{d\Phi}{dr} \right) \right] \right\} e^{-2\Phi} \\ &\quad - 2 \frac{d\Phi}{dr} h_2, \end{aligned} \quad (1.55)$$

$$\begin{aligned} \frac{dh_2}{dr} &= \left[\frac{-2m + 4\pi r^3 (E + P)}{r^2 (r - 2m) \frac{d\Phi}{dr}} - 2 \frac{d\Phi}{dr} \right] h_2 - \frac{2}{r (r - 2m) \frac{d\Phi}{dr}} v_2 \\ &\quad + \frac{\bar{\omega}^2 \left[1 + 2r (r - 2m) \left(\frac{d\Phi}{dr} \right)^2 \right] \left[r^2 (4\pi r E + \frac{d\Phi}{dr}) - m \left(1 + 2r \frac{d\Phi}{dr} \right) \right] e^{-2\Phi}}{3 (r - 2m) \frac{d\Phi}{dr}} \\ &\quad + \frac{r^2 \left(\frac{d\bar{\omega}}{dr} \right)^2 \left[-1 + 2r (r - 2m) \left(\frac{d\Phi}{dr} \right)^2 \right] e^{-2\Phi}}{12 \frac{d\Phi}{dr}}. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Με κατάλληλο τρόπο (που θα αναφέρουμε σε επόμενη παράγραφο), επιλύουμε το σύστημα των Εξν. (1.55), (1.56), παίρνοντας το προφίλ των τετραπολικών διορθώσεων για την τετραπολική συνάρτηση του στατικού μοντέλου v_2 και στην συνέχεια της h_2 . Η μεταβολή στην ακτίνα λόγω της τετραπολικής παραμόρφωσης δίνεται από την ([13], Εξ.(58))

$$\delta \mathcal{R}_{\text{QD}} = \xi_2(\mathcal{R}) P_2(\mu). \quad (1.57)$$

Από την Εξ. (1.54), μπορούμε να πάρουμε τώρα και το προφίλ των διορθώσεων για την μάζα⁶ ([2], Εξς.(23a))

$$m_2 = (r - 2m) \left[-h_2 - \frac{1}{3} r^3 \left(\frac{dj^2}{dr} \right) \bar{\omega}^2 + \frac{1}{6} r^4 j^2 \left(\frac{d\bar{\omega}}{dr} \right)^2 \right]. \quad (1.58)$$

Τέλος, η τετραπολική διόρθωση στην πίεση, δίνεται από το αντίστοιχο τετραπολικό μέρος της εξίσωσης υδροστατικής ισορροπίας για $l = 2$ ([2], Εξς.(23b)), ([15], Εξ.(36))

$$p_2 = -h_2 - \frac{1}{3} r^2 e^{-2\Phi} \bar{\omega}^2. \quad (1.59)$$

⁶Όπως προκύπτει βέβαια από τους υπολογισμούς, η τετραπολική διόρθωση της μάζας m_2 είναι αμελητέα. Για τον λόγο αυτό, θα παραλείπεται από τον υπολογισμό της συνολικής μάζας του αστέρα νετρονίων.

1.4.4 Διορθώσεις τρίτης τάξης στην γωνιακή ταχύτητα για την περίπτωση της ομοιόμορφης περιστροφής

Για να προσδιορίσουμε την συνάρτηση w (Εξ. 1.21), που περιγράφει τις διαταραχές τρίτης τάξης του Ω^3 , χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις πεδίου του *Einstein*

$$G_{t\varphi} = 8\pi T_{t\varphi} \quad (1.60)$$

Τελικά, καταλήγουμε στις διαταρακτικές διορθώσεις τρίτης τάξης $w_1(r)$ και $w_3(r)$, που εμφανίζονται στην Εξ. (1.37) και ικανοποιούν ένα σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης ([9], Εξς.(A29) και (A41))

$$\frac{1}{r^4} \frac{d}{dr} \left(r^4 j \frac{dw_1}{dr} \right) + \frac{4}{r} \frac{dj}{dr} w_1 = D_0 - \frac{1}{5} D_2, \quad (1.61)$$

$$\frac{1}{r^4} \frac{d}{dr} \left(r^4 j \frac{dw_3}{dr} \right) + \frac{4}{r} \frac{dj}{dr} w_3 - \frac{10 j w_3}{r(r-2M)} = \frac{1}{5} D_2, \quad (1.62)$$

όπου οι συντελεστές D_0 και D_2 ([9] Εξ.(A30)) δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} r^4 D_0 = & -u \frac{d}{dr} \left[\frac{m_0}{r-2m} + h_0 \right] + \\ & + 4r^3 \chi \left[\frac{1}{j} \frac{dj}{dr} \right] \left[\frac{2m_0}{r-2m} + \left(\frac{dE}{dP} + 1 \right) p_0 + \frac{2r^3 \chi^2}{3(r-2m)} \right], \end{aligned} \quad (1.63)$$

$$\begin{aligned} \frac{r^4 D_2}{5} = & \frac{u}{5} \frac{d}{dr} \left[4k_2 - \frac{m_2}{r-2m} - h_2 \right] + \\ & + \left(\frac{4r^3 \chi}{5} \right) \left[\frac{1}{j} \frac{dj}{dr} \right] \left[\frac{2m_2}{r-2m} + \left(\frac{dE}{dP} + 1 \right) p_2 - \frac{2r^3 \chi^2}{3(r-2m)} \right]. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Οι βοηθητικές μεταβλητές χ και u που εμφανίζονται σε αυτές τις σχέσεις, ορίζονται από τις ([9], Εξ.(A3))⁷

$$\chi = j \bar{\omega}, \quad u = r^4 j \frac{d\bar{\omega}}{dr}. \quad (1.65)$$

Για τον υπολογισμό των διαταρακτικών διορθώσεων w_1 και w_3 , εφαρμόζουμε την αριθμητική μέθοδο που παρουσιάζεται στην ([9], Παράρτημα 3). Εισάγοντας τις βοηθητικές μεταβλητές χ_1 και u_1 , (σύμφωνα με [9], Εξ.(A31)) που ορίζονται ως

$$\chi_1 = j w_1, \quad u_1 = r^4 j \frac{dw_1}{dr}, \quad (1.66)$$

⁷Σύμφωνα τις βοηθητικές μεταβλητές χ και u η τετραπολική διόρθωση στην μάζα γράφεται ως εξής: $m_2 = (r-2m) \left[-h_2 + \frac{8\pi r^5 (E+P) \chi^2}{3(r-2m)} + \frac{u^2}{6r^4} \right]$.

και τις βοηθητικές μεταβλητές χ_3 και u_3 , (σύμφωνα με [9], Εξ.(A42)) που ορίζονται ως

$$\chi_3 = j w_3, \quad u_3 = r^4 j \frac{dw_3}{dr}, \quad (1.67)$$

μετασχηματίζουμε τις Εξς. (1.61) και (1.62) σε ισοδύναμα συστήματα αποτελούμενα από διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης ([9], Εξ.(A32)),

$$\frac{d\chi_1}{dr} = \frac{u_1}{r^4} - \frac{4\pi r^2 (E + P) \chi_1}{r - 2m}, \quad (1.68)$$

$$\frac{du_1}{dr} = \frac{16\pi r^5 (E + P) \chi_1}{r - 2m} + \mathfrak{D}_1, \quad (1.69)$$

με τον όρο οδήγησης \mathfrak{D}_1 να δίνεται από την

$$\mathfrak{D}_1 = r^4 D_0 - \frac{r^4}{5} D_2, \quad (1.70)$$

και ([9], Εξ.(A43))

$$\frac{d\chi_3}{dr} = \frac{u_3}{r^4} - \frac{4\pi r^2 (E + P) \chi_3}{r - 2m}, \quad (1.71)$$

$$\frac{du_3}{dr} = \frac{16\pi r^5 (E + P) \chi_3}{r - 2m} + \frac{10r^3 \chi_3}{r - 2m} + \mathfrak{D}_3, \quad (1.72)$$

με τον αντίστοιχο όρο οδήγησης \mathfrak{D}_3 να δίνεται από την

$$\mathfrak{D}_3 = \frac{r^4}{5} D_2. \quad (1.73)$$

Το πρώτο σύστημα των Εξν. (1.68)–(1.69), έχει μερική λύση (χ_1^P, u_1^P) που υπόκειται στις αρχικές συνθήκες

$$\chi_1^P(r_1) = 0, \quad u_1^P(r_1) = 0. \quad (1.74)$$

Αντίστοιχα, το δεύτερο σύστημα των Εξν. (1.71)–(1.72), έχει μερική λύση (χ_3^P, u_3^P) , που υπόκειται στις αρχικές συνθήκες

$$\chi_3^P(r_1) = 0, \quad u_3^P(r_1) = 0. \quad (1.75)$$

Θέτοντας $D_0 = D_2 = 0$, παίρνουμε δύο ομογενή συστήματα: το πρώτο σύστημα αναφέρεται στο αντίστοιχο σύστημα των Εξν. (1.68), (1.69) με ομογενή λύση (χ_1^H, u_1^H) που υπακούει στις αρχικές συνθήκες ([9], Εξ.(A34))

$$\chi_1^H(r_1) = 1 + \frac{8\pi}{5} [E_c + P_c] r_1^2, \quad u_1^H(r_1) = \frac{16\pi}{5} [E_c + P_c] r_1^5. \quad (1.76)$$

Το δεύτερο σύστημα αναφέρεται στο αντίστοιχο σύστημα των Εξν. (1.71)–(1.72) με ομογενή λύση (χ_3^H, u_3^H) , που υπακούει στις αρχικές συνθήκες ([9], Εξ.(A45))

$$\chi_3^H(r_1) = r_1^2, \quad u_3^H(r_1) = 2r_1^5. \quad (1.77)$$

Οι γενικές λύσεις των δύο συστημάτων (Εξς. (1.68)–(1.69)) και (Εξς. (1.71)–(1.72)), για $r \leq R$, μπορούν να γραφτούν ως ([9], Εξς.(A33) και (A44))

$$\chi_1 = C_1 \chi_1^H + \chi_1^P, \quad u_1 = C_1 u_1^H + u_1^P, \quad (1.78)$$

$$\chi_3 = C_3 \chi_3^H + \chi_3^P, \quad u_3 = C_3 u_3^H + u_3^P. \quad (1.79)$$

Έξω από τον αστέρα ($r \geq R$), το σύστημα των Εξν. (1.68)–(1.69) απλοποιείται παίρνοντας την μορφή ([9], Εξ.(A35))

$$\frac{d\chi_1}{dr} = \frac{u_1}{r^4}, \quad (1.80)$$

$$\frac{du_1}{dr} = -\frac{u}{5} \frac{d}{dr} \left(4k_2 - \frac{6J^2}{r^4} \right). \quad (1.81)$$

Η λύση του $(\chi_{1\text{ext}}, u_{1\text{ext}})$ δίνει την λύση για το $w_{1\text{ext}}$ έξω από τον αστέρα, που συμπεριφέρεται ως ([9], Εξ.(A36))

$$w_{1\text{ext}}(r) = \frac{2\delta J}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^4}\right), \quad (1.82)$$

όπου δJ είναι η διόρθωση τρίτης τάξης στη στροφορμή. Δεδομένου ότι για $r \geq R$ και $j = 1$ έχουμε $\chi_{1\text{ext}} = w_{1\text{ext}}$, μπορούμε να γράψουμε

$$\chi_{1\text{ext}} = \frac{2\delta J}{r^3} + F(r), \quad (1.83)$$

όπου η βοηθητική συνάρτηση $F(r)$, πρέπει να μηδενίζεται στο άπειρο με ταχύτερο ρυθμό από αυτόν της συνάρτησης r^{-3} . Επομένως, για $r \rightarrow \infty$, $u_1 \sim -6\delta J$. Οι εξωτερικές λύσεις για τα u_1 και χ_1 είναι ([9], Εξς.(A38), (A40), αντίστοιχα)

$$\begin{aligned} u_{1\text{ext}} = & -\frac{u}{5} \left(4k_2 - \frac{6J^2}{r^4} \right) - 6\delta J = \frac{84J^3}{5r^4} + \frac{24J^3}{5M(R)r^3} \\ & + \frac{24JKQ_2^2}{5} - \frac{48M(R)JKQ_2^1}{5[r(r-2M(R))]^{\frac{1}{2}}} - 6\delta J, \end{aligned} \quad (1.84)$$

$$\chi_{1\text{ext}} = \frac{2\delta J}{r^3} + F(r), \quad (1.85)$$

όπου η βοηθητική συνάρτηση $F(r)$ δίνεται από την σχέση ([9], Εξ.(A39))

$$\begin{aligned}
F(r) = & -\frac{12 J^3}{5 r^7} - \frac{4 J^3}{5 M r^6} + \frac{JK}{40 M^3 r^4} \left[108 r^4 \ln \left(\frac{r}{r-2M} \right) \right. \\
& - 288 r^3 M \ln \left(\frac{r}{r-2M} \right) + 33 r^4 - 240 r^3 M + 336 r^2 M^2 \\
& + 256 M^3 r - 96 M^4 + 192 r M^3 \ln \left(\frac{r}{r-2M} \right) \\
& \left. + 12 r^4 \ln \left(\frac{r}{r-2M} \right) \right] - \frac{33 JK}{40 M^3}. \tag{1.86}
\end{aligned}$$

Εξισώνοντας τις λύσεις μέσα και έξω από τον αστέρα στην θέση, $r = R$, παίρνουμε ένα σύστημα δύο εξισώσεων

$$C_1 \chi_1^H(R) + \chi_1^P(R) = \chi_{1\text{ext}}(R), \quad C_1 u_1^H(R) + u_1^P(R) = u_{1\text{ext}}(R), \tag{1.87}$$

με αγνώστους τις δύο σταθερές C_1 , δJ που μπορούν να προσδιοριστούν ως ρίζες του συστήματος. Το αποτέλεσμα για την σταθερά δJ , πρέπει να συμπίπτει με το αποτέλεσμα της Εξ. (3.90), ([9], Παράρτημα 3a). Έχοντας λοιπόν υπολογίσει και τη σταθερά C_1 , μπορούμε να εκφράσουμε την γενική λύση του συστήματος (Εξς. (1.68)-(1.69)) ως

$$\chi_1(r) = C_1 \chi_1^H(r) + \chi_1^P(r), \quad u_1(r) = C_1 u_1^H(r) + u_1^P(r). \tag{1.88}$$

Όσον αφορά το w_3 έξω από τον αστέρα ($r \geq R$), το σύστημα των Εξν. (1.71)-(1.72), παίρνει την μορφή ([9], Εξ.(A46))

$$\frac{d\chi_3}{dr} = \frac{u_3}{r^4}, \tag{1.89}$$

$$\frac{du_3}{dr} = \frac{10 r^3 \chi_3}{r-2M} + \frac{u}{5} \frac{d}{dr} \left(4k_2 - \frac{6J^2}{r^4} \right). \tag{1.90}$$

Η γενική λύση του συστήματος είναι ένας γραμμικός συνδυασμός της λύσης $(\chi_{3\text{ext}}^H, u_{3\text{ext}}^H)$ του ομογενούς συστήματος, όπως αυτή μετασχηματίζεται θέτοντας $k_2 = J = 0$ στην Εξ. (1.90) και της μερικής λύσης $(\chi_{3\text{ext}}^P, u_{3\text{ext}}^P)$, η οποία μηδενίζεται στο άπειρο με ρυθμό ταχύτερο του r^{-5} . Η αποδεκτή λύση για το ομογενές σύστημα συμπεριφέρεται όπως η r^{-5} όταν το $r \rightarrow \infty$. Η γενική λύση γράφεται ως ([9], Εξ.(A47))

$$\chi_{3\text{ext}} = D_3 \chi_{3\text{ext}}^H + \chi_{3\text{ext}}^P, \quad u_{3\text{ext}} = D_3 u_{3\text{ext}}^H + u_{3\text{ext}}^P. \tag{1.91}$$

Επομένως, η λύση ως προς το w_3 ([9], Εξ.(A48)) γράφεται

$$w_{3\text{ext}} = D_3 w_{3\text{ext}}^H + w_{3\text{ext}}^P, \tag{1.92}$$

όπου η ομογενής λύση για το w_3 έξω από τον αστέρα δίνεται από την σχέση ([9], Εξ.(A49))

$$w_{3\text{ext}}^H(r) = \left(\frac{7}{64 r^3 M^7} \right) \left[-120 r^3 M^2 \ln \left(\frac{r}{r-2M} \right) + 150 r^4 M \ln \left(\frac{r}{r-2M} \right) - 45 r^5 \ln \left(\frac{r}{r-2M} \right) + 20 r M^4 + 60 r^2 M^3 - 210 r^3 M^2 + 90 r^4 M + 8 M^5 \right], \quad (1.93)$$

και η μερική λύση του w_3 έξω από τον αστέρα $w_{3\text{ext}}^P$ δίνεται από την σχέση ([9], Εξ.(A50))

$$w_{3\text{ext}}^P(r) = \left(\frac{J}{480 r^7 M^9} \right) \left[1152 J^2 M^9 + 700 r^5 J^2 M^4 + 2100 r^6 J^2 M^3 - 7350 r^7 J^2 M^2 + 3150 r^8 J^2 M + 280 r^4 J^2 M^5 + 1152 K r^3 M^{10} + 64 J^2 r M^8 - 320 J^2 r^2 M^7 + 10080 K M^5 r^8 + 1088 K M^8 r^5 + 1664 K M^9 r^4 - 23520 K M^6 r^7 + 6720 K M^7 r^6 + 16800 K M^5 r^8 \ln \left(\frac{r}{r-2M} \right) - 4200 r^7 J^2 M^2 \ln \left(\frac{r}{r-2M} \right) + 5250 r^8 J^2 M \ln \left(\frac{r}{r-2M} \right) - 5040 K M^4 r^9 \ln \left(\frac{r}{r-2M} \right) - 13440 K M^6 r^7 \ln \left(\frac{r}{r-2M} \right) + 576 K M^7 r^6 \ln \left(\frac{r}{r-2M} \right) - 960 K M^8 r^5 \ln \left(\frac{r}{r-2M} \right) - 384 K M^9 r^4 \ln \left(\frac{r}{r-2M} \right) - 1575 r^9 J^2 \ln \left(\frac{r}{r-2M} \right) \right]. \quad (1.94)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η λύση μέσα και έξω από τον αστέρα πρέπει να παίρνει την ίδια τιμή, για την επιφάνεια του μη περιστρεφόμενου αστέρα, $r = R$, παίρνουμε ένα σύστημα δύο εξισώσεων

$$C_3 \chi_3^H(R) + \chi_3^P(R) = D_3 \chi_{3\text{ext}}^H(R) + \chi_{3\text{ext}}^P(R), \quad (1.95)$$

$$C_3 u_3^H(R) + u_3^P(R) = D_3 u_{3\text{ext}}^H(R) + u_{3\text{ext}}^P(R), \quad (1.96)$$

με αγνώστους τις σταθερές C_3 και D_3 , οι οποίες προσδιορίζονται ως ρίζες του συστήματος. Έχοντας υπολογίσει την σταθερά C_3 , μπορούμε να εκφράσουμε την γενική λύση του συστήματος των Εξν. (1.71)–(1.72), με την μορφή

$$\chi_3(r) = C_3 \chi_3^H(r) + \chi_3^P(r), \quad u_3(r) = C_3 u_3^H(r) + u_3^P(r). \quad (1.97)$$

Κεφάλαιο 2

Η μέθοδος Complex-Plane Strategy

2.1 Περιγραφή της μεθόδου *CPS*

2.1.1 Γενικά

Σ' αυτό το κεφάλαιο, θα περιγράψουμε την μέθοδο *CPS*, που εφαρμόζουμε για την αριθμητική ολοκλήρωση όλων των διαφορικών εξισώσεων, που αναφέρονται στο Κεφ. 1. Τα αριθμητικά αποτελέσματα, που θα παράγουμε αφορούν πολυτροπικά μοντέλα μέγιστης μάζας, με ομοιόμορφη περιστροφή με Κεπλεριανή γωνιακή ταχύτητα και για πολυτροπικούς δείκτες $n = 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 2.9$. Όπως γνωρίζουμε, καθώς αυξάνει ο πολυτροπικός δείκτης, τα νετρόνια γίνονται περισσότερο σχετικιστικά, αλλά όχι εξαιρετικά σχετικιστικά· κάτι το οποίο συμβαίνει για πολυτροπικό δείκτη $n = 3$. Υπενθυμίζουμε, ότι οι φυσικές ποσότητες που εμπλέκονται στους υπολογισμούς μας, εκφράζονται σε βαρυτικές μονάδες. Μετατρέπονται σε πολυτροπικές με βάση το γεγονός, ότι στις βαρυτικές μονάδες, η σταθερά $K^{\frac{n}{2}}$ έχει μονάδες μήκους και έτσι αυτή η σταθερά μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ορίζουμε μία μονάδα μήκους στο σύστημα ([22], §2, Εξς.(4)-(13)), ([15], Πίνακας 1). Επιπλέον στον Πίνακα Δ'.1, δίνουμε τις τιμές των συντελεστών που μετατρέπουν τις πλέον σημαντικές φυσικές ποσότητες από βαρυτικές μονάδες σε αυτές του συστήματος cgs .

Η καινοτομία της παρούσας διατριβής είναι ότι η αριθμητική ολοκλήρωση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων που εφαρμόζουμε γίνεται στο μιγαδικό επίπεδο. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε την αριθμητική μέθοδο "Complex-Plane Strategy" (*CPS*). Όλες οι φυσικές ποσότητες που εμπλέκονται στους υπολογισμούς μας είναι μιγαδικοί αριθμοί. Επίσης, ένα σημαντικό σημείο αυτής της μεθόδου είναι ότι οι αριθμητικές ολοκληρώσεις

όλων των διαφορικών εξισώσεων, που διέπουν το πρόβλημα δεν σταματούν λίγο πριν την επιφάνεια του ακίνητου αστέρα (όπως αυτό συμβαίνει στις εργασίες των ([13], §3.2), ([15], §5) και ([14], §3.1, §3.3), αλλά προχωρούν και πέραν αυτής. Με άλλα λόγια, αυτό σημαίνει ότι η *CPS* γνωρίζει την παραμόρφωση που προκαλείται από την περιστροφή, για ένα αρκετά εκτεταμένο διάστημα αρκετά πέραν αυτού που περιβάλλει το αρχικά σφαιρικό σχήμα του αδιατάρακτου αστέρα. Συνεπώς, για τον υπολογισμό ενός περιστρεφόμενου μοντέλου η *CPS* δεν προεκβάλλει ποτέ, δηλαδή δεν μπαίνει στην διαδικασία υπολογισμών σε πίνακες συναρτήσεων πέραν των τελικών τους τιμών που έχουν υπολογιστεί από τέτοιες εκτεταμένες αριθμητικές ολοκληρώσεις. Αυτή ακριβώς η αποφυγή οποιασδήποτε παρεκβολής είναι που κρατά το σφάλμα στους υπολογισμούς αρκετά μικρό.

Το βασικό πακέτο λογισμικού, που χρησιμοποιούμε για την αριθμητική ολοκλήρωση όλων των διαφορικών εξισώσεων στο μιγαδικό επίπεδο (μέχρι τις διορθώσεις τρίτης τάξης), είναι το ATOMFT System των Y. F. Chang and G. Corliss [35].

Στο τέλος, χρησιμοποιούμε το γνωστό πακέτο λογισμικού *Mathematica*[®], της WOLFRAM RESEARCH. Ένα κατάλληλα διαμορφωμένο πρόγραμμα *Mathematica*[®], διαβάζει το αρχείο αποτελεσμάτων που παράγεται από την ATOMFT, εκτελεί όλες τις αριθμητικές διαδικασίες που απαιτούνται και στο τέλος ολοκληρώνει αριθμητικά τις διαφορικές εξισώσεις που αφορούν τις διορθώσεις τρίτης τάξης.

2.1.2 Θεμελιώδεις πτυχές της *CPS*

Για να επισημάνουμε ορισμένες θεμελιώδεις πτυχές της *CPS*, εξετάζουμε πρώτα το μοντέλο του μη περιστρεφόμενου αστέρα νετρονίων, που υπακούει στις εξισώσεις *OV* (1.17), (1.19). Με βάση τις πολυτροπικές εξισώσεις (1.2)–(1.3), επιφέρουμε μια τροποποίηση στις εξισώσεις *OV*, οπότε παίρνουμε το σύστημα των εξισώσεων

$$\frac{d\rho}{dr} = - \frac{[\rho + (1 + n) P] (m + 4 \pi r^3 P)}{r (r - 2m) \frac{dP}{d\rho}} = - \frac{[\rho + K (1 + n) \rho^\Gamma] (m + 4 K \pi r^3 \rho^\Gamma)}{K \Gamma r (r - 2m) \rho^{1/n}}, \quad (2.1)$$

$$\frac{dm}{dr} = 4 \pi r^2 (\rho + n P) = 4 \pi r^2 (\rho + K n \rho^\Gamma). \quad (2.2)$$

Λόγω της καταστατικής Εξ. (1.2), μπορούμε να υπολογίσουμε την συνάρτηση $dP/d\rho$ ως εξής

$$\frac{dP}{d\rho} = K \Gamma \rho^{\Gamma-1} = K \Gamma \rho^{1/n}. \quad (2.3)$$

Το σύστημα των δύο εξισώσεων (2.1), (2.2) μπορεί να λυθεί αριθμητικά εφόσον δώσουμε τις αρχικές συνθήκες στο κέντρο του αστέρα $\rho(r=0) = \rho_0 = \rho_c$, $m(r=0) = m_0 = m_c = 0$. Όσον αφορά την κεντρική πυκνότητα μάζας ηρεμίας ρ_c , αυτή προκύπτει από την κεντρική πυκνότητα μάζας-ενέργειας E_c (η οποία είναι γνωστή), σύμφωνα με την σχέση (1.6)

$$\rho_c = \rho(E_c) = E_c - n P(E_c) = E_c - n P_c. \quad (2.4)$$

Σ' αυτό το σημείο, θα πρέπει να επισημάνουμε ότι ένα σημαντικό μέρος του προβλήματος επίλυσης διαφορικών εξισώσεων είναι η επιβολή οριακών συνθηκών. Τα σημεία, στα οποία επιβάλλονται οι οριακές συνθήκες σ' έναν αστέρα είναι το κέντρο και η επιφάνειά του. Πρόβλημα στο κέντρο του αστέρα δημιουργούν οι όροι $1/r$, $1/r^2$ κ.ο.κ. Ένας τρόπος αποφυγής αυτών των όρων είναι να ορίσουμε καινούργιες μεταβλητές, εφόσον είναι δυνατόν, αλλιώς αποφεύγουμε το κέντρο του αστέρα ($r_0 = 0$ cm), γιατί π.χ. η Εξ. (2.1) δεν ορίζεται στο κέντρο του αστέρα. Όπως έχει περιγραφεί στην ([15], §5.1, στο τμήμα που αφορά την Εξ. (122)), για να αποφύγουμε αυτό το πρόβλημα, ξεκινάμε την ολοκλήρωση από κάποιο σημείο, ελάχιστα πέρα από το κέντρο

$$r_1 = r_0 + \Delta_1 = \Delta_1, \quad (2.5)$$

όπου το πρώτο βήμα Δ_1 , βρίσκεται συνήθως στο διάστημα $[10^{-6}$ cm, 10^1 cm]. Στην παρούσα έρευνα, χρησιμοποιούμε την τιμή $\Delta_1 = 10^{-3}$ cm. Αφού εξασφαλίζουμε το r_1 να παίρνει μία πολύ μικρή τιμή, οι αρχικές συνθήκες που εφαρμόζονται στο σημείο έναρξης r_1 , έχουν ως εξής

$$\rho(r_1) = \rho_1 = \rho_c, \quad m(r_1) = m_1 = m_c = 0. \quad (2.6)$$

Μια εναλλακτική μέθοδος για να αποφύγουμε επίσης το συγκεκριμένο πρόβλημα, είναι η αριθμητική μέθοδος με αρχική τιμή $(d\rho/dr)|_{r=0} = 0$. πράγματι, χρησιμοποιώντας κοντά στο κέντρο του αστέρα την Νευτώνεια προσέγγιση $m = (4/3) \pi E_c r^3$, μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι το δεξί μέρος της Εξ. (2.1) μεταβάλλεται όπως η ακτινική συντεταγμένη r και συνεπώς μηδενίζεται στο r_0 .

Το επόμενο πρόβλημα, αφορά την επιφάνεια του αστέρα $r = R$, εξαιτίας του γεγονότος ότι $\rho(R) = 0$ (βλέπε [2], §IIc, στο κομμάτι που αφορά την Εξ. (3)). Για να απαλείψουμε αυτό το πρόβλημα, μπορούμε να τερματίσουμε την αριθμητική ολοκλήρωση στο σημείο $r_N < R$, που είναι το τελευταίο

σημείο στο οποίο οι όροι $\rho_{\mathcal{N}}$ και $m_{\mathcal{N}}$ ικανοποιούνται (για περισσότερες λεπτομέρειες επί του θέματος αυτού, βλέπε [15], §5.1 και [14], §3.1, §3.3). Συνεπώς, η ακτίνα του αστέρα είναι $R = r_{\mathcal{N}}$ και η βαρυτική μάζα είναι ίση με την τιμή που παίρνει η συνάρτηση m στο $r_{\mathcal{N}}$, δηλαδή $M = m(r_{\mathcal{N}})$.

2.1.3 Θεμελίωση της *CPS*

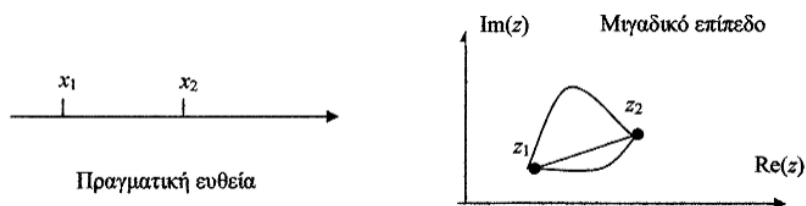
Η μέθοδος *CPS* που εφαρμόζουμε στην παρούσα διατριβή, προσφέρει μια εναλλακτική λύση για την αποφυγή κάποιων ιδιομορφιών ή/και απροσδιόριστων μορφών στον πραγματικό άξονα \mathbb{R} , ιδιαίτερα κοντά στα σημεία $r = 0$ και $r = R$. Ως γνωστόν (βλέπε Σχ. 2.1), στην ευθεία των πραγματικών υπάρχει ένας και μοναδικός δρόμος για να φτάσεις από ένα σημείο x_1 στο σημείο x_2 , όπου x_1, x_2 ανήκουν στον πραγματικό άξονα \mathbb{R} . Στο επίπεδο των μιγαδικών, υπάρχουν άπειροι δρόμοι για να φτάσεις από ένα σημείο z_1 στο σημείο z_2 , όπου z_1, z_2 ανήκουν στο μιγαδικό επίπεδο \mathbb{C} . Συνεπώς μας δίνεται η δυνατότητα μιας εναλλακτικής λύσης, που συνίσταται στην εκτέλεση της αριθμητικής ολοκλήρωσης κατά μήκος ενός "δρόμου", \mathcal{C} (αλλιώς "μιγαδικό μονοπάτι": εμείς θα χρησιμοποιούμε αυτή την έκφραση), που βρίσκεται στο μιγαδικό επίπεδο \mathbb{C} και είναι παράλληλο στον πραγματικό άξονα \mathbb{R} , απέχοντας $i\delta_1$ από αυτόν σε ευθεία γραμμή, δηλαδή

$$\mathcal{C} = \{r_1 = r_{(\text{re})1} + i r_{(\text{im})1} = \Delta_1 + i\delta_1 \longrightarrow r_{\text{max}} = r_{(\text{re})\text{max}} + i r_{(\text{im})\text{max}} = r_{(\text{re})\text{max}} + i\delta_1\}, \quad (2.7)$$

συνδέοντας τα σημεία r_1 και r_{max} στο \mathbb{C} . Για την ευκολία, υιοθετούμε τις συντημήσεις

$$r = r_{(\text{re})} + i r_{(\text{im})} = \bar{r} + i\check{r} \quad (2.8)$$

για την "πραγματική ακτινική συντεταγμένη", \bar{r} και για την "φανταστική ακτινική συντεταγμένη", $\check{r} = \delta_1$. Το πραγματικό μέρος, \bar{r}_{max} του r_{max} επιλέγεται να είναι αρκετά μεγάλο, $\bar{r}_{\text{max}} = 2R_{\text{exp}}$ ας πούμε, όπου η "αναμενόμενη" ακτίνα του αστέρα R_{exp} , είναι μία ακατέργαστη προσέγγιση της ακτίνας R . Για τα πολυτροπικά μοντέλα που μελετάμε και εκτελούμε τους υπολογισμούς μας στην παρούσα ερευνητική προσπάθεια, χρησιμοποιούμε την τιμή $R_{\text{exp}} = 10^6 \text{ cm}$. Το φανταστικό μέρος $\check{r} = \delta_1$, ορίζεται ως μια παράμετρος του υπό εξέταση προβλήματος, που παραμένει σταθερή για όλες τις τιμές της r στο \mathcal{C} και παίρνει μικρή τιμή συγκρινόμενη με την R_{exp} , $\delta_1 \ll R_{\text{exp}}$, που συνήθως βρίσκεται στο διάστημα $[10^{-3} \text{ cm}, 10^1 \text{ cm}]$. Εμείς στην παρούσα έρευνα, χρησιμοποιούμε την τιμή $\delta_1 = 0.5 \text{ cm}$. Ως εκ τούτου, το μονοπάτι της ολοκλήρωσης που προσδιορίζεται από την Εξ. (2.7), δεν διασχίζει την δ_1 -γειτονιά του σημείου $r = R$, (δηλαδή το σύνολο όλων των σημείων r^* για τα



Σχήμα 2.1: Το ένα και μοναδικό μονοπάτι από το σημείο x_1 στο x_2 , στην ευθεία των πραγματικών (αριστερό σχήμα). Άπειρα μονοπάτια από το σημείο z_1 στο z_2 , στο επίπεδο των μιγαδικών (δεξιό σχήμα).

οποία ισχύει $|r^* - R| < \delta_1$), αφού

$$|r - R| = |(\bar{r} - R) + i \delta_1| \geq \delta_1. \quad (2.9)$$

Από την σκοπιά των ολοκληρώσεων στο μιγαδικό επίπεδο, οι αρχικές συνθήκες (2.6) για την μιγαδική πυκνότητα μάζας ηρεμίας, ρ και την μιγαδική μάζα-ενέργεια m , γίνονται

$$\rho_1 = \rho_{(\text{re})1} + i \rho_{(\text{im})1} = \rho_{(\text{re})c} + i \delta \rho_1, \quad (2.10)$$

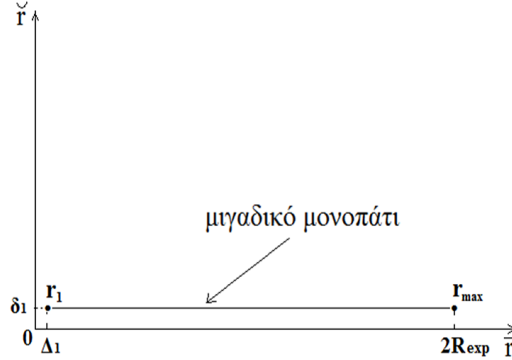
$$m_1 = m_{(\text{re})1} + i m_{(\text{im})1} = m_{(\text{re})c} + i \delta m_1 = 0 + i \delta m_1. \quad (2.11)$$

Το φανταστικό μέρος της πυκνότητα μάζας ηρεμίας, $\delta \rho_1$, επιλέγεται να είναι μικρό συγκρινόμενο με το πραγματικό μέρος της κεντρικής πυκνότητας μάζας ηρεμίας $\rho_{(\text{re})c}$, που συνήθως βρίσκεται στο διάστημα $[10^{-6} \rho_{(\text{re})c}, 10^{-2} \rho_{(\text{re})c}]$. Σε ορισμένες περιπτώσεις, το $\delta \rho_1$ μπορεί να τεθεί ακόμα και ίσο με το μηδέν, δεδομένου ότι τα αριθμητικά πειράματα που πραγματοποιήσαμε, μας δείχνουν ότι η παρουσία ενός μη μηδενικού $\delta \rho_1$, εξασφαλίζει ταυτόχρονα σταθεροποίηση και επιτάχυνση της διαδικασίας ολοκλήρωσης στο μιγαδικό επίπεδο. Το φανταστικό μέρος της μάζας-ενέργειας, δm_1 , μπορεί να τεθεί ίσο με το μηδέν, χωρίς βλάβη της γενικότητας, αφού το πραγματικό μέρος της μάζας-ενέργειας, $m_{(\text{re})c}$, είναι το ίδιο μηδέν, όπως απαιτείται από τις Εξς. (2.6), (2.11).

Το πραγματικό μέρος $\rho_{(\text{re})}$ της ρ γίνεται αρνητικό αμέσως αφότου περνά το μονοπάτι της ολοκλήρωσης από το σημείο

$$\mathcal{R} = R + i \delta_1. \quad (2.12)$$

Παρά όλα αυτά, κατά τον υπολογισμό των ποσοτήτων ρ^Γ και $\rho^{1/n}$, η μέθοδος δεν καταρρέει λόγω του συνδρόμου "της ανύψωσης ενός αρνητικού πραγματικού αριθμού σε μια πραγματική δύναμη" (ποσότητα που δεν ορίζεται στο



Σχήμα 2.2: Το μιγαδικό μονοπάτι για την εκτέλεση της αριθμητικής ολοκλήρωσης από το σημείο r_1 στο r_{max} .

\mathbb{R}), δεδομένου ότι δεν υπάρχει ένα τέτοιο σύνδρομο μέσα στο \mathbb{C} . Καθώς η αριθμητική μέθοδος προχωράει την λύση στα διαδοχικά σημεία κατά μήκος της \mathcal{C} (Εξ. (2.7)), τα αριθμητικά αποτελέσματα που παράγονται απ' αυτήν την μέθοδο, χρησιμοποιούνται για να κατασκευαστεί ο πίνακας $\mathcal{T}_{\text{SOL}}^{(\delta_1)}$ των $\mathcal{N}_{\text{SOL}}^{(\delta_1)}$ σειρών,

$$\mathcal{T}_{\text{SOL}}^{(\delta_1)} = \left[\left\{ \bar{r}_i, \rho_{(\text{re})i}, \rho_{(\text{im})i}, m_{(\text{re})i}, m_{(\text{im})i} \right\}, \left\{ i, 1, \mathcal{N}_{\text{SOL}}^{(\delta_1)} \right\} \right]. \quad (2.13)$$

Ακολουθώς, χρησιμοποιώντας τυπικές αριθμητικές μεθόδους, κάνουμε παρεμβολή στον πίνακα $\mathcal{T}_{\text{SOL}}^{(\delta_1)}$ στις μεταβλητές $\rho_{(\text{re})}$, $\rho_{(\text{im})}$, $m_{(\text{re})}$, $m_{(\text{im})}$ σε όρους της μεταβλητής \bar{r} . Κατ' αυτόν τον τρόπο, από την αριθμητική παρεμβολή, κατασκευάζουμε μια οικογένεια πραγματικών συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής, που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην θέση των αρχικά μιγαδικών συναρτήσεων μιας μιγαδικής μεταβλητής για διάφορους σκοπούς. Ο άνω δείκτης " (δ_1) ", δίνει έμφαση στο γεγονός ότι μια δεύτερη διαφορετική τιμή της παραμέτρου δ_1 , οδηγεί σε μια δεύτερη διαφορετική οικογένεια συναρτήσεων εκ παρεμβολής. Για μια συγκεκριμένη συνάρτηση, οι αριθμητικές τιμές της που υπολογίζονται στην πρώτη και στην δεύτερη περίπτωση, αποκλίνουν μεταξύ τους κατά ένα ποσό μικρότερο από το όριο σφάλματος της συγκεκριμένης αριθμητικής μεθόδου που χρησιμοποιείται στις ολοκληρώσεις, αποδεικνύοντας ότι $\delta_1 \ll R_{\text{exp}}$ και στις δύο περιπτώσεις.

Όταν απαιτείται να αναλύσουμε μια συνάρτηση f , που δεν συμπεριλαμβάνεται στον Πίνακα $\mathcal{T}_{\text{SOL}}^{(\delta_1)}$, προχωράμε συστηματικά στον μετασχηματισμό της συναρτησιακής μορφής της f , χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις από παρεμβολή που εμπεριέχονται στον $\mathcal{T}_{\text{SOL}}^{(\delta_1)}$. Για παράδειγμα, για την ανάλυση της συνάρτησης της πίεσης P , γράφουμε

$$P(\bar{r}) = P_{(\text{re})}(\bar{r}) + i P_{(\text{im})}(\bar{r}). \quad (2.14)$$

$$P_{(\text{re})}(\bar{r}) = \text{Re} \left[K \left\{ \rho_{(\text{re})}(\bar{r}) + i \rho_{(\text{im})}(\bar{r}) \right\}^\Gamma \right], \quad (2.15)$$

$$P_{(\text{im})}(\bar{r}) = \text{Im} \left[K \left\{ \rho_{(\text{re})}(\bar{r}) + i \rho_{(\text{im})}(\bar{r}) \right\}^\Gamma \right]. \quad (2.16)$$

Στο τέλος αυτής της διαδικασίας, στην νέα συναρτησιακή μορφή της f , εμφανίζονται αποκλειστικά συναρτήσεις από παρεμβολή που ανήκουν στον Πίνακα $\mathcal{T}_{\text{SOL}}^{(\delta_1)}$. στην περίπτωση της P , αυτό επιβεβαιώνεται από τις Εξς. (2.15)–(2.16).

Στο τέλος της διαδικασίας ολοκλήρωσης, η (απροσδιόριστη ακόμα) ακτίνα του αστέρα μπορεί να υπολογιστεί ως η ρίζα, R , της αλγεβρικής εξίσωσης $\rho_{(\text{re})}(\bar{r}) = 0$, δηλαδή

$$R = \text{root} \left[\rho_{(\text{re})}(\bar{r}) = 0, \bar{r} \right], \quad (2.17)$$

όπου η εμφάνιση της μεταβλητής \bar{r} μέσα στις αγκύλες δηλώνει ότι αυτή είναι ακριβώς η μεταβλητή για να οριστεί μια χαρακτηριστική τιμή, που καλείται “ρίζα”, έτσι ώστε η αλγεβρική εξίσωση $\rho_{(\text{re})}(\bar{r}) = 0$ να ικανοποιείται. Προφανώς, η εύρεση αυτής της ρίζας είναι εφικτή στα πλαίσια της \mathcal{CPS} , αφού όπως τονίζεται στην § 2.1.1, αυτή η μέθοδος κατέχει το μοναδικό χαρακτηριστικό της γνώσης της συνάρτησης $\rho_{(\text{re})}(\bar{r})$, αρκετά πέραν της ακτίνας του αστέρα (στην πραγματικότητα μέχρι $2 R_{\text{exp}}$).

Η βαρυτική μάζα, M , του αστέρα δίνεται από την σχέση

$$M = m_{(\text{re})}(R). \quad (2.18)$$

Για τις αντίστοιχες μιγαδικές ποσότητες της ακτίνα και της μάζας του αστέρα \mathcal{R} και \mathcal{M} αντίστοιχα, έχουμε $\mathcal{R} = R + i \delta_1$ (Εξ. (2.12)) και

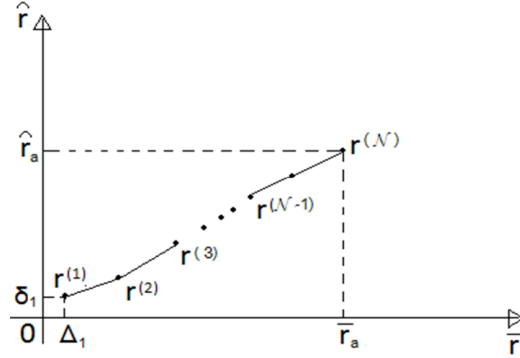
$$\mathcal{M} = m_{(\text{re})}(R) + i m_{(\text{im})}(R). \quad (2.19)$$

Στις Εξς. (2.15)–(2.19), οι εμφανιζόμενες συναρτήσεις είναι οι αντίστοιχες συναρτήσεις παρεμβολής που αναφέραμε παραπάνω. Στην παρούσα έρευνα, κάθε συνάρτηση της πραγματικής ακτινικής συντεταγμένης \bar{r} , θεωρείται ότι έχει αναλυθεί με όρους τις συναρτήσεις, που ανήκουν στην οικογένεια των συναρτήσεων από παρεμβολή, όπως έχει συζητηθεί παραπάνω.

2.1.4 Συναρτήσεις, φυσικές ποσότητες, αρχικές συνθήκες στα πλαίσια της \mathcal{CPS}

Κάθε συνάρτηση f που περιλαμβάνεται στην μέθοδο διαταραχής του *Hartle*, ερμηνεύεται στα πλαίσια της \mathcal{CPS} σαν μια μιγαδική συνάρτηση με μιγαδική μεταβλητή r ,

$$f = f(r) = f_{(\text{re})}(r) + i f_{(\text{im})}(r). \quad (2.20)$$



Σχήμα 2.3: Το τμηματικά γραμμικό μιγαδικό μονοπάτι για την αριθμητική ολοκλήρωση της διαφορικής εξίσωσης που διέπει την συνάρτηση f .

Από μαθηματικής άποψης, ως πεδίο ορισμού της f , μπορούμε να θεωρήσουμε ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο. Αυτό σημαίνει ότι για ένα συγκεκριμένο σημείο $r_a \in \mathbb{C}$, η διαφορική εξίσωση που διέπει την f , μπορεί να ολοκληρωθεί αριθμητικά κατά μήκος πάνω σε ένα μιγαδικό μονοπάτι \mathcal{C} , συνήθως προκαθορισμένο πάνω σε ένα τμηματικά γραμμικό μονοπάτι στο \mathbb{C} ,

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{array}{ll} r^{(1)} = r_{(\text{re})}^{(1)} + i r_{(\text{im})}^{(1)} & \longrightarrow r^{(2)} = r_{(\text{re})}^{(2)} + i r_{(\text{im})}^{(2)} \\ r^{(2)} = r_{(\text{re})}^{(2)} + i r_{(\text{im})}^{(2)} & \longrightarrow r^{(3)} = r_{(\text{re})}^{(3)} + i r_{(\text{im})}^{(3)} \\ \dots & \dots \\ r^{(\mathcal{N}_{\mathcal{C}}-1)} = r_{(\text{re})}^{(\mathcal{N}_{\mathcal{C}}-1)} + i r_{(\text{im})}^{(\mathcal{N}_{\mathcal{C}}-1)} & \longrightarrow r^{(\mathcal{N}_{\mathcal{C}})} = r_{(\text{re})}^{(\mathcal{N}_{\mathcal{C}})} + i r_{(\text{im})}^{(\mathcal{N}_{\mathcal{C}})}, \end{array} \right\}, \quad (2.21)$$

καθορισμένο από $\mathcal{N}_{\mathcal{C}}$ κορυφές $r^{(1)}, r^{(2)}, \dots, r^{(\mathcal{N}_{\mathcal{C}})}$, που ορίζουν $(\mathcal{N}_{\mathcal{C}} - 1)$ ευθύγραμμα τμήματα. Το μονοπάτι αρχίζει από το σημείο

$$r^{(1)} = r_1 = \bar{r}_1 + i \check{r}_1 = \Delta_1 + i \delta_1, \quad (2.22)$$

και τερματίζεται στο σημείο

$$r^{(\mathcal{N}_{\mathcal{C}})} = r_a = \bar{r}_a + i \check{r}_a. \quad (2.23)$$

Προφανώς, το απλούστερο μονοπάτι ολοκλήρωσης είναι η ευθεία γραμμή που ενώνει τα σημεία r_1 και r_a (όπως στην Εξ. (2.7) για τα σημεία r_1 και r_{\max}), υπό τον όρο ότι αυτή η γραμμή δεν διασχίζει καμμία ιδιομορφία (*singularity*) της f στο \mathbb{C} . Υποθέτοντας ότι η συνάρτηση f υπακούει σε μια πρώτης τάξης διαφορική εξίσωση και ότι ένα μιγαδικό μονοπάτι $\mathcal{C}^{(1)}$ έχει καθοριστεί, αρχίζουμε την αριθμητική ολοκλήρωση με την αρχική συνθήκη $f(r_1) = f_{(\text{re})1} + i f_{(\text{im})1}$. Κατόπιν, η διαδικασία ολοκλήρωσης προωθεί την λύση βήμα-βήμα κατά μήκος του $\mathcal{C}^{(1)}$, μέχρι το σημείο r_a και έτσι υπολογίζει την τι-

μή $f(r_a)$. Στην πραγματικότητα, αυτή η τιμή είναι ανεξάρτητη από το συγκεκριμένο μονοπάτι ολοκλήρωσης $\mathcal{C}^{(1)}$ που χρησιμοποιείται. Αυτό σημαίνει ότι καθορίζοντας ένα δεύτερο μονοπάτι ολοκλήρωσης $\mathcal{C}^{(2)}$ που ξεκινά από το σημείο r_1 και καταλήγει στο ίδιο τελικό σημείο r_a με το προηγούμενο μονοπάτι $\mathcal{C}^{(1)}$ και ολοκληρώνοντας κατά μήκος πάνω σ' αυτό το δεύτερο μονοπάτι, βρίσκουμε την ίδια τιμή $f(r_a)$ όπως προηγουμένως· τελικά, οι δύο αριθμητικές τιμές μπορεί να αποκλίνουν μεταξύ τους κατά ένα ποσό μικρότερο από το όριο σφάλματος της συγκεκριμένης αριθμητικής μεθόδου που χρησιμοποιούμε.

Από φυσικής άποψης, όταν θεωρήσουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f , ως μια ορθογώνια περιοχή με την βάση $[\Delta_1, 2R_{\text{exp}}]$ πάνω στον πραγματικό άξονα και το ύψος $[\delta_1 - \epsilon_1, \delta_1]$ (με $0 < \epsilon_1 < \delta_1$) πάνω στον φανταστικό άξονα, τότε το πραγματικό μέρος αυτής της συνάρτησης, $f_{(\text{re})} = \text{Re}(f)$, ερμηνεύεται ως η φυσική ποσότητα που αντιπροσωπεύεται από την f . Για παράδειγμα, $\rho_{(\text{re})} = \text{Re}(\rho)$ είναι η πυκνότητα της μάζας ηρεμίας που αντιπροσωπεύεται από την ρ . Σε περίπτωση μελέτης της συμπεριφοράς της f σε μεγάλη απόσταση, η βάση επεκτείνεται αρκετά προς τα δεξιά (μέχρι μερικές τάξεις μεγέθους της R_{exp} , φερ' ειπείν $10^3 R_{\text{exp}}$).

Λαμβάνοντας υπόψη την φυσική σημασία της συνάρτησης f , η αντίστοιχη αρχική συνθήκη $f(r_1)$ παίρνει ως πραγματικό μέρος την φυσικά καθορισμένη αρχική συνθήκη $f_{(\text{re})1} = f_{(\text{re})c}$. Αν αυτό το αρχικό πραγματικό μέρος είναι μη μηδενικό, τότε ένα αντίστοιχο μικρό φανταστικό μέρος $f_{(\text{im})1} \ll f_{(\text{re})c}$ μπορεί να αποδοθεί στην $f(r_1)$, όπως αναφέραμε προηγουμένως στην περίπτωση της πυκνότητας μάζας ηρεμίας (Εξ. (2.10)). Από την άλλη, αν η φυσική σημασία της f απαιτεί ένα αρχικό πραγματικό μέρος ίσο με το μηδέν, τότε το αντίστοιχο φανταστικό μέρος μπορεί να τεθεί ίσο με το μηδέν χωρίς απώλεια της γενικότητας, όπως αναφέραμε προηγουμένως στην περίπτωση της μάζας-ενέργειας (Εξ. (2.11)).

Κεφάλαιο 3

Υπολογισμοί

3.1 Υπολογισμοί μέχρι τις διορθώσεις τρίτης τάξης

3.1.1 Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης σύμφωνα με την μέθοδο διαταραχής του Hartle

Ο κύριος στόχος της παρούσας έρευνας είναι να λυθεί αριθμητικά στο μιγαδικό επίπεδο, το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, που προκύπτει στα πλαίσια της μεθόδου διαταραχής του *Hartle*, η οποία διαπραγματεύεται σχετικιστικά πολυτροπικά μοντέλα αστέρων νετρονίων με ταχείαν ομοιόμορφη περιστροφή. Λεπτομερώς, αυτό το σύστημα αποτελείται από τις ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις:

01. Η OV εξίσωση υδροστατικής ισορροπίας (Εξ. 2.1), που είναι μια πρώτης τάξης διαφορική εξίσωση ως προς την πυκνότητα μάζας ηρεμίας ρ και ικανοποιεί την αρχική συνθήκη (2.10).

02. Η OV εξίσωση μάζας-ενέργειας (Εξ. 2.2), που είναι και αυτή μια πρώτης τάξης διαφορική εξίσωση ως προς την μάζα-ενέργεια m , υπό τον όρο της αρχικής συνθήκης (2.11).

03. Η πρώτης τάξης διαφορική εξίσωση (Εξ. 1.20), που αφορά το βαρυτικό δυναμικό Φ και υπακούει στην συνοριακή συνθήκη στην επιφάνεια του αστέρα, που γράφεται με την μορφή

$$\Phi_{\mathcal{R}} = \Phi(\mathcal{R}) = \frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{2\mathcal{M}}{\mathcal{R}}\right). \quad (3.1)$$

Η διαφορική εξίσωση για το βαρυτικό δυναμικό (1.20), λύνεται αρχίζοντας την αριθμητική ολοκλήρωση από το σημείο r_1 , με μια αυθαίρετη αρχική συνθήκη $\Phi(r_1) = \Phi_1^{\text{arb}} = \Phi_{(\text{re})1}^{\text{arb}}$, που βρίσκεται συνήθως στο διάστημα $[-10^0, -10^{-2}]$. Στην παρούσα ερευνητική μας προσπάθεια, χρησιμοποιούμε την τιμή $\Phi_{(\text{re})1}^{\text{arb}} = -0.5$. Κατ' αυτόν τον τρόπο βρίσκουμε μία αυθαίρετη λύση για το βαρυτικό δυναμικό, Φ^{arb} , που δεν είναι συνεπής με την συνοριακή συνθήκη (3.1). Παρ' όλα αυτά, επειδή η Εξ. (1.20) είναι γραμμική ως προς το Φ , μπορούμε να προσθέσουμε την ποσότητα $[\Phi_{\mathcal{R}} - \Phi^{\text{arb}}(\mathcal{R})]$ σ' αυτή την αυθαίρετη λύση και έτσι να πάρουμε μία συνεπή λύση

$$\Phi = \Phi^{\text{arb}} + [\Phi_{\mathcal{R}} - \Phi^{\text{arb}}(\mathcal{R})]. \quad (3.2)$$

04–05. Η δεύτερης τάξης διαφορική εξίσωση συρμού του αδρανειακού συστήματος Εξ.(1.24), είδαμε (§ 1.4) ότι μετασχηματίζεται σε ένα σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης ως προς την γωνιακή ταχύτητα, $\bar{\omega}$, σε σχέση με ένα τοπικό αδρανειακό σύστημα, (Εξς. (1.25), (1.26)). Αυτές οι εξισώσεις υπακούουν στις αρχικές συνθήκες $\bar{\omega}(r_1) = \bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_{(\text{re})1}^{\text{arb}} = 1.82342 \text{ s}^{-1}$ (όπως στην [27], §V) και $\eta(r_1) = \eta_1^{\text{arb}} = 0$. Γενικά, η ποσότητα $\bar{\omega}_{(\text{re})1}^{\text{arb}}$, βρίσκεται στο διάστημα $[10^0 \text{ s}^{-1}, 10^4 \text{ s}^{-1}]$. Αυτή η αυθαίρετη λύση, $\bar{\omega}^{\text{arb}}$, παράγει μια αυθαίρετη γωνιακή ταχύτητα, Ω^{arb} , σύμφωνα με την σχέση Εξ.(1.32)

$$\Omega^{\text{arb}} = \bar{\omega}^{\text{arb}}(\mathcal{R}) + \frac{\mathcal{R}}{3} \left(\frac{d\bar{\omega}^{\text{arb}}}{dr} \right) \Big|_{r=\mathcal{R}} = \bar{\omega}^{\text{arb}}(\mathcal{R}) + \frac{\mathcal{R}}{3} \eta^{\text{arb}}(\mathcal{R}). \quad (3.3)$$

Με την προϋπόθεση ότι θέλουμε να πάρουμε μία συγκεκριμένη γωνιακή ταχύτητα, Ω , πολλαπλασιάζουμε την Εξ. (3.3), με τον λόγο $\Omega/\Omega^{\text{arb}}$ και με αυτόν τον τρόπο παίρνουμε την επανακανονικοποιημένη συνεπή λύση

$$\bar{\omega} = \left(\frac{\Omega}{\Omega^{\text{arb}}} \right) \bar{\omega}^{\text{arb}}, \quad \eta = \left(\frac{\Omega}{\Omega^{\text{arb}}} \right) \eta^{\text{arb}}. \quad (3.4)$$

Τέλος, υπολογίζουμε την "μιγαδική στροφορμή", \mathcal{J} , (βλέπε σχέση (1.31))

$$\mathcal{J} = \frac{1}{6} (r^4 j \eta) \Big|_{r=R}, \quad (3.5)$$

και το πραγματικό του μέρος, $J = \text{Re}(\mathcal{J})$, είναι η στροφορμή του αστέρα.

06–07. Οι δύο πρώτης τάξης διαφορικές εξισώσεις, (1.46) και (1.47), για την συνάρτηση διαταραχής στην μάζα, m_0 και την συνάρτηση διαταραχής στην πίεση, p_0 αντίστοιχα, που περιγράφουν την σφαιρική παραμόρφωση

του αστέρα. Οι αρχικές συνθήκες ([13], Εξς.(29)–(30)), στις οποίες υπακούουν είναι

$$m_0(r_1) = 0, \quad p_0(r_1) = 0. \quad (3.6)$$

08–09. Οι πρώτης τάξης διαφορικές εξισώσεις, (1.55) και (1.56), για τις συναρτήσεις v_2 και h_2 , αντίστοιχα, που περιγράφουν την τετραπολική παραμόρφωση του αστέρα ([2], Εξς.(21a, b)), ([15], Εξς.(50)–(51)). Η λύση των Εξν. (1.55), (1.56) πρέπει να είναι ομαλή στην αρχή των αξόνων ([2], Εξς.(128)–(129)), ([15], Εξ.(52)· εδώ τα σύμβολα K_1 και K_2 , χρησιμοποιούνται αντί των \mathcal{K}_1 και \mathcal{K}_2 , αντίστοιχα), αυτό σημαίνει ότι στην γειονιά του μηδενός (κέντρο του αστέρα), η λύση πρέπει να έχει την μορφή

$$h_2(r_1) = K_1 r_1^2, \quad v_2(r_1) = K_2 r_1^4, \quad (3.7)$$

όπου K_1 και K_2 είναι σταθερές, που συνδέονται μεταξύ τους με την σχέση ([1], Εξ.(130)· ο παράγοντας 4π θα πρέπει να αντικατασταθεί από το 2π ,) ([15], Εξ.(136))

$$K_2 = -\frac{2\pi}{3} (E_c + 3P_c) K_1 - \frac{2\pi}{3} (E_c + P_c) (j_c \bar{\omega}_c)^2. \quad (3.8)$$

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, για λόγους απλότητας, θέτουμε την σταθερά, K_1 , ίση με την μονάδα. Ακολουθώντας, λύνουμε το σύστημα (1.55)–(1.56), με αρχικές συνθήκες (3.7) και έτσι βρίσκουμε μια μερική λύση (h_2^P, v_2^P) .

Η γενική λύση του συστήματος, είναι ένας γραμμικός συνδυασμός της μερικής λύσης (h_2^P, v_2^P) , που έχουμε βρει παραπάνω και μιας ομογενούς λύσης (h_2^H, v_2^H) ,

$$h_2 = \mathcal{K}' h_2^H + h_2^P, \quad v_2 = \mathcal{K}' v_2^H + v_2^P \quad (3.9)$$

όπου \mathcal{K}' είναι μια σταθερά. Ο εκθέτης, “H”, δηλώνει την ομογενή λύση, ενώ ο εκθέτης, “P”, δηλώνει την μερική λύση.

10–11. Το σύστημα των ομογενών διαφορικών εξισώσεων των αντίστοιχων με τις Εξς. (1.55)–(1.56), ([1], Εξς.(142)–(143)), ([15], Εξς.(132)–(133))

$$\frac{dh_2^H}{dr} = \left[\frac{-2m + 4\pi r^3(E + P)}{r^2(r - 2m)} \frac{d\Phi}{dr} - 2 \frac{d\Phi}{dr} \right] h_2^H - \frac{2}{r(r - 2m)} \frac{d\Phi}{dr} v_2^H, \quad (3.10)$$

$$\frac{dv_2^H}{dr} = -2 \frac{d\Phi}{dr} h_2^H, \quad (3.11)$$

όπου οι ποσότητες με εκθέτη, "H", αφορούν τις ομογενείς διαφορικές εξισώσεις. Αυτές οι εξισώσεις πρέπει να είναι ομαλές στην αρχή των αξόνων ([1], Εξς.(128)-(129)), ([15], Εξ.(134))· εδώ χρησιμοποιούμε τα σύμβολα K_1^H και K_2^H στην θέση των \mathcal{K}_1^H και \mathcal{K}_2^H , αντίστοιχα),

$$h_2^H(r_1) = K_1^H r_1^2, \quad v_2^H(r_1) = K_2^H r_1^4, \quad (3.12)$$

όπου K_1^H και K_2^H είναι σταθερές που συνδέονται μεταξύ τους με την σχέση ([1], Εξ.(144)), ([15], Εξ.(135))

$$K_2^H = -\frac{2\pi}{3}(E_c + 3P_c)K_1^H, \quad (3.13)$$

όπου για λόγους απλότητας θέτουμε την σταθερά, K_1^H , ίση με την μονάδα.

Έξω από τον αστέρα, οι συναρτήσεις h_2 και v_2 , υπακούουν στους αναλυτικούς τύπους ([1], Εξς.(139)-(140)), ([15], Εξς.(139)-(140))

$$h_2^{\text{ext}} = \mathcal{J}^2 \left(\frac{1}{\mathcal{M} r^3} + \frac{1}{r^4} \right) + \mathcal{K} Q_2^2(x), \quad (3.14)$$

$$v_2^{\text{ext}} = -\frac{\mathcal{J}^2}{r^4} + \mathcal{K} \left[\frac{2\mathcal{M} Q_2^1(x)}{\{r(r-2\mathcal{M})\}^{1/2}} \right], \quad (3.15)$$

όπου \mathcal{K} είναι μια σταθερά και $Q_2^m(x)$ είναι τα δευτέρου είδους συσχετισμένα πολυώνυμα Legendre (βλέπε για παράδειγμα [15], Εξς.(141)-(142))

$$Q_2^1(x) = (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{3x^2 - 2}{x^2 - 1} - \frac{3}{2}x \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \right], \quad (3.16)$$

$$Q_2^2(x) = \frac{3}{2}(x^2 - 1) \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) - \frac{3x^3 - 5x}{x^2 - 1}, \quad (3.17)$$

όπου η μεταβλητή, x , ορίζεται ως

$$x = \frac{r}{\mathcal{M}} - 1. \quad (3.18)$$

Συνδυάζοντας τις εσωτερικές λύσεις (3.9) και τις εξωτερικές λύσεις (3.14)-(3.15) στο όριο, $r = \mathcal{R}$, καταλήγουμε σ' ένα γραμμικό σύστημα δύο αλγεβρικών εξισώσεων,

$$\mathcal{K}' h_2^H(\mathcal{R}) - \mathcal{K} Q_2^2(x_{\mathcal{R}}) = -h_2^P(\mathcal{R}) + \mathcal{J}^2 \left(\frac{1}{\mathcal{M} \mathcal{R}^3} + \frac{1}{\mathcal{R}^4} \right), \quad (3.19)$$

$$\mathcal{K}' v_2^H(\mathcal{R}) - \mathcal{K} \left[\frac{2\mathcal{M} Q_2^1(x_{\mathcal{R}})}{\{\mathcal{R}(\mathcal{R} - 2\mathcal{M})\}^{1/2}} \right] = -v_2^P(\mathcal{R}) - \frac{\mathcal{J}^2}{\mathcal{R}^4}, \quad (3.20)$$

(με $x_{\mathcal{R}} = [(\mathcal{R}/\mathcal{M}) - 1]$), με δύο άγνωστες σταθερές \mathcal{K}' και \mathcal{K} , οι οποίες προκύπτουν τελικά, ως ρίζες αυτού του γραμμικού συστήματος: η συγκεκριμένη αυτή τιμή της \mathcal{K}' , θα συμβολιστεί παρακάτω με το $\widetilde{\mathcal{K}'}$. Συνεπώς, η "μιγαδική τετραπολική ροπή", \mathcal{Q} , δίνεται από την σχέση ([2], Εξ.(26)), ([15], Εξ.(55))

$$\mathcal{Q} = \frac{8\mathcal{K}\mathcal{M}^3}{5} + \frac{\mathcal{J}^2}{\mathcal{M}} \quad (3.21)$$

και το πραγματικό της μέρος, $Q = \text{Re}(\mathcal{Q})$, είναι η τετραπολική ροπή του αστέρα.

Καθώς η αριθμητική μέθοδος προωθεί την λύση του συστήματος των πρώτης τάξης διαφορικών εξισώσεων (2.1), (2.2), (1.20), (1.25), (1.26), (1.46), (1.47), (1.56), (1.55), (3.10) και (3.11) σε διαδοχικά σημεία που βρίσκονται κατά μήκος πάνω στο μονοπάτι που επιλέξαμε \mathcal{C} , (Εξ. (2.7)), τα αριθμητικά αποτελέσματα αυτής της μεθόδου, χρησιμοποιούνται για να επεκτείνουμε τον Πίνακα, $\mathcal{T}_{\text{SOL}}^{(\delta_1)}$ (Εξ. (1.17)), με τις συναρτήσεις

$$\mathcal{T}_{\text{SOL}}^{(\delta_1)} = \left[\left\{ \bar{r}_i, \dots, \Phi_{(\text{re})i}, \Phi_{(\text{im})i}, \bar{\omega}_{(\text{re})i}, \bar{\omega}_{(\text{im})i}, \eta_{(\text{re})i}, \eta_{(\text{im})i}, \right. \right. \\ \left. \left. m_{0(\text{re})i}, m_{0(\text{im})i}, p_{0(\text{re})i}, p_{0(\text{im})i}, \right. \right. \\ \left. \left. h_{2(\text{re})i}, h_{2(\text{im})i}, v_{2(\text{re})i}, v_{2(\text{im})i}, \right. \right. \\ \left. \left. h_{2(\text{re})i}^{\text{H}}, h_{2(\text{im})i}^{\text{H}}, v_{2(\text{re})i}^{\text{H}}, v_{2(\text{im})i}^{\text{H}} \right\}, \left\{ i, 1, \mathcal{N}_{\text{SOL}}^{(\delta_1)} \right\} \right] \quad (3.22)$$

Ακολουθώντας, χρησιμοποιώντας συνήθεις αριθμητικές μεθόδους, κάνουμε παρεμβολή, στον αναπτυγμένο Πίνακα, $\mathcal{T}_{\text{SOL}}^{(\delta_1)}$, τις πραγματικές μεταβλητές $\Phi_{(\text{re})}$, $\Phi_{(\text{im})}$, $\bar{\omega}_{(\text{re})}$, $\bar{\omega}_{(\text{im})}$, $\eta_{(\text{re})}$, $\eta_{(\text{im})}$, $m_{0(\text{re})}$, $m_{0(\text{im})}$, $p_{0(\text{re})}$, $p_{0(\text{im})}$, $h_{2(\text{re})}$, $h_{2(\text{im})}$, $v_{2(\text{re})}$, $v_{2(\text{im})}$, $h_{2(\text{re})}^{\text{H}}$, $h_{2(\text{im})}^{\text{H}}$, $v_{2(\text{re})}^{\text{H}}$, $v_{2(\text{im})}^{\text{H}}$, σε όρους της πραγματικής μεταβλητής \bar{r} . Κατ' αυτόν τον τρόπο, κατασκευάζουμε από την αριθμητική παρεμβολή μια εκτεταμένη οικογένεια πραγματικών συναρτήσεων, μιας πραγματικής μεταβλητής, όπου μπορεί να χρησιμοποιηθεί στον χώρο των αρχικών μιγαδικών συναρτήσεων μιας μιγαδικής μεταβλητής, για διάφορους σκοπούς.

3.1.2 Υπολογισμός συνόρου της περιστρεφόμενης δομής

Σύμφωνα με την μέθοδο διαταραχής του *Hartle*, για τον μη περιστρεφόμενο αστέρα, μια ισόπυκνη επιφάνεια $E = E_a$ ακτίνας r_a , μετατοπίζεται λόγω της περιστροφής, σε μια ακτίνα, r , που εκφράζεται από το διαταρακτικό σχήμα ([2], Εξ.(24a)), ([15], Εξ.(30))

$$r(r_a, \mu) = r_a + \xi(r_a, \mu) = r_a + \xi_0(r_a) + \xi_2(r_a) P_2(\mu) + \mathcal{O}(\Omega^4), \quad (3.23)$$

όπου $\mu = \cos(\theta)$. Οι συναρτήσεις, ξ_0 και ξ_2 έχουν οριστεί από τις σχέσεις (1.40), (1.41).

Η συνάρτηση διαταραχής της πίεσης, p_0 , είναι αυτή που εμπεριέχεται στην Εξ. (1.47). Αντίστοιχα, η συνάρτηση διαταραχής της πίεσης, p_2 , ορίζεται από το αντίστοιχο τετραπολικό μέρος της εξίσωσης υδροστατικής ισορροπίας για $l = 2$ ([2], Εξς.(23b)), ([15], Εξ.(36))

$$p_2 = -h_2 - \frac{1}{3} r^2 e^{-2\Phi} \bar{\omega}^2. \quad (3.24)$$

Η λύση της Εξ. (3.23), στο σύνορο του αστέρα, δηλαδή πάνω στην επιφάνεια μηδενικής πυκνότητας ($E_{(\text{re})a} = 0$, $r_a = \mathcal{R}$, $\bar{r}_a = R$), μας βοηθά να βρούμε την "μιγαδική ισημερινή ακτίνα", r_e και την "μιγαδική πολική ακτίνα", r_p ,

$$r_e = \mathcal{R} + \xi(\mathcal{R}, \mu_e) = \mathcal{R} + \xi_0(\mathcal{R}) + \xi_2(\mathcal{R}) P_2(\mu_e), \quad (3.25)$$

$$r_p = \mathcal{R} + \xi(\mathcal{R}, \mu_p) = \mathcal{R} + \xi_0(\mathcal{R}) + \xi_2(\mathcal{R}) P_2(\mu_p), \quad (3.26)$$

όπου

$$\mu_e = 0, \quad \mu_p = 1. \quad (3.27)$$

Συνεπώς, τα αντίστοιχα πραγματικά μέρη

$$\bar{r}_e \equiv r_{(\text{re})e} = \text{Re}(r_e), \quad \bar{r}_p \equiv r_{(\text{re})p} = \text{Re}(r_p), \quad (3.28)$$

είναι η ισημερινή και η πολική ακτίνα του αστέρα, αντίστοιχα.

Μια αναλλοίωτη παραμετροποίηση μιας επιφάνειας σταθερής πυκνότητας, μπορεί να επιτευχθεί με την ενσωμάτωση αυτής της επιφάνειας σε ένα τρισδιάστατο επίπεδο χώρο, που περιγράφεται από τις σφαιρικές συντεταγμένες \hat{r} , $\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$ όπου χωρίς να χάσουμε την γενικότητα, μπορούμε να επιλέξουμε τις συντεταγμένες $\hat{\theta} = \theta$ και $\hat{\phi} = \phi$. Η ενσωματωμένη επιφάνεια πρέπει να έχει εσωτερική γεωμετρία την ίδια με αυτήν της αρχικής (για μια λεπτομερή συζήτηση σχετικά με αυτό το θέμα, βλ. [25], § 5.3.1, ιδιαίτερα Εξς.(36)–(42)). Κατά συνέπεια, με μια ακρίβεια της τάξης Ω^2 , η επιφάνεια στον τρισδιάστατο επίπεδο χώρο, υπακούει στην σφαιροειδή μορφή ([2], Εξ.(25a))

$$\hat{r}(\mu) = r_a + \xi_0(r_a) + \{\xi_2(r_a) + r_a [v_2(r_a) - h_2(r_a)]\} P_2(\mu). \quad (3.29)$$

Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε για το όριο του αστέρα

$$\hat{r}_e = \mathcal{R} + \xi_0(\mathcal{R}) + \{\xi_2(\mathcal{R}) + \mathcal{R} [v_2(\mathcal{R}) - h_2(\mathcal{R})]\} P_2(\mu_e), \quad (3.30)$$

$$\hat{r}_p = \mathcal{R} + \xi_0(\mathcal{R}) + \{\xi_2(\mathcal{R}) + \mathcal{R} [v_2(\mathcal{R}) - h_2(\mathcal{R})]\} P_2(\mu_p). \quad (3.31)$$

Άρα, τα αντίστοιχα πραγματικά μέρη

$$R_e \equiv \hat{r}_{(re)e} = \text{Re}(\hat{r}_e), \quad R_p \equiv \hat{r}_{(re)p} = \text{Re}(\hat{r}_p) \quad (3.32)$$

είναι η ισημερινή και η πολική ακτίνα του αστέρα, αντίστοιχα, όπως μπορούν να μετρηθούν στον τρισδιάστατο επίπεδο χώρο.

Στην βιβλιογραφία, συνήθως οι ακτίνες που υπολογίζονται και που παρουσιάζονται στους πίνακες, είναι οι ακόλουθες : (i) Η ακτίνα, R , του μη περιστρεφόμενου αστέρα (Εξ. (2.17)), (ii)–(iii) η ισημερινή και η πολική ακτίνα \bar{r}_e και \bar{r}_p , αντίστοιχα (Εξ. (3.28)) και (iv)–(v) η ισημερινή και η πολική ακτίνα R_e και R_p , όπως μετριέται στον τρισδιάστατο επίπεδο χώρο (Εξ. (3.32)), που συνήθως καλούνται ισημερινή περιφερειακή ακτίνα (equatorial circumferencial radius) και πολική περιφερειακή ακτίνα (polar circumferencial radius), αντίστοιχα (όπως στην [25], § 5.3.1, όπου η R_e συμβολίζεται με R_{circ} · ενώ οι ακτίνες \bar{r}_e και \bar{r}_p , συμβολίζονται με r_e και r_p αντίστοιχα και καλούνται ισημερινή συντεταγμένη ακτίνα (equatorial coordinate radius) και πολική συντεταγμένη ακτίνα (polar coordinate radius), αντίστοιχα).

Οι συναρτήσεις, p_0 και p_2 (αμφότερες τάξης Ω^2), περιγράφουν την μεταβολή στην πίεση του στοιχειώδους μετατοπισμένου τμήματος του ρευστού κατά την περιστροφή, δP · ως προς ένα σύστημα αναφοράς, που κινείται μαζί με το στοιχειώδες τμήμα ύλης του αστέρα. Η μεταβολή στην πίεση δίνεται από την σχέση ([2], Εξ.(7a)), ([15], Εξ.(33))

$$\delta P(r, \mu) = [E(r) + P(r)] [p_0(r) + p_2(r) P_2(\mu)]. \quad (3.33)$$

Η αντίστοιχη μεταβολή στην πυκνότητα μάζας-ενέργειας του στοιχειώδους μετατοπισμένου τμήματος του ρευστού κατά την περιστροφή, δE , δίνεται από την σχέση ([2], Εξ.(7b)), ([15], Εξ.(34))

$$\begin{aligned} \delta E(r, \mu) &= \left[\frac{\delta E(r, \mu)}{\delta P(r, \mu)} \right] \times \delta P(r, \mu) \simeq \left(\frac{dE}{dP} \right) \times \delta P(r, \mu) \\ &= \left(\frac{dE}{dP} \right) [E(r) + P(r)] [p_0(r) + p_2(r) P_2(\mu)]. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Σ' αυτήν την σχέση, η ποσότητα $[\delta E(r, \mu) / \delta P(r, \mu)]$, που είναι μια συνάρτηση δύο ανεξάρτητων μεταβλητών r και μ , προσεγγίζεται από την ποσότητα (dE/dP) , που είναι μια συνάρτηση μιας απλής ανεξάρτητης μεταβλητής r (όπως στην Εξ. (1.4)). Η "ολική πίεση", P^{tot} και η "ολική πυκνότητα μάζας-ενέργειας", E^{tot} , δίνονται τελικά από τις σχέσεις

$$P^{\text{tot}}(r, \mu) = P(r) + \delta P(r, \mu), \quad E^{\text{tot}}(r, \mu) = E(r) + \delta E(r, \mu). \quad (3.35)$$

Όταν απαιτείται να επιλυθεί μια συνάρτηση f που δεν εμπεριέχεται στον ανεπτυγμένο Πίνακα $\mathcal{T}_{\text{SOL}}^{(\delta_1)}$ (Εξ. (3.22)), προχωράμε με συστηματικό τρόπο, να μετασχηματίσουμε την συναρτησιακή μορφή της f , χρησιμοποιώντας συναρτήσεις που προκύπτουν από παρεμβολή, που εμπεριέχονται στον $\mathcal{T}_{\text{SOL}}^{(\delta_1)}$, όπως με την περίπτωση της πίεσης, P (Εξ. (2.14)-(2.15)). Για παράδειγμα, για να επιλύσουμε την συνάρτηση P^{tot} , γράφουμε

$$P^{\text{tot}}(\bar{r}, \mu) = P_{(\text{re})}^{\text{tot}}(\bar{r}, \mu) + i P_{(\text{im})}^{\text{tot}}(\bar{r}, \mu), \quad (3.36)$$

$$P_{(\text{re})}^{\text{tot}}(\bar{r}, \mu) = \text{Re}[P(\bar{r}) + \delta P(\bar{r}, \mu)] = \text{Re}[P(\bar{r})] + \text{Re}[\delta P(\bar{r}, \mu)], \quad (3.37)$$

$$P_{(\text{im})}^{\text{tot}}(\bar{r}, \mu) = \text{Im}[P(\bar{r}) + \delta P(\bar{r}, \mu)] = \text{Im}[P(\bar{r})] + \text{Im}[\delta P(\bar{r}, \mu)], \quad (3.38)$$

$$\text{Re}[\delta P(\bar{r}, \mu)] = \text{Re}\left[[E(\bar{r}) + P(\bar{r})][p_0(\bar{r}) + p_2(\bar{r})P_2(\mu)]\right], \quad (3.39)$$

$$\text{Im}[\delta P(\bar{r}, \mu)] = \text{Im}\left[[E(\bar{r}) + P(\bar{r})][p_0(\bar{r}) + p_2(\bar{r})P_2(\mu)]\right], \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} E(\bar{r}) &= \text{Re}[\rho(\bar{r}) + nP(\bar{r})] + i \text{Im}[\rho(\bar{r}) + nP(\bar{r})] \\ &= \text{Re}[\rho(\bar{r})] + n \text{Re}[P(\bar{r})] + i \text{Im}[\rho(\bar{r})] + i n \text{Im}[P(\bar{r})], \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$p_2(\bar{r}) = p_{2(\text{re})}(\bar{r}) + i p_{2(\text{im})}(\bar{r}), \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} p_{2(\text{re})}(\bar{r}) &= - \text{Re}\left[\mathcal{K}' h_2^{\text{H}}(\bar{r}) + h_2^{\text{P}}(\bar{r}) + \frac{1}{3}(\bar{r} + i\delta_1)^2\right. \\ &\quad \left. \times \exp[-2\{\Phi_{(\text{re})}(\bar{r}) + i\Phi_{(\text{im})}(\bar{r})\}] [\bar{\omega}_{(\text{re})}(\bar{r}) + i\bar{\omega}_{(\text{im})}(\bar{r})]^2\right], \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} p_{2(\text{im})}(\bar{r}) &= - \text{Im}\left[\mathcal{K}' h_2^{\text{H}}(\bar{r}) + h_2^{\text{P}}(\bar{r}) + \frac{1}{3}(\bar{r} + i\delta_1)^2\right. \\ &\quad \left. \times \exp[-2\{\Phi_{(\text{re})}(\bar{r}) + i\Phi_{(\text{im})}(\bar{r})\}] [\bar{\omega}_{(\text{re})}(\bar{r}) + i\bar{\omega}_{(\text{im})}(\bar{r})]^2\right], \end{aligned} \quad (3.44)$$

και κατ' αυτόν τον τρόπο, καταλήγουμε σε μια νέα συναρτησιακή μορφή της f , που αποτελείται αποκλειστικά από συναρτήσεις παρεμβολής του Πίνακα $\mathcal{T}_{\text{SOL}}^{(\delta_1)}$ (Εξ. (3.22)).

3.1.3 Ένας αλγόριθμος για την λεπτή ρύθμιση του \mathcal{K}'

Είναι προφανές, ότι η Εξ. (3.35) μπορεί να εφαρμοστεί για άμεσους υπολογισμούς των χαρακτηριστικών ακτίνων που αναφέρθηκαν παραπάνω, υπό την έννοια ότι οι ποσότητες $P_{(re)}^{tot}$ και $E_{(re)}^{tot}$, πρέπει να μηδενίζονται στο σύνορο του αστέρα. Χαρακτηριστικά, πρέπει να ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις

$$P_{(re)}^{tot}(\bar{r}_p, \mu_p) = 0, \quad (3.45)$$

$$E_{(re)}^{tot}(\bar{r}_p, \mu_p) = 0, \quad (3.46)$$

$$P_{(re)}^{tot}(\bar{r}_e, \mu_e) = 0, \quad (3.47)$$

$$E_{(re)}^{tot}(\bar{r}_e, \mu_e) = 0. \quad (3.48)$$

Αυτό σημαίνει στην συνέχεια, ότι οι σαφείς τύποι διαταραχής (3.25)–(3.28), από την μία πλευρά και οι σχέσεις (3.45)–(3.48), από την άλλη πλευρά, πρέπει να δίνουν συμβατά αριθμητικά αποτελέσματα. Για να πετύχουμε τον σκοπό αυτό, του συνδυασμού δηλαδή τέτοιων αποτελεσμάτων με μια αξιόλογη ακρίβεια, προτείνουμε να μεταχειριστούμε την ποσότητα \mathcal{K}' (Εξς. (3.9), (3.19)–(3.20)), σαν μια ελεύθερη παράμετρο που την αποδεχόμαστε ως μια “λεπτή ρύθμιση”, βάσει του αιτήματος ότι και τα δύο σύνολα των συνθηκών πρέπει να ικανοποιούνται.

Η βασική ιδέα, είναι ότι μπορούμε να διακρίνουμε ορισμένες τιμές της ποσότητας \mathcal{K}' , που προκύπτουν ως ρίζες κατάλληλων αλγεβρικών εξισώσεων. Χαρακτηριστικά, η πολική ακτίνα, \bar{r}_p , μπορούμε να την θεωρήσουμε ως μια συνάρτηση της \mathcal{K}' , σύμφωνα με τις Εξς. (1.41), (3.24), (3.26), (3.28β), (3.42)–(3.44): ως εκ τούτου, μπορούμε να γράψουμε αυτή την συνάρτηση στην πιο γενική μορφή $\bar{r}_p = \bar{r}_p(\mathcal{K}')$. Η ίδια ιδέα εφαρμόζεται για την $P_{(re)}^{tot}(\bar{r}_p, \mu_p)$, υπό την έννοια ότι η ποσότητα \mathcal{K}' , περιλαμβάνεται στις Εξς. (3.42)–(3.44). Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε την συνάρτηση αυτή σε μια πιο γενική μορφή $P_{(re)}^{tot} = P_{(re)}^{tot}(\bar{r}_p, \mu_p, \mathcal{K}')$. Ακολούθως, ορίζουμε ως $\mathcal{K}'_{(P,p)}$, την χαρακτηριστική τιμή της \mathcal{K}' , που επιτυγχάνεται με τον συνδυασμό της $\bar{r}_p(\mathcal{K}')$ των Εξν. (3.26)–(3.28β) με την ρίζα \bar{r}_p της αλγεβρικής εξίσωσης $P_{(re)}^{tot}(\bar{r}_p, \mu_p, \mathcal{K}') = 0$. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, η ποσότητα $\mathcal{K}'_{(P,p)}$, υπολογίζεται από την σχέση

$$\mathcal{K}'_{(P,p)} = \text{root} \left[\left(\bar{r}_p(\mathcal{K}') - \text{root} [P_{(re)}^{tot}(\bar{r}, \mu_p, \mathcal{K}') = 0, \bar{r}] \right) = 0, \mathcal{K}' \right], \quad (3.49)$$

όπου η λέξη “root”, εκφράζει την ρίζα της εξίσωσης. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας μια παρόμοια διαδικασία, μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε τις τιμές

$$\mathcal{K}'_{(E,p)} = \text{root} \left[\left(\bar{r}_p(\mathcal{K}') - \text{root} [E_{(re)}^{tot}(\bar{r}, \mu_p, \mathcal{K}') = 0, \bar{r}] \right) = 0, \mathcal{K}' \right], \quad (3.50)$$

$$\mathcal{K}'_{(P,e)} = \text{root} \left[\left(\bar{r}_e (\mathcal{K}') - \text{root} [P_{(re)}^{\text{tot}} (\bar{r}, \mu_e, \mathcal{K}') = 0, \bar{r}] \right) = 0, \mathcal{K}' \right], \quad (3.51)$$

$$\mathcal{K}'_{(E,e)} = \text{root} \left[\left(\bar{r}_e (\mathcal{K}') - \text{root} [E_{(re)}^{\text{tot}} (\bar{r}, \mu_e, \mathcal{K}') = 0, \bar{r}] \right) = 0, \mathcal{K}' \right]. \quad (3.52)$$

Τελικά, η λεπτή ρύθμιση της \mathcal{K}' , συνίσταται στον υπολογισμό της μέσης τιμής

$$\bar{\mathcal{K}}' = \frac{\mathcal{K}'_{(P,p)} + \mathcal{K}'_{(E,p)} + \mathcal{K}'_{(P,e)} + \mathcal{K}'_{(E,e)}}{4}. \quad (3.53)$$

Τώρα, έχοντας υπολογίσει την ποσότητα $\bar{\mathcal{K}}'$, μπορούμε να προχωρήσουμε στις απαραίτητες διορθώσεις των συναρτήσεων $P_{(re)}^{\text{tot}}$ και $E_{(re)}^{\text{tot}}$. Αυτή η ανάγκη, προκύπτει εξαιτίας του γεγονότος ότι οι ποσότητες $P_{(re)}^{\text{tot}}$ και $E_{(re)}^{\text{tot}}$, μπορεί να παρουσιάζουν μια απόκλιση από την απαίτηση της σύγκλισης στο μηδέν στο σύνορο του αστέρα, αφού η τιμή της $\bar{\mathcal{K}}'$, μπορεί να είναι ελαφρώς διαφορετική για καθεμία από τις τιμές, που υπολογίζονται από τις Εξ. (3.49)–(3.52). Για την διαπραγμάτευση αυτού του προβλήματος, εισάγουμε τις διορθώσεις στην πίεση και την πυκνότητα

$$\Delta P = \Delta P_0 + \Delta P_2 P_2(\mu), \quad (3.54)$$

$$\Delta E = \Delta E_0 + \Delta E_2 P_2(\mu). \quad (3.55)$$

Κατόπιν, απαιτούμε από τις ποσότητες ΔP_0 και ΔP_2 , να ικανοποιούν το γραμμικό σύστημα των δύο αλγεβρικών εξισώσεων

$$P_{(re)}^{\text{tot}} \left(\bar{r}_p (\bar{\mathcal{K}}'), \mu_p, \bar{\mathcal{K}}' \right) + \Delta P_0 + \Delta P_2 P_2(\mu_p) = 0, \quad (3.56)$$

$$P_{(re)}^{\text{tot}} \left(\bar{r}_e (\bar{\mathcal{K}}'), \mu_e, \bar{\mathcal{K}}' \right) + \Delta P_0 + \Delta P_2 P_2(\mu_e) = 0. \quad (3.57)$$

Παρόμοια, απαιτούμε από τις ποσότητες ΔE_0 και ΔE_2 , να ικανοποιούν το γραμμικό σύστημα των δύο αλγεβρικών εξισώσεων

$$E_{(re)}^{\text{tot}} \left(\bar{r}_p (\bar{\mathcal{K}}'), \mu_p, \bar{\mathcal{K}}' \right) + \Delta E_0 + \Delta E_2 P_2(\mu_p) = 0, \quad (3.58)$$

$$E_{(re)}^{\text{tot}} \left(\bar{r}_e (\bar{\mathcal{K}}'), \mu_e, \bar{\mathcal{K}}' \right) + \Delta E_0 + \Delta E_2 P_2(\mu_e) = 0. \quad (3.59)$$

Κατά συνέπεια, οι διορθώσεις ΔP_0 , ΔP_2 και ΔE_0 , ΔE_2 , υπολογίζονται ως οι ρίζες των γραμμικών συστημάτων (3.56)–(3.57) και (3.58)–(3.59), αντίστοιχα.

Επί του θέματος, παρατηρούμε ότι μια ισόπυκνη επιφάνεια $E = E_a$ ακτίνας $r = r_a$ για τον μη περιστρεφόμενο αστέρα και η σφαιροειδής μορφή (3.23) (για την οποία η ισόπυκνη επιφάνεια μετατοπίζεται λόγω της περιστροφής), υπολογίζεται με την ήδη γνωστή τιμή \mathcal{K}' , που χαρακτηρίζεται μοναδικά από μια συγκεκριμένη τετράδα διορθώσεων $\Delta P_0, \Delta P_2, \Delta E_0, \Delta E_2$. Όπως αναλύσαμε παραπάνω, αυτή η τετράδα καθορίζει το σύνορο του αστέρα.

Γενικά, για να υπολογίσουμε τις διορθώσεις $\Delta P_0, \Delta P_2, \Delta E_0, \Delta E_2$, για μια εσωτερική ισόπυκνη επιφάνεια E_a (με $E_{(re)a} > 0$) ακτίνας r_a στον μη περιστρεφόμενο αστέρα (με $\bar{r}_a < R$), λύνουμε το γραμμικό σύστημα (3.56)–(3.57), αντικαθιστώντας: (i) τα μηδενικά δεξιά μέρη και των δύο εξισώσεων με $P_{(re)}(\bar{r}_a)$ και (ii) την πολική ακτίνα \bar{r}_p ($\bar{\mathcal{K}}'$), του συνόρου, με την πολική ακτίνα $\bar{r}_p(r_a, \bar{\mathcal{K}}')$, της χαρακτηριστικής ισόπυκνης επιφάνειας. Επιπλέον, λύνουμε το γραμμικό σύστημα (3.58)–(3.59), αντικαθιστώντας: (i) τα μηδενικά δεξιά μέρη και των δύο εξισώσεων με $E_{(re)}(\bar{r}_a)$ και (ii) την ισημερινή ακτίνα \bar{r}_e ($\bar{\mathcal{K}}'$), του συνόρου, με την ισημερινή ακτίνα $\bar{r}_e(r_a, \bar{\mathcal{K}}')$, της χαρακτηριστικής ισόπυκνης επιφάνειας. Κατόπιν, μπορούμε να καθορίσουμε την “τελική ολική πίεση”, P^{TOT} και την “τελική ολική πυκνότητα μάζας-ενέργειας”, E^{TOT} , όπως

$$P^{TOT} = P^{tot} + \Delta P, \quad E^{TOT} = E^{tot} + \Delta E, \quad (3.60)$$

αντίστοιχα, με την θεμελιώδη ιδιότητα ότι τα μηδενικά

$$P_{(re)}^{TOT} - P_{(re)}(\bar{r}_a) = 0, \quad E_{(re)}^{TOT} - E_{(re)}(\bar{r}_a) = 0, \quad (3.61)$$

εμφανίζονται σε συμβατά σημεία με εκείνα, που υπολογίζονται από το διαταρακτικό σχήμα (3.23).

3.1.4 Το λογισμικό πακέτο "ATOMFT System"

Όπως έχουμε περιγράψει στην § 3.1.1, διαπραγματευόμαστε την μέθοδο διαταραχής του *Hartle*, σαν ένα “πρόβλημα αρχικής τιμής” στο σύστημα των πρώτης τάξης διαφορικών εξισώσεων (2.1), (2.2), (1.20), (1.25), (1.26), (1.46), (1.47), (1.56), (1.55), (3.10), και (3.11): όλες οι συναρτήσεις που περιλαμβάνονται σε αυτό το σύστημα θεωρούνται ως μιγαδικές συναρτήσεις της μιγαδικής μεταβλητής r . Στην πραγματικότητα, όπως αναφέρθηκε στην § 3.1.1, αφού έχει λυθεί αριθμητικά αυτό το πρόβλημα αρχικών τιμών χρησιμοποιούμε στους επόμενους υπολογισμούς πραγματικές συναρτήσεις της πραγματικής μεταβλητής \bar{r} που εμφανίζονται στον Πίνακα $\mathcal{T}_{\text{SOL}}^{(\delta_1)}$ (Εξ. (3.22)). Για να λύσουμε το συγκεκριμένο πρόβλημα αρχικών τιμών εφαρμόζουμε το λογισμικό πακέτο *ATOMFT System*, ([35], [36]): και όλες τις αναφορές μέσα σ’ αυτό: αυτή η δημοσίευση είναι στην ουσία ένα περιεκτικό εγχειρίδιο χρήσης

του ATOMFT). Το ATOMFT, είναι αρκετά απλό ώστε να χρησιμοποιηθεί από τους σπουδαστές, αρκετά πρακτικό ώστε να χρησιμοποιηθεί από τους μηχανικούς, και αρκετά ευπροσάρμοστο ώστε να χρησιμοποιηθεί από διάφορους ερευνητές ([35], § 1.4). Ο πολύ υψηλής τάξης και ακρίβειας έλεγχος σφάλματος που χρησιμοποιείται από το ATOMFT, μας δίνει την δυνατότητα να λύνουμε προβλήματα, για τα οποία άλλες μέθοδοι αντιμετωπίζουν δυσκολίες. Το ATOMFT είναι ένα ισχυρό και ευέλικτο εργαλείο, γραμμένο σε Fortran 77, για τη γρήγορη και ακριβή λύση των συστημάτων "συνήθων διαφορικών εξισώσεων" (ODEs), που υπολογίζεται με την ανάπτυξη κάθε συνιστώσας της λύσης σε μακρές σειρές *Taylor* [36], [37], [38], [39]. Η φιλοσοφία της μεθόδου είναι ριζικά διαφορετική από αυτήν άλλων μεθόδων. Συγκεκριμένα, για μια ODE, με λύση την $f(t)$, οι όροι των σειρών για την $f(t)$ επεκτείνονται στο τρέχον σημείο της λύσης με ένα αυθαίρετο μέγεθος βήματος, h και αποθηκεύονται ως μειωμένοι παράγωγοι ([36], § 1),

$$F(n+1) := F(n) \frac{h^n}{n!} \quad (3.62)$$

που είναι οι όροι των σειρών *Taylor*. Το ATOMFT υπολογίζει τους πρώτους 30 όρους των σειρών (και αν απαιτείται, μπορεί ο χρήστης να καθορίσει μεγαλύτερο πλήθος όρων). Η κύρια διαφορά από άλλες μεθόδους είναι ότι με τις εκτεταμένες σειρές *Taylor* είναι δυνατόν να υπολογιστεί η ακτίνα σύγκλισης και ακολούθως να ρυθμιστεί το αυθαίρετο μέγεθος βήματος, h , σ' ένα βέλτιστο μέγεθος βήματος. Για τον κατάλληλο έλεγχο του τοπικού σφάλματος αποκοπής, το βέλτιστο μέγεθος βήματος καθορίζεται από (α) το μήκος των σειρών, (β) την ακτίνα σύγκλισης και (γ) το προκαθορισμένο όριο σφάλματος. Κατόπιν, οι όροι των σειρών για την $f(t)$ ρυθμίζονται από το αυθαίρετο μέγεθος βήματος, h , στο πραγματικό μέγεθος βήματος, h_{new} , με τον πολλαπλασιασμό του $F(n+1)$ με $(h_{\text{new}}/h)^n$.

Το ATOMFT υποστηρίζει λύση των ODEs, που ορίζονται στο μιγαδικό επίπεδο ([41]: λεπτομέρειες για την διαπραγμάτευση τέτοιων προβλημάτων δίνονται στην [35], § 3.2.4, 3.2.5, 3.7). Σε αυτήν την περίπτωση, ο χρήστης πρέπει να προσδιορίσει ένα μιγαδικό τμηματικά γραμμικό μονοπάτι, \mathcal{C} , με τον καθορισμό των $\mathcal{N}_{\mathcal{C}}$ κορυφών του, όπως στην Εξ. (2.21). Η πρώτη κορυφή, είναι το σημείο εκκίνησης της λύσης. Ο μέγιστος αριθμός κορυφών που μπορούμε να καθορίσουμε στο μονοπάτι της ολοκλήρωσης είναι $\mathcal{N}_{\mathcal{C}} = 40$: οι χαρακτηριστικές κορυφές τοποθετούνται στην μιγαδική σειρά POINTS και ο αριθμός αυτών των κορυφών αποθηκεύεται με την ακέραια μεταβλητή KPTS. Στην συνέχεια, η λύση ακολουθεί το μονοπάτι ολοκλήρωσης όπως έχει καθοριστεί. Για τα πολυτροπικά μοντέλα που επεξεργαζόμαστε στην παρούσα έρευνα, το μιγαδικό μονοπάτι ολοκλήρωσης είναι ορισμένο από την Εξ. (2.7)

με

$$\Delta_1 = 10^{-3} \text{ cm},$$

$$\delta_1 = 5 \times 10^{-1} \text{ cm},$$

$$r_{(\text{re})\text{max}} = 2 \times R_{\text{exp}} = 2 \times 10^6 \text{ cm} = 20 \text{ km}.$$

Το ATOMFT μεταφράζει ένα αρχείο εισόδου που προετοιμάζεται από τον χρήστη, που τυπικά καλείται ODEINP, μέσα στο οποίο γράφονται οι προς επίλυση ODEs, μαζί με τις πληροφορίες που διευκρινίζουν πώς οι αρχικές συνθήκες και το μονοπάτι ολοκλήρωσης καθορίζονται. Η διαδικασία μετάφρασης παράγει ένα πρόγραμμα Fortran, που τυπικά καλείται ATSPGM, το οποίο στην συνέχεια συντάσσεται, συνδεδεμένο με την ATOMFT runtime βιβλιοθήκη και τρέχει για να λύσει το σύστημα των ODEs. Το αρχείο ODEINP περιέχει τέσσερα μπλοκ καθένα από τα οποία τελειώνει με το "σύμβολο τερματισμού του μπλοκ", \$, που γράφεται στις στήλες 2-72. Το πρώτο μπλοκ περιέχει το σύστημα των ODEs, που πρόκειται να λυθούν, γραμμένο σε μια αρκετά απλή μορφή ([36], § 2.2). Σε περίπτωση ανάγκης από το συγκεκριμένο πρόβλημα, το δεύτερο μπλοκ περιέχει μη εκτελέσιμες δηλώσεις. Το τρίτο μπλοκ μπορεί να περιέχει τις εκτελέσιμες δηλώσεις που υπαγορεύονται από το υπό εξέταση πρόβλημα. Το τέταρτο μπλοκ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εισάγει δηλώσεις στο ATSPGM στο τέλος κάθε βήματος ολοκλήρωσης. Τα μπλοκ 2-4 δεν ελέγχονται συντακτικά από το ATOMFT· έτσι το περιεχόμενό τους μπορεί να γραφεί σε Fortran 77 ή σε μια πιο πρόσφατη έκδοση της Fortran.

Όταν το πρώτο μπλοκ του ODEINP περιέχει μιγαδική μεταβλητή υψωμένη σε διπλής ακρίβειας πραγματική δύναμη, το ATOMFT ενημερώνει τον χρήστη με την εκτύπωση ενός κατάλληλου μηνύματος, αφού οι προγενέστεροι Fortran 77 μεταγλωτιστές δεν δέχονται μια τέτοια μικτή αριθμητική πράξη (βλέπε, π.χ. [42], § 17.8). Μολονότι δεν υπάρχει τέτοιο πρόβλημα σε μεταγενέστερους Fortran 77 μεταγλωτιστές και σε όλες τις νεότερες εκδόσεις Fortran, συνεχίζουμε με μια σημαντική απλοποίηση που αφορά έναν συστηματικό μετασχηματισμό που εφαρμόζουμε στους "υψωμένους σε πραγματική δύναμη" όρους $\rho^{1/n}$ και ρ^Γ (οι οποίοι εμφανίζονται στο πρόβλημα αρχικών τιμών που επεξεργαζόμαστε, είτε ρητά είτε σιωπηρά δια μέσου των συναρτήσεων P και E), ορίζοντας την πυκνότητα μάζας ηρεμίας ρ σε όρους μιας βοηθητικής συνάρτησης \mathcal{A} , έτσι ώστε τα προηγούμενα εκθετικά να μετασχηματιστούν σε "ανυψωμένα σε ακέραιη δύναμη" όρους. Με αυτό το είδος χαλάρωσης, αποφεύγουμε την παρέμβαση των εκθετικών και λογαριθμικών συναρτήσεων (βλέπε, π.χ. [43], § 28) στην απεικόνιση των εκθετικών στις σειρές *Taylor*. Υπενθυμίζουμε ότι τέτοιο πρόβλημα δεν εμφανίζεται για $n = 1.0$. Λεπτομερώς, για πολυτροπικό δείκτη $n = 1.5$, δηλαδή, $\Gamma = 5/3$,

παίρνουμε

$$\rho = \mathcal{A}^3, \quad P = K \mathcal{A}^5, \quad \frac{dP}{d\rho} = \frac{5}{3} K \mathcal{A}^2, \quad \frac{dE}{dP} = \frac{3}{2} + \frac{3}{5 K \mathcal{A}^2}. \quad (3.63)$$

Συνεπώς, η Εξ. (2.1), παίρνει την μορφή

$$\frac{d\mathcal{A}}{dr} = - \frac{(1 + \frac{5}{2} K \mathcal{A}^2) (m + 4 K \pi r^3 \mathcal{A}^5)}{5 K r (r - 2m) \mathcal{A}}. \quad (3.64)$$

Ακολουθώντας, για τον πολυτροπικό δείκτη $n = 2.0$, δηλαδή, $\Gamma = 3/2$, παίρνουμε

$$\rho = \mathcal{A}^2, \quad P = K \mathcal{A}^3, \quad \frac{dP}{d\rho} = \frac{3}{2} K \mathcal{A}, \quad \frac{dE}{dP} = 2 + \frac{2}{3 K \mathcal{A}}. \quad (3.65)$$

Έτσι, η Εξ. (2.1), παίρνει την μορφή

$$\frac{d\mathcal{A}}{dr} = - \frac{(1 + 3 K \mathcal{A}) (m + 4 K \pi r^3 \mathcal{A}^3)}{3 K r (r - 2m)}. \quad (3.66)$$

Συνεχίζουμε με τον πολυτροπικό δείκτη $n = 2.5$, δηλαδή, $\Gamma = 7/5$, οπότε παίρνουμε

$$\rho = \mathcal{A}^5, \quad P = K \mathcal{A}^7, \quad \frac{dP}{d\rho} = \frac{7}{5} K \mathcal{A}^2, \quad \frac{dE}{dP} = \frac{5}{2} + \frac{5}{7 K \mathcal{A}^2}. \quad (3.67)$$

Συνεπώς, η Εξ. (2.1), παίρνει την μορφή

$$\frac{d\mathcal{A}}{dr} = - \frac{(1 + \frac{7}{2} K \mathcal{A}^2) (m + 4 K \pi r^3 \mathcal{A}^7)}{7 K r (r - 2m) \mathcal{A}}. \quad (3.68)$$

Τέλος, για τον πολυτροπικό δείκτη $n = 2.9$, δηλαδή, $\Gamma = 39/29$, παίρνουμε

$$\rho = \mathcal{A}^{29}, \quad P = K \mathcal{A}^{39}, \quad \frac{dP}{d\rho} = \frac{39}{29} K \mathcal{A}^{10}, \quad \frac{dE}{dP} = \frac{29}{10} + \frac{29}{39 K \mathcal{A}^{10}}. \quad (3.69)$$

Σ' αυτή την περίπτωση, η Εξ. (2.1), παίρνει την μορφή

$$\frac{d\mathcal{A}}{dr} = - \frac{(1 + 3.9 K \mathcal{A}^{10}) (m + 4 K \pi r^3 \mathcal{A}^{39})}{39 K r (r - 2m) \mathcal{A}^9}. \quad (3.70)$$

Όταν εκτελείται το ATSPGM γράφει τα αποτελέσματα σε μια λογική μονάδα, που τυπικά καλείται LIST. Στην πράξη, ο χρήστης εκχωρεί αυτήν την

μονάδα σε ένα αρχείο του δίσκου με μια δήλωση `OPEN(LIST, ...)`, που γράφεται στο τρίτο μπλοκ του αρχείου `ODEINP` και έτσι λαμβάνει ένα αρχείο αποτελεσμάτων. Στο τέλος κάθε βήματος που γίνεται κατά μήκος του μονοπατιού ολοκλήρωσης, το `ATSPGM` γράφει στο αρχείο αποτελεσμάτων : (1) την τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής, (2) τις τιμές των εξαρτημένων μεταβλητών και (3) τις τιμές ορισμένων σημαντικών ποσοτήτων που είναι ορισμένες στο πρώτο μπλοκ του `ODEINP` ως "μηδενικής τάξης παράγωγοι" ([35], § 3.2.9), ([36], § 2.2). Για το πρόβλημά μας, τέτοιες ποσότητες είναι : (i) η συνεπής αρχική συνθήκη για το βαρυτικό δυναμικό (Εξ. (3.2)), $\Phi_1 = \Phi_1^{\text{arb}} + [\Phi_{\mathcal{R}} - \Phi^{\text{arb}}(\mathcal{R})]$ και (ii) η αυθαίρετη γωνιακή ταχύτητα (Εξ. (3.3)), $\Omega^{\text{arb}} = \bar{\omega}^{\text{arb}}(\mathcal{R}) + (\mathcal{R}/3) \eta^{\text{arb}}(\mathcal{R})$, που απαιτείται για τον υπολογισμό του λόγου $\Omega/\Omega^{\text{arb}}$, ούτως ώστε να βρούμε την συνεπή επανακανονικοποιημένη λύση $\bar{\omega}$ (Εξ. (3.4)). Για να υπολογίσουμε τις ποσότητες Φ_1 και Ω^{arb} , εκτελείται πρώτα το `ATSPGM`, χρησιμοποιώντας την αυθαίρετη αρχική συνθήκη $\Phi_1^{\text{arb}} = \Phi_{(\text{re})1}^{\text{arb}} = -0.5$, για το βαρυτικό δυναμικό και την "standard" αρχική συνθήκη $\bar{\omega}_1^{\text{arb}} = \bar{\omega}_{(\text{re})1}^{\text{arb}} = 1.82342 \text{ s}^{-1}$ (στην πραγματικότητα, αυθαίρετη επίσης), όπως εξηγήθηκε στην §3.1.1. Στο τέλος της πρώτης εκτέλεσης του `ATSPGM`, οι απαιτούμενες ποσότητες Φ_1 και Ω^{arb} εντοπίζονται στο αρχείο αποτελεσμάτων ως εκείνες, που αντιστοιχούν είτε στο τελευταίο βήμα με θετικό $\rho_{(\text{re})}$, είτε στο πρώτο βήμα με αρνητικό $\rho_{(\text{re})}$: τέτοιες προσεγγίσεις είναι αρκετά ικανοποιητικές, δεδομένου ότι τα βήματα που εκτελούνται από το `ATSPGM`, στην περιοχή της ακτίνας R , είναι σχετικά μικρά και έτσι όλες οι συναρτήσεις και οι ποσότητες παρουσιάζουν μικρές αποκλίσεις μεταξύ τέτοιων διαδοχικών βημάτων. Ακολουθώντας, χρησιμοποιώντας αυτές τις τιμές για Φ_1 και Ω^{arb} , συνεχίζουμε με την δεύτερη (και τελική) εκτέλεση του προγράμματός μας.

3.1.5 Η αριθμητική διαδικασία μετά την εξαγωγή των αριθμητικών αποτελεσμάτων από το `ATOMFT`

Όπως είπαμε παραπάνω, το `ATSPGM` παράγει ένα αρχείο αποτελεσμάτων το οποίο περιέχει την λύση του προβλήματος αρχικών τιμών που ορίζεται από το σύστημα των `ODEs` της § 3.1.1. Ακολουθώντας, ένα πρόγραμμα `Mathematica`[®] θέτει υπό τον έλεγχό του το αρχείο των αποτελεσμάτων και εκτελεί τις ακόλουθες εργασίες.

01. Διαβάζει το αρχείο αποτελεσμάτων του `ATSPGM`, συνθέτει τον εκτεταμένο πίνακα $\mathcal{T}_{\text{SOL}}^{(\delta_1)}$ (Εξ. (3.22)), κατασκευάζει με αριθμητική παρεμβολή την εκτεταμένη οικογένεια των πραγματικών συναρτήσεων της πραγματικής μεταβλητής \bar{r} , λύνει το γραμμικό σύστημα (3.19)–(3.20) και έτσι βρίσκει τις ποσότητες \mathcal{K} και $\widetilde{\mathcal{K}'}$ και υπολογίζει την ποσότητα $\overline{\mathcal{K}'}$ με εφαρμογή του αλ-

γόριθμου λεπτής ρύθμισης (§. 3.1.3, Εξς. (3.49)-(3.53)).

02. Υπολογίζει:

(α) Την ακτίνα, R , του μη περιστρεφόμενου αστέρα από την ρίζα της αλγεβρικής εξίσωσης $\rho_{(re)}(\bar{r}) = 0$ (Εξ. (2.17)).

(β) Την βαρυτική μάζα του αστέρα (Εξ. (2.18)), M .

(γ) Την "μιγαδική βαρυονική μάζα", M_B , λύνοντας αριθμητικά το ολοκλήρωμα ([9], Εξ.(22)), ([15], Εξς.(14)-(15))

$$M_B = 4\pi \int_0^R \rho \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \bar{r}^2 d\bar{r}, \quad (3.71)$$

και μετά το πραγματικό μέρος της M_B , δηλαδή, $M_B = \text{Re}(M_B)$, που είναι η βαρυονική μάζα του αστέρα (ονομάζεται επίσης και μάζα ηρεμίας).

(δ) Την "μιγαδική ιδιομάζα", M_P , λύνοντας αριθμητικά το ολοκλήρωμα ([15], Εξ.(16))

$$M_P = 4\pi \int_0^R E \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \bar{r}^2 d\bar{r}, \quad (3.72)$$

και ακολούθως, το πραγματικό της μέρος, $M_P = \text{Re}(M_P)$, που είναι η ιδιομάζα¹ του αστέρα (και εκφράζει την ενέργεια που αποθηκεύεται στον αστέρα, χωρίς να προσμετράται η βαρυτική δυναμική ενέργεια και η περιστροφική κινητική ενέργεια).

03. Υπολογίζει:

(α) Την μιγαδική στροφορμή (Εξ. (3.5)), \mathcal{J} και το πραγματικό μέρος αυτής $J = \text{Re}(\mathcal{J})$, που είναι η στροφορμή του αστέρα.

(β) Την "μιγαδική ροπή αδράνειας", \mathcal{I} , από την σχέση ([9], Εξ.(25)),

$$\mathcal{I} = \frac{\mathcal{J}}{\Omega}, \quad (3.73)$$

και το πραγματικό της μέρος, $I = \text{Re}(\mathcal{I})$, που εκφράζει την ροπή αδράνειας του αστέρα.

(γ) Την "μιγαδική περιστροφική κινητική ενέργεια", \mathcal{T} , από την σχέση

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \mathcal{I} \Omega^2 = \frac{1}{2} \mathcal{J} \Omega. \quad (3.74)$$

και το πραγματικό της μέρος, $T = \text{Re}(\mathcal{T})$, που αποτελεί την περιστροφική κινητική ενέργεια του αστέρα.

¹Η ιδιομάζα ορίζεται από την σχέση $M_P = M_B + U$, όπου U , είναι η πυκνότητα της εσωτερικής ενέργειας.

(δ) Την “μιγαδική βαρυτική δυναμική ενέργεια”, \mathcal{W} , σύμφωνα με την σχέση ([21], Εξ.(65))

$$\mathcal{W} = \mathcal{M}_P + \mathcal{T} - \mathcal{M}, \quad (3.75)$$

και το πραγματικό της μέρος, $W = \text{Re}(\mathcal{W})$, που είναι η βαρυτική δυναμική ενέργεια του αστέρα. (ε) Την μιγαδική τετραπολική ροπή, (Εξ. (3.21)), \mathcal{Q} και το πραγματικό της μέρος, $Q = \text{Re}(\mathcal{Q})$, που εκφράζει την τετραπολική ροπή του αστέρα.

04. Υπολογίζει τις μεταβολές λόγω της σφαιρικής παραμόρφωσης (βλέπε, π.χ., [15], §3.3· τα σύμβολα που χρησιμοποιούνται εκεί είναι δM , δM_B , δM_P , αντίστοιχα) :

(α) Στην “μιγαδική βαρυτική μάζα” $\delta \mathcal{M}_{SD}$ ([15], Εξ.(43)), ([13], Εξ.(31)), σύμφωνα με την σχέση

$$\delta \mathcal{M}_{SD} = m_0(\mathcal{R}) + \frac{\mathcal{J}^2}{\mathcal{R}^3}, \quad (3.76)$$

και το πραγματικό της μέρος δM_{SD}

$$\delta M_{SD} = \text{Re}(\delta \mathcal{M}_{SD}). \quad (3.77)$$

(β) Στην “μιγαδική βαρυονική μάζα” $\delta \mathcal{M}_{BSD}$ ([15], Εξ.(48)), ([9], Εξ.(23)),² λύνοντας αριθμητικά το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{M}_{BSD} = & 4\pi \int_0^{\mathcal{R}} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ & \left\{ \left[\frac{m_0}{r - 2m} + \frac{1}{3} r^2 (\bar{\omega})^2 e^{-2\Phi} \right] \rho \right. \\ & \left. + \left(\frac{d\rho}{dP} \right) (E + P) p_0 \right\} \bar{r}^2 d\bar{r}, \end{aligned} \quad (3.78)$$

και το πραγματικό της μέρος, δM_{BSD}

$$\delta M_{BSD} = \text{Re}(\delta \mathcal{M}_{BSD}). \quad (3.79)$$

(γ) Στην “μιγαδική ιδιομάζα” $\delta \mathcal{M}_{PSD}$ ([15], Εξ. (49)), λύνοντας αριθμητικά

²Ο συντελεστής 1, που συνεισφέρει πολλαπλασιαστικά στην ποσότητα $\epsilon_0(r)$, πρέπει να διαγραφεί.

το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{M}_{\text{PSD}} = & 4\pi \int_0^{\mathcal{R}} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ & \left\{ \left[\frac{m_0}{r-2m} + \frac{1}{3} r^2 (\bar{\omega})^2 e^{-2\Phi} \right] E \right. \\ & \left. + \left(\frac{dE}{dP} \right) (E + P) p_0 \right\} \bar{r}^2 d\bar{r}, \end{aligned} \quad (3.80)$$

και το πραγματικό της μέρος, δM_{PSD}

$$\delta M_{\text{PSD}} = \text{Re}(\delta \mathcal{M}_{\text{PSD}}). \quad (3.81)$$

(δ) Στην "μιγαδική ακτίνα" του αστέρα, $\delta \mathcal{R}_{\text{SD}}$, ([13], Εξ.(36)), ([9], Εξ.(50)), από την σχέση

$$\delta \mathcal{R}_{\text{SD}} = \xi_0(\mathcal{R}) = p_0 \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} (\mathcal{R} - 2\mathcal{M}). \quad (3.82)$$

Ακολούθως, υπολογίζει το πραγματικό της μέρος

$$\delta R_{\text{SD}} = \text{Re}(\delta \mathcal{R}_{\text{SD}}). \quad (3.83)$$

05. Τελικά, ένα πρόγραμμα *Mathematica*[®] υπολογίζει τις χαρακτηριστικές ακτίνες, \bar{r}_e και \bar{r}_p με την χρήση των Εξν. (3.25)–(3.28), R_e και R_p χρησιμοποιώντας τις Εξς. (3.30)–(3.32) και τις αντίστοιχες εκκεντρότητες ([15], Εξ.(37))

$$e(\bar{r}_p, \bar{r}_e) = \left(\frac{\bar{r}_e^2}{\bar{r}_p^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.84)$$

$$e(R_p, R_e) = \left(\frac{R_e^2}{R_p^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.85)$$

3.2 Υπολογισμοί διορθώσεων τρίτης τάξης στην γωνιακή ταχύτητα

Στην (1.4.4), εφαρμόσαμε μια διαταρακτική προσέγγιση με όρους τρίτης τάξης στην γωνιακή ταχύτητα, με σκοπό να ελέγξουμε αν υφίστανται σημαντικές διορθώσεις σε ποσότητες όπως η στροφορμή, η ροπή αδράνειας, η περιστροφική κινητική ενέργεια, η βαρυτική δυναμική ενέργεια και η ταχύτητα της μάζας διαφυγής. Επομένως, θα πρέπει να υπολογίσουμε τις

συναρτήσεις w_1 και w_3 . Αυτό επιτυγχάνεται με ένα κατάλληλο πρόγραμμα *Mathematica*[®] που αναλαμβάνει να επιλύσει τις διαφορικές εξισώσεις τρίτης τάξης.

Αρχικά, το πρόγραμμα υπολογίζει την ομογενή λύση $(x_1^H, u_1^H, x_3^H, u_3^H)$, του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{dx_1^H}{dr} = \frac{u_1^H}{r^4} - \frac{4\pi r^2 (E + P) x_1^H}{r - 2m}, \quad (3.86)$$

$$\frac{du_1^H}{dr} = \frac{16\pi r^5 (E + P) x_1^H}{r - 2m}, \quad (3.87)$$

$$\frac{dx_3^H}{dr} = \frac{u_3^H}{r^4} - \frac{4\pi r^2 (E + P) x_3^H}{r - 2m}, \quad (3.88)$$

$$\frac{du_3^H}{dr} = \frac{16\pi r^5 (E + P) x_3^H}{r - 2m} + \frac{10r^3 x_3^H}{r - 2m}, \quad (3.89)$$

που υπακούει στις αρχικές συνθήκες (1.76)–(1.77). Οι ποσότητες με εκθέτη, “H”, αφορούν τις ομογενείς διαφορικές εξισώσεις.

Ακολούθως, το πρόγραμμα υπολογίζει την μερική λύση $(x_1^P, u_1^P, x_3^P, u_3^P)$ (ο εκθέτης “P” δηλώνει την μερική λύση), του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων (1.68)–(1.72), που υπακούει στις αρχικές συνθήκες (1.74)–(1.75). Έτσι, προκύπτει η γενική λύση του συστήματος (1.68)–(1.72), ως ένας γραμμικός συνδυασμός της μερικής και της ομογενούς λύσης Εξς. (1.78)–(1.79), για το εσωτερικό του αστέρα $r \leq \mathcal{R}$. Οι σταθερές C_1 και C_3 που εμφανίζονται στην γενική λύση Εξς. (1.78)–(1.79), υπολογίζονται εξισώνοντας τις λύσεις μέσα και έξω από τον αστέρα στην επιφάνειά του, $r = \mathcal{R}$, όπως ακριβώς περιγράφεται στην § 1.4.4.

Η διόρθωση τρίτης τάξης στην μιγαδική στροφορμή, $\delta\mathcal{J}$, υπολογίζεται από την σχέση ([9], Εξ.(28))

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{J} = & \frac{1}{6} \left\{ 4r^3 \frac{dj}{dr} \bar{\omega} \left(\xi_0 - \frac{1}{5}\xi_2 \right) + r^4 j \frac{dw_1}{dr} \right. \\ & + r^4 j \frac{d\bar{\omega}}{dr} \left[h_0 + \frac{m_0}{r - 2\mathcal{M}} + \frac{4(u_2 - h_2)}{5} \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{5} \left(h_2 + \frac{m_2}{r - 2\mathcal{M}} \right) \right] \right\} \Big|_{r=\mathcal{R}}, \end{aligned} \quad (3.90)$$

οπότε το πραγματικό της μέρος είναι $\delta J = \text{Re}(\delta\mathcal{J})$. Συνεπώς, η διόρθωση τρίτης τάξης στην μιγαδική ροπή αδράνειας του αστέρα, $\delta\mathcal{I}$, υπολογίζεται από την σχέση ([9], Εξ.(31))

$$\delta\mathcal{I} = \frac{\delta\mathcal{J}}{\Omega}, \quad (3.91)$$

με το πραγματικό της μέρος να είναι $\delta I = \text{Re}(\delta \mathcal{I})$. Κατόπιν, υπολογίζεται η διόρθωση τρίτης τάξης στην μιγαδική περιστροφική κινητική ενέργεια του αστέρα, $\delta \mathcal{T}$, από την σχέση

$$\delta \mathcal{T} = \frac{1}{2} (\delta \mathcal{I}) \Omega^2 = \frac{1}{2} (\delta \mathcal{J}) \Omega, \quad (3.92)$$

το δε πραγματικό της μέρος είναι $\delta T = \text{Re}(\delta \mathcal{T})$. Τέλος, υπολογίζεται η διόρθωση τρίτης τάξης στην μιγαδική βαρυτική δυναμική ενέργεια του αστέρα, $\delta \mathcal{W}$, από την σχέση

$$\delta \mathcal{W} = \delta \mathcal{M}_P + \delta \mathcal{T} - \delta \mathcal{M}, \quad (3.93)$$

και το πραγματικό της μέρος είναι $\delta W = \text{Re}(\delta \mathcal{W})$.

3.3 Υπολογισμός του ορίου της μάζας διαφυγής

Μετά την εύρεση των διαταρακτικών διορθώσεων τρίτης τάξης $w_1(r)$ και $w_3(r)$, θα αναφέρουμε μία μέθοδο υπολογισμού του ορίου της μάζας διαφυγής (mass-shedding limit), (εμείς στη παρούσα διατριβή θα την συμβολίζουμε με Ω_{ms} , χρησιμοποιώντας το ίδιο σύμβολο όπως στην [9]), που είναι η γνωστή μας Κεπλεριανή γωνιακή ταχύτητα Ω_K (ταχύτητα, η οποία οδηγεί τον αστέρα σε απώλεια της μάζας του από τον ισημερινό). Η πρώτη προσπάθεια που αναπτύχθηκε πάνω σ' αυτό το θέμα ήταν στην [23]. Ακολούθησε αργότερα, μια πιο ολοκληρωμένη προσπάθεια υπολογισμού της Ω_K στην [9], πάνω στην οποία βασίζεται και η δικιά μας μέθοδος που θα περιγράψουμε παρακάτω.

Έστω αστέρας νετρονίων ορισμένης βαρυονικής μάζας, που περιστρέφεται με δεδομένη γωνιακή ταχύτητα Ω . Θεωρούμε ένα στοιχειώδες τμήμα ρευστού, που ανήκει στον αστέρα και βρίσκεται πάνω στην επιφάνειά του στον ισημερινό. Από την διαταραγμένη μετρική του περιστρεφόμενου μοντέλου (1.21), μπορούμε να υπολογίσουμε ότι αυτό έχει ταχύτητα ([9], Εξ.(15))

$$\mathcal{V}_{\text{bound}} = e^{\frac{\psi - \beta}{2}} \left[\Omega - \left(\omega(r) + w_1(r) - \frac{3}{2} w_3(r) \right) \right], \quad (3.94)$$

όπου οι ψ και β είναι συναρτήσεις των συντεταγμένων (r, θ) και δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} e^{\beta(r, \theta)} &= e^{\nu(r)} [1 + 2h(r, \theta)], \\ e^{\psi(r, \theta)} &= r^2 [1 + 2k(r, \theta)] \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Η ταχύτητα $\mathcal{V}_{\text{bound}}$ είναι σε μιγαδική μορφή, οπότε το πραγματικό μέρος της που μας ενδιαφέρει είναι

$$V_{\text{bound}} = \text{Re}(\mathcal{V}_{\text{bound}}). \quad (3.96)$$

Θα πρέπει να διευκρινίσουμε ότι, γενικά, το στοιχειώδες τμήμα ρευστού δεν ακολουθεί μια γεωδαισιακή της μετρικής (1.21).

Χρησιμοποιώντας τις γεωδαισιακές εξισώσεις, μπορούμε να υπολογίσουμε επίσης την ταχύτητα ενός σωματιδίου, που κινείται σε μια κυκλική τροχιά ακριβώς έξω από την επιφάνεια του ισημερινού και με φορά περιστροφής αυτή που έχει ο περιστρεφόμενος αστέρας, σύμφωνα με την σχέση ([9], Εξ.(17))

$$\mathcal{V}_{\text{free}} = \frac{(\omega' + w'_1 - \frac{3}{2}w'_3)}{\psi'} e^{\frac{\psi-\beta}{2}} + \left\{ \frac{\beta'}{\psi'} + \left[\frac{(\omega' + w'_1 - \frac{3}{2}w'_3)}{\psi'} e^{\frac{\psi-\beta}{2}} \right]^2 \right\}^{1/2}. \quad (3.97)$$

Αυτή η ταχύτητα είναι επίσης σε μιγαδική μορφή, οπότε το πραγματικό μέρος της είναι

$$V_{\text{free}} = \text{Re}(\mathcal{V}_{\text{free}}). \quad (3.98)$$

Για μια τιμή της γωνιακής ταχύτητας Ω_1 , μικρότερης της Κεπλεριανής Ω_K ($\Omega_1 < \Omega_K$), οι ταχύτητες V_{bound} , V_{free} που υπολογίζονται στην ισημερινή ακτίνα του περιστρεφόμενου αστέρα \bar{r}_e , έχουν διαφορετικές τιμές και μάλιστα ισχύει $V_{\text{bound}}(\bar{r}_e, \Omega_1) < V_{\text{free}}(\bar{r}_e, \Omega_1)$. Αν σταδιακά αυξάνουμε την γωνιακή ταχύτητα Ω , οι υπολογιζόμενες ταχύτητες V_{bound} και V_{free} συγκλίνουν τελικά στην ίδια τιμή. Η τιμή Ω_i , για την οποία ισχύει $V_{\text{bound}}(\bar{r}_e, \Omega_i) = V_{\text{free}}(\bar{r}_e, \Omega_i)$, είναι το ζητούμενο όριο της μάζας διαφυγής $\Omega_{\text{ms}} = \Omega_i$.

Για την εφαρμογή της παραπάνω μεθόδου που περιγράψαμε για τον υπολογισμό του ορίου της μάζας διαφυγής, απαιτείται η δημιουργία μιας ακολουθίας αστρικών μοντέλων με σταθερή βαρυονική μάζα και μεταβαλλόμενη γωνιακή ταχύτητα Ω . Η διαδικασία, που ακολουθούμε γι' αυτό τον σκοπό αποτελείται από δύο στάδια, που είναι τα εξής:

(1) Για μια δεδομένη κεντρική πυκνότητα μάζας-ενέργειας E_c , που αντιστοιχεί στο μοντέλο μέγιστης μάζας, ομοιόμορφα περιστρεφόμενο με Κεπλεριανή γωνιακή ταχύτητα, Ω_K , βρίσκουμε την ρ_c σύμφωνα με την σχέση (2.4), οπότε επιλύουμε το σύστημα όλων των διαφορικών εξισώσεων ODEs του προβλήματός μας, όπως έχουμε περιγράψει στις προηγούμενες παραγράφους. Έτσι, υπολογίζουμε (βλέπε 3.1.5), την ακτίνα του αδιατάρακτου μοντέλου, οπότε από την σχέση (3.71), βρίσκουμε τελικά την βαρυονική μάζα του μη περιστρεφόμενου αστέρα, M_B . Το μοντέλο μας πλέον ταυτοποιείται με αυτήν την βαρυονική μάζα $\tilde{M} = M_B$. Ακολουθώντας, βρίσκουμε και την απαιτούμενη ισημερινή ακτίνα του περιστρεφόμενου αστέρα \bar{r}_e .

Στην παρούσα έρευνα, από την προηγούμενη διαδικασία προέκυψαν τα ακόλουθα αποτελέσματα (βαρυτικές μονάδες).

(i) Για το πολυτροπικό μοντέλο με $n = 1.0$, $E_c = 2.816 \times 10^{-13}$, $\rho_c = 2.134 \times 10^{-13}$, $\tilde{M} = M_B = 2.202 \times 10^5$ η βαρυονική μάζα του μη περιστρεφόμενου αστέρα και τέλος η ισημερινή ακτίνα του περιστρεφόμενου αστέρα $\bar{r}_e = 1.107 \times 10^6$.

(ii) Για $n = 1.5$, $E_c = 3.631 \times 10^{-13}$, $\rho_c = 2.962 \times 10^{-13}$, $\tilde{M} = M_B = 1.228 \times 10^5$ η βαρυονική μάζα του μη περιστρεφόμενου αστέρα και τέλος η ισημερινή ακτίνα του περιστρεφόμενου αστέρα $\bar{r}_e = 1.045 \times 10^6$.

(iii) Για $n = 2.0$, $E_c = 3.457 \times 10^{-13}$, $\rho_c = 3.027 \times 10^{-13}$, $\tilde{M} = M_B = 6.778 \times 10^4$ η βαρυονική μάζα του μη περιστρεφόμενου αστέρα και τέλος η ισημερινή ακτίνα του περιστρεφόμενου αστέρα $\bar{r}_e = 1.076 \times 10^6$.

(iv) Για $n = 2.5$, $E_c = 2.591 \times 10^{-13}$, $\rho_c = 2.428 \times 10^{-13}$, $\tilde{M} = M_B = 2.755 \times 10^4$ η βαρυονική μάζα του μη περιστρεφόμενου αστέρα και τέλος η ισημερινή ακτίνα του περιστρεφόμενου αστέρα $\bar{r}_e = 1.084 \times 10^6$.

(v) Για $n = 2.9$, $E_c = 8.108 \times 10^{-14}$, $\rho_c = 8.005 \times 10^{-14}$, $\tilde{M} = M_B = 4.406 \times 10^3$ η βαρυονική μάζα του μη περιστρεφόμενου αστέρα και τέλος η ισημερινή ακτίνα του περιστρεφόμενου αστέρα $\bar{r}_e = 1.029 \times 10^6$.

(2) Για μια ορισμένη τιμή της γωνιακής ταχύτητας Ω_i και για διάφορες τιμές της E_c , από τις οποίες προκύπτουν οι αντίστοιχες τιμές της ρ_c , όπως αναφέρθηκε στο πρώτο στάδιο, λύνουμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων, μέχρι και τις σφαιρικές διορθώσεις. Συνεπώς, προκύπτει μια οικογένεια μοντέλων με αντίστοιχες διορθώσεις στην μιγαδική βαρυονική μάζα $\delta\mathcal{M}_{\text{BSD}}$, σύμφωνα με την σχέση (3.79). Επομένως, από την σχέση

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\text{BSDtot}} = & 4\pi \int_0^{\mathcal{R}} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ & \left\{ \left[1 + \frac{m_0}{r - 2m} + \frac{1}{3} r^2 (\bar{\omega})^2 e^{-2\Phi} \right] \rho \right. \\ & \left. + \left(\frac{d\rho}{dP} \right) (E + P) p_0 \right\} \bar{r}^2 d\bar{r}, \end{aligned} \quad (3.99)$$

υπολογίζουμε την ολική μιγαδική βαρυονική μάζα, οπότε και το πραγματικό της μέρος M_{BSD}

$$M_{\text{BSDtot}} = \text{Re}(\mathcal{M}_{\text{BSDtot}}), \quad (3.100)$$

που αποτελεί την αντίστοιχη ολική βαρυονική μάζα για κάθε ένα μοντέλο της οικογένειας. Ανάμεσα σε όλα αυτά τα μοντέλα, επιλέγουμε εκείνο που έχει ολική βαρυονική μάζα $M_{\text{BSDtot}} = \tilde{M}$. Ακολουθώντας, για το συγκεκριμένο μοντέλο που επιλέξαμε, λύνουμε το σύστημα όλων των διαφορικών εξισώσεων της αστρικής δομής, μέχρι και τις διορθώσεις τρίτης τάξης στην γωνιακή ταχύτητα για την περίπτωση της ομοιόμορφης περιστροφής, όπως περιγράψαμε στις § (3.1.5), § (3.2), με την βοήθεια κατάλληλων προγραμμάτων στο ATOMFT και στο *Mathematica*[®]. Στην συνέχεια, για το

συγκεκριμένο μοντέλο γωνιακής ταχύτητας Ω_i , υπολογίζουμε τις ταχύτητες V_{bound} και V_{free} , στην ισημερινή ακτίνα του περιστρεφόμενου αστέρα \bar{r}_e , από τις σχέσεις (3.94) και (3.97) αντίστοιχα. Αν ισχύει $V_{\text{bound}} = V_{\text{free}}$, τότε η διαδικασία ολοκληρώνεται και έχουμε επιτύχει τον υπολογισμό του ορίου της μάζας διαφυγής, που θα είναι η γωνιακή ταχύτητα του μοντέλου, δηλαδή $\Omega_{\text{ms}} = \Omega_i$. Αν όμως ισχύει $V^{\text{bound}} < V^{\text{free}}$, τότε επιλέγουμε μια μεγαλύτερη τιμή της γωνιακής ταχύτητας και επαναλαμβάνουμε το στάδιο (2) από την αρχή.

Από την παραπάνω διαδικασία προέκυψαν τα παρακάτω αποτελέσματα (όλα σε βαρυτικές μονάδες).

(i) Για το πολυτροπικό μοντέλο με $n = 1.0$, ξεκινήσαμε δίνοντας μια αρχική τιμή στην γωνιακή ταχύτητα $\Omega_i = 3. \times 10^{-7}$ και καταλήξαμε σταδιακά σε μια τελική τιμή $\Omega_f = 3.361 \times 10^{-7}$, που είναι το όριο της μάζας διαφυγής, $\Omega_{\text{ms}} = \Omega_f = 3.361 \times 10^{-7}$, αφού για την συγκεκριμένη τιμή υπολογίσαμε $V_{\text{bound}} = V_{\text{free}} = 3.50 \times 10^{-1}$ (βλέπε Πνκ. 4.13).

(ii) Για $n = 1.5$, $\Omega_i = 2.3 \times 10^{-7}$, $\Omega_f = 3.0 \times 10^{-7}$, οπότε $\Omega_{\text{ms}} = \Omega_f = 3.0 \times 10^{-7}$, με τις ταχύτητες να συγκλίνουν στην τιμή $V_{\text{bound}} = V_{\text{free}} = 3.52 \times 10^{-1}$ (βλέπε Πνκ. 4.14).

(iii) Για $n = 2.0$, $\Omega_i = 1.60 \times 10^{-7}$, $\Omega_f = 2.07 \times 10^{-7}$, οπότε $\Omega_{\text{ms}} = \Omega_f = 2.07 \times 10^{-7}$, με τις ταχύτητες να συγκλίνουν στην τιμή $V_{\text{bound}} = V_{\text{free}} = 2.40 \times 10^{-1}$ (βλέπε Πνκ. 4.15).

(iv) Για $n = 2.5$, $\Omega_i = 8. \times 10^{-8}$, $\Omega_f = 1.495 \times 10^{-7}$, οπότε $\Omega_{\text{ms}} = \Omega_f = 1.495 \times 10^{-7}$, με τις ταχύτητες να συγκλίνουν στην τιμή $V_{\text{bound}} = V_{\text{free}} = 1.66 \times 10^{-1}$ (βλέπε Πνκ. 4.16).

(v) Για $n = 2.9$, $\Omega_i = 4.50 \times 10^{-8}$, $\Omega_f = 6.39 \times 10^{-8}$, οπότε $\Omega_{\text{ms}} = \Omega_f = 6.39 \times 10^{-8}$, με τις ταχύτητες να συγκλίνουν στην τιμή $V_{\text{bound}} = V_{\text{free}} = 6.59 \times 10^{-2}$ (βλέπε Πνκ. 4.17).

Αυτή η διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί και για ταχέως περιστρεφόμενους αστέρες και για μοντέλα αστέρων πολύ κοντά στην μέγιστη μάζα.

Κεφάλαιο 4

Αποτελέσματα - Συμπεράσματα

4.1 Αριθμητικά αποτελέσματα και γραφικές παραστάσεις

Στην παρούσα ερευνητική διατριβή υπολογίζουμε σχετικιστικά πολυτροπικά μοντέλα μέγιστης μάζας (για λεπτομέρειες πάνω σε τέτοια μοντέλα, βλέπε, π.χ. ([13], § 5.2), ([15], § 6), ([21], § 6), ([22], § 4), ([7], § V), ([8], § III), ([51], § 2.3, 9.2)). Λεπτομερώς, για κάθε τιμή του πολυτροπικού δείκτη n , αρχικά υπολογίζουμε το μη περιστρεφόμενο μοντέλο μέγιστης μάζας, M_{\max} , με αντίστοιχη κεντρική πυκνότητα μάζας ηρεμίας, $\rho_c(M_{\max})$, ή εναλλακτικά, με αντίστοιχη κεντρική πυκνότητα μάζας-ενέργειας, $E_c(M_{\max})$. Για τα πολυτροπικά μοντέλα που μας ενδιαφέρουν, οι τιμές της $E_c(M_{\max})$ δίνονται στην ([32], Πίνακας 1), επίσης στην ([22], § 4, Πίνακας 1). Στην παρούσα έρευνα, πραγματοποιούμε τους υπολογισμούς μας για $\rho_c(M_{\max})$, με την χρησιμοποίηση μιας λίγο πολύ τυποποιημένης αριθμητικής μεθόδου (βλέπε, π.χ. [13], § 3.7· βλέπε επίσης [14], § 5). Ιδιαίτερα, το μοντέλο μέγιστης μάζας έχει κεντρική πυκνότητα μάζας ηρεμίας ίση με την ρίζα της συνάρτησης $dM/d\rho_{(\text{re})c}$, η οποία αντιμετωπίζεται ως η αριθμητική παράγωγος της συνάρτησης παρεμβολής $M(\rho_{(\text{re})c})$, που κατασκευάστηκε από έναν μεγάλο αριθμό μη περιστρεφόμενων μοντέλων – υπολογίζουμε $2^8 + 1 = 257$ τέτοιων μοντέλων με τις κεντρικές τους πυκνότητες να είναι ισοκατανεμημένες στο διάστημα $[1 \times 10^{15} \text{ g cm}^{-3}, 5 \times 10^{15} \text{ g cm}^{-3}]$. Μια δυσκολία που προκύπτει για τα πολυτροπικά μοντέλα του ενδιαφέροντός μας, έχει να κάνει με το γεγονός ότι αυτή η παράγωγος είναι σχεδόν οριζόντια στην περιοχή της ρίζας, συνεπώς ο υπολογισμός της ρίζας $\rho_{(\text{re})c}(M_{\max})$ είναι μια λεπτή διαδικασία και οι τιμές μας μπορεί να διαφέρουν ελαφρώς από αυτές που δίνουν οι άλλοι συγγραφείς.

Ακολούθως, υπολογίζουμε το ομοιόμορφα περιστρεφόμενο μοντέλο με

γωνιακή ταχύτητα ίση με την Κεπλεριανή γωνιακή ταχύτητα, $\Omega = \Omega_K$. Επί του θέματος, αξίζει να αναφέρουμε ότι η μέθοδος διαταραχής του *Hartle*, χρησιμοποιεί ως παράμετρο περιστροφής το $\epsilon = \Omega/\Omega_{\max}$, όπου

$$\Omega_{\max} = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} \quad (4.1)$$

είναι η μέγιστη γωνιακή ταχύτητα (που αποκαλείται επίσης και ως κρίσιμη γωνιακή ταχύτητα), για την οποία εμφανίζεται διαφυγή μάζας από τον ισημερινό. Να προσθέσουμε ότι η Ω_{\max} , περιγράφει την Νευτώνεια ισορροπία των φυγόκεντρων δυνάμεων, που αναπτύσσονται κατά την περιστροφή, με τις δυνάμεις βαρύτητας που συγκρατούν τον αστέρα. Όμως, αυτό το Νευτώνειο άνω όριο αντιπροσωπεύει ένα μάλλον υπερεκτιμημένο όριο για τους αστέρες νετρονίων. Γι' αυτό τον λόγο, εμείς χρησιμοποιούμε την Κεπλεριανή γωνιακή ταχύτητα, Ω_K , ως άνω όριο. Αν η γωνιακή ταχύτητα του αστέρα γίνει ελαφρώς μεγαλύτερη από την Ω_K , τότε αρχίζει η διαφυγή μάζας από τον ισημερινό του αστέρα νετρονίων. Κατά συνέπεια, η Ω_K είναι το σχετικιστικό ανάλογο της Ω_{\max} . Πολλές μέθοδοι έχουν εφαρμοστεί για τον υπολογισμό της Ω_K (για μία γενικότερη συζήτηση πάνω σε σχετικές μεθόδους, βλέπε [13], §3.7· για μία λεπτομερέστερη περιγραφή, βλέπε [9], §IIA). Στην έρευνά μας, χρησιμοποιούμε το γνωστό πακέτο RNS με τις προτεινόμενες παραμέτρους του, όπως, το μέγεθος πλέγματος (δηλαδή, $\text{MDIV} \times \text{SDIV} = 65 \times 129$), την ακρίβεια (δηλαδή, 10^{-5}) και την ανοχή (δηλαδή, 10^{-4}). Στο τέλος βέβαια της παρούσας ερευνητικής προσπάθειας, καταφέραμε να υπολογίσουμε το όριο της μάζας διαφυγής, Ω_{ms} , που αντιστοιχεί στην Κεπλεριανή γωνιακή ταχύτητα Ω_K , βασιζόμενοι στην [9]. Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα που παίρνουμε για την Ω_K είναι ικανοποιητικά, συγκρινόμενα με τα αντίστοιχα αποτελέσματα του πακέτου RNS.

Στους Πίνακες 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 παρουσιάζουμε μερικά ενδεικτικά αποτελέσματα για $n = 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 2.9$, αντίστοιχα. Οι ποσότητες που εμφανίζονται σ' αυτούς τους πίνακες, είναι εκείνες που ορίζονται και που δηλώνονται από τα ίδια σύμβολα στην [15] με εξαίρεση μερικές ποσότητες που ορίζονται εδώ (π.χ. $\rho_{(\text{re})c}$, $E_{(\text{re})c}$, \bar{r}_p , \bar{r}_e). Η σύγκριση των αποτελεσμάτων στους Πίνακες 4.2, 4.4, 4.5 με τα αντίστοιχα αποτελέσματα που δίνονται στους Πίνακες 3, 7, 9 της [15], δείχνει ότι αυτά είναι συμβατά αριθμητικά αποτελέσματα. Σημειώνουμε ότι στην [15]: (i) η περίπτωση $n = 1.0$, δεν είναι επαληθεύσιμη, (ii) η περίπτωση $n = 2.0$, είναι επαληθεύσιμη με κεντρική πυκνότητα μάζας-ενέργειας αρκετά διαφορετική από αυτήν που χρησιμοποιούμε εδώ, επομένως τα αποτελέσματα στην ([15], Πίνακας 5) δεν είναι συμβατά με τα αποτελέσματα στον Πίνακα 4.3, (iii) η περίπτωση $n = 2.9$, είναι επαληθεύσιμη με πολυτροπική σταθερά $K = 1.5 \times 10^{13} \text{ cgs}$ και κεντρική πυκνότητα μάζας-ενέργειας $E_{(\text{re})c} = 5.381 \times 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$ αντί των

τιμών $K = 2.6 \times 10^{13}$ cgs και $E_{(re)c} = 1.092 \times 10^{15}$ g cm⁻³ που χρησιμοποιούνται εδώ, συνεπώς, οι συγκρίσεις των αποτελεσμάτων στην ([15], Πίνακας 9) με τα αντίστοιχα αποτελέσματα στον Πίνακα 4.5, μπορούν να γίνουν μόνο με την στήλη που αφορά τις "πολυτροπικές μονάδες".

Στον Πίνακα 4.6, δίνονται οι αρχικές τιμές των $\rho_{(re)c}$, $\rho_{(im)c}$ και του λόγου $\rho_{(im)c}/\rho_{(re)c}$, για διάφορα πολυτροπικά μοντέλα σε βαρυτικές μονάδες. Σημειώνουμε ότι στην παρούσα έρευνα, εφαρμόζουμε μια ιδέα που συζητήθηκε πρώτα στην ([10], Εξ.(3.13) και η συζήτηση που ακολούθησε μετά από αυτήν την εξίσωση), σύμφωνα με την οποία το φανταστικό μέρος μιας συνάρτησης θα μπορούσε να ρυθμιστεί έτσι ώστε ένας πρόσθετος όρος να ικανοποιείται. Στο πρόβλημά μας, ρυθμίζουμε το φανταστικό μέρος $\rho_{(im)c}$, έτσι ώστε η ακτίνα του μη περιστρεφόμενου αστέρα να είναι συμβατή με την αντίστοιχη εκτίμηση του πακέτου RNS, (μέσα σε μια "ανοχή απόκλισης", τ , που εδώ παίρνουμε να είναι $\tau = 5 \times 10^2$ cm).

Στον Πίνακα 4.7, δίνονται οι αρχικές τιμές των $\Phi_{(re)1}$, $\Phi_{(im)1}$ και οι τιμές των $\Omega_{(re)}^{αρθ}$, $\Omega_{(im)}^{αρθ}$, για διάφορα πολυτροπικά μοντέλα σε βαρυτικές μονάδες. Όπως περιγράψαμε στο τέλος της § 3.1.4, αυτές οι τιμές είναι αποτελέσματα που προκύπτουν από την πρώτη εκτέλεση του προγράμματός μας: ακολούθως, αυτά χρησιμοποιούνται για την δεύτερη (και τελική) εκτέλεση του προγράμματος.

Στον Πίνακα 4.8, παρουσιάζονται οι τιμές της σταθεράς \mathcal{K}' , που την υπολογίζουμε με δύο τρόπους: (α) από την λύση του γραμμικού συστήματος (3.19)–(3.20) ($\mathcal{K}' = \widetilde{\mathcal{K}'}$) (βλέπε § 3.1.1) και (β) από τον αλγόριθμο λεπτής ρύθμισης (§ 3.1.3, Εξς. (3.49)–(3.53)), ($\mathcal{K}' = \overline{\mathcal{K}'}$) (βλέπε § 3.1.3), για διάφορα πολυτροπικά μοντέλα. Επίσης, στην τρίτη γραμμή του πίνακα παρουσιάζονται τα ποσοστά επί τοις χιλίοις της διαφοράς που εμφανίζεται στην τιμή του \mathcal{K}' , ανάλογα με τον τρόπο υπολογισμού της σε κάθε περίπτωση (δηλαδή $\frac{\overline{\mathcal{K}'} - \widetilde{\mathcal{K}'}}{\mathcal{K}'} \times 1000$).

Στους Πίνακες 4.9 και 4.10, δίνονται οι τιμές των διορθώσεων στην πίεση ΔP_0 , ΔP_2 και στην πυκνότητα ΔE_0 , ΔE_2 , στο σύνορο του αστέρα, που υπολογίζονται ως ρίζες των γραμμικών συστημάτων (3.56)–(3.57) και (3.58)–(3.59), αντίστοιχα, για διάφορα πολυτροπικά μοντέλα, σε βαρυτικές μονάδες. Επίσης, δίνονται οι λόγοι $\Delta P_0/P_{c(re)}$, $\Delta P_2/P_{c(re)}$, $\Delta E_0/E_{c(re)}$ και $\Delta E_2/E_{c(re)}$.

Στον Πίνακα 4.11, παρουσιάζονται οι τιμές των ποσοτήτων: (i) $(\bar{r}_p)_1$, $(\bar{r}_e)_1$ και $(\bar{r}_p/\bar{r}_e)_1$, που υπολογίζονται από τις Εξς. (3.25)–(3.28) και περιλαμβάνουν ως τιμή του \mathcal{K}' , αυτήν την οποία υπολογίζουμε από τον αλγόριθμο της λεπτής ρύθμισης (§ 3.1.3, Εξς. (3.49)–(3.53)), ($\mathcal{K}' = \overline{\mathcal{K}'}$), (ii) $(\bar{r}_p/\bar{r}_e)_2$, που υπολογίζονται από τις Εξς. (3.25)–(3.28) και περιλαμβάνουν ως τιμή του \mathcal{K}' , αυτήν την οποία υπολογίζουμε ως λύση του γραμμικού συστήματος (3.19)–(3.20), ($\mathcal{K}' = \widetilde{\mathcal{K}'}$) και (iii) $(\bar{r}_p/\bar{r}_e)_3$, που υπολογίζονται με βάση το πακέτο

RNS. Επιπλέον, αυτός ο πίνακας παρουσιάζει ποσοστιαίες επί τοις εκατό διαφορές $(\%)_{13}$ και $(\%)_{23}$ μεταξύ των αποτελεσμάτων της πρώτης και της τρίτης περίπτωσης και της δεύτερης και της τρίτης περίπτωσης, αντίστοιχα.

Στον Πίνακα 4.12, έχουμε τα ποσοστά $(\delta J/J) \times 100\%$, $(\delta I/I) \times 100\%$, $(\delta T/T) \times 100\%$ και $(|\delta W|/|W|) \times 100\%$ της διόρθωσης τρίτης τάξης στην γωνιακή ταχύτητα, για διάφορα πολυτροπικά μοντέλα.

Στους Πίνακες 4.13, 4.14, 4.15, 4.16, 4.17, εμφανίζουμε τα στάδια της διαδικασίας εύρεσης του ορίου της μάζας διαφυγής για πολυτροπικά μοντέλα (όλα τα αποτελέσματα είναι σε βαρυτικές μονάδες), με (i) $n = 1.0$, βαρυονική μάζα $\tilde{M} = 2.202 \times 10^5$ και ισημερινή ακτίνα του περιστρεφόμενου αστέρα $\bar{r}_e = 1.107(+06)$, (ii) $n = 1.5$, βαρυονική μάζα $\tilde{M} = 1.228 \times 10^5$ και ισημερινή ακτίνα του περιστρεφόμενου αστέρα $\bar{r}_e = 1.045 \times 10^6$, (iii) $n = 2.0$, βαρυονική μάζα $\tilde{M} = 6.778 \times 10^4$ και ισημερινή ακτίνα του περιστρεφόμενου αστέρα $\bar{r}_e = 1.076 \times 10^6$, (iv) $n = 2.5$, βαρυονική μάζα $\tilde{M} = 2.755 \times 10^4$ και ισημερινή ακτίνα του περιστρεφόμενου αστέρα $\bar{r}_e = 1.084 \times 10^6$ και (v) $n = 2.9$, βαρυονική μάζα $\tilde{M} = 4.406 \times 10^3$ και ισημερινή ακτίνα του περιστρεφόμενου αστέρα $\bar{r}_e = 1.029 \times 10^6$. Στην πρώτη στήλη έχουμε τις τιμές της Ω , για κάθε μία περίπτωση που εξετάζουμε και τις αντίστοιχες τελικές τιμές της $\rho_{(re)c}$ (δεύτερη στήλη)¹, οι οποίες αντιστοιχούν σε σταθερή βαρυονική μάζα \tilde{M} . Στην τρίτη και τέταρτη στήλη εμφανίζονται οι προκύπτουσες τιμές των V_{bound} και V_{free} αντίστοιχα.

Για τα πολυτροπικά μη περιστρεφόμενα μοντέλα μέγιστης μάζας, στα σχήματα 4.1, 4.2, δίνουμε τις γραφικές παραστάσεις της πυκνότητας μάζας η-ρεμίας, $\rho_{(re)}$, σε συνάρτηση με την απόσταση από το κέντρο του αστέρα, r , σε μονάδες cgs , με $n = 1.0$, $n = 2.9$ (Σχ. 4.1) και $n = 1.5$, $n = 2.0$, $n = 2.9$ (Σχ. 4.2). Επίσης, στα σχήματα 4.3, 4.4, έχουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $m_{(re)}$, P_{re} , $\Phi_{(re)}$, $(dE/dP)_{(re)}$, σε συνάρτηση με την απόσταση από το κέντρο του αστέρα, r , σε βαρυτικές μονάδες.

Στα σχήματα 4.5, 4.6, 4.7, 4.8, παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $m_{0(re)}$, $p_{0(re)}$, $h_{2(re)}$, $v_{2(re)}$, $m_{2(re)}$, $p_{2(re)}$, $w_{1(re)}$ και $w_{3(re)}$, σε συνάρτηση με την απόσταση από το κέντρο του αστέρα, r , σε βαρυτικές μονάδες, για πολυτροπικό μοντέλο με $n = 1.5$, μέγιστης μάζας και ομοιόμορφης περιστροφής με Κεπλεριανή γωνιακή ταχύτητα.

Στα σχήματα 4.9 και 4.10, φαίνονται οι μεσημβρινές τομές των πολυτροπικών μοντέλων με $n = 1.0$, $n = 2.9$, και $n = 1.5$, $n = 2.0$, $n = 2.9$, αντίστοιχα, με μέγιστη μάζα και Κεπλεριανή γωνιακή ταχύτητα. Σε κάθε μία από αυτές τις γραφικές παραστάσεις: (α) η συνεχής καμπύλη (κύκλος), ορίζει το σύνορο του μη περιστρεφόμενου αστέρα, (β) η λεπτή διακεκομμένη καμπύλη (σφαιροειδής), δείχνει το σύνορο του περιστρεφόμενου αστέρα που

¹το φανταστικό μέρος της πυκνότητας $\rho_{(im)c}$, το παίρνουμε ίσο με το $1/100$ της $\rho_{(re)c}$.

υπολογίζεται από την Εξ. (3.23), όπου ως τιμή της σταθεράς \mathcal{K}' , λαμβάνεται αυτή που προκύπτει από την λύση του γραμμικού συστήματος (3.19)–(3.20), ($\mathcal{K}' = \widetilde{\mathcal{K}'}$) και (γ) η παχιά διακεκομμένη καμπύλη (σφαιροειδής), παριστάνει το σύνορο του περιστρεφόμενου αστέρα που υπολογίζεται από την Εξ. (3.23), όπου ως τιμή της σταθεράς \mathcal{K}' , λαμβάνεται αυτή που προκύπτει από τον αλγόριθμο με την λεπτή ρύθμιση (§ 3.1.3, Εξς. (3.49)–(3.53)), ($\mathcal{K}' = \overline{\mathcal{K}'}$).

Στα σχήματα (4.11), (4.12) έχουμε τις γραφικές παραστάσεις των ταχυτήτων V_{bound} και V_{free} , που υπολογίζονται για κάθε μία εξεταζόμενη τιμή της Ω , στην ισημερινή ακτίνα \bar{r}_e , για πολυτροπικά μοντέλα με $n = 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 2.9$. Στο σχήμα (4.11) με (i) $n = 1.0$, βαρυονική μάζα $\tilde{M} = 2.202 \times 10^5$ και ισημερινή ακτίνα του περιστρεφόμενου αστέρα $\bar{r}_e = 1.107 \times 10^6$ (πάνω σχήμα) και (ii) $n = 1.5$, βαρυονική μάζα $\tilde{M} = 1.228 \times 10^5$ και ισημερινή ακτίνα του περιστρεφόμενου αστέρα $\bar{r}_e = 1.045 \times 10^6$ (κάτω σχήμα).

Στο σχήμα (4.12) με (i) $n = 2.0$, βαρυονική μάζα $\tilde{M} = 6.778 \times 10^4$ και ισημερινή ακτίνα του περιστρεφόμενου αστέρα $\bar{r}_e = 1.076 \times 10^6$ (πάνω αριστερά σχήμα), (ii) $n = 2.5$, βαρυονική μάζα $\tilde{M} = 2.755 \times 10^4$ και ισημερινή ακτίνα του περιστρεφόμενου αστέρα $\bar{r}_e = 1.084 \times 10^6$ (πάνω δεξιά σχήμα) και (iii) $n = 2.9$, βαρυονική μάζα $\tilde{M} = 4.406 \times 10^3$ και ισημερινή ακτίνα του περιστρεφόμενου αστέρα $\bar{r}_e = 1.029 \times 10^6$ (κάτω σχήμα).

Παρατηρούμε ότι το σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των ταχυτήτων V_{bound} και V_{free} , αντιστοιχεί στο ζητούμενο όριο της μάζας διαφυγής Ω_{ms} .

Πίνακας 4.1: Αριθμητικά αποτελέσματα για πολυτροπικό μοντέλο μέγιστης μάζας με $n = 1.0$ ομοιόμορφη περιστροφή με Κεπλεριανή γωνιακή ταχύτητα.

	βαρυτικές μονάδες	πολυτροπικές μονάδες	cgS μονάδες
Μη περιστρεφόμενος αστέρας			
Πολυτροπική σταθερά, K	1.499(+12)	1.000(+00)	1.000(+05)
Κεντρική πυκνότητα μάζας-ενέργειας, E_c	2.816(-13)	4.220(-01)	3.793(+15)
Κεντρική πυκνότητα μάζας ηρεμίας, ρ_c	2.134(-13)	3.198(-01)	2.874(+15)
Ακτίνα, R	9.334(+05)	7.625(-01)	9.334(+05)
Βαρυτική μάζα, M	2.004(+05)	1.637(-01)	2.699(+33)
Βαρυονική μάζα, M_B	2.202(+05)	1.799(-01)	2.965(+33)
Ιδιομάζα, M_P	2.506(+05)	2.047(-01)	3.376(+33)
Διορθώσεις από την ομοιόμορφη περιστροφή (με Κεπλεριανή γωνιακή ταχύτητα)			
Κεπλεριανή γωνιακή ταχύτητα, Ω_K	3.333(-07)	4.080(-01)	9.992(+03)
Λόγος Κεπλεριανής προς την μέγιστη γωνιακή ταχύτητα, Ω_K/Ω_{\max}	6.714(-01)	6.714(-01)	6.714(-01)
Στροφορμή, J	1.954(+10)	1.304(-02)	7.891(+48)
Ροπή αδράνειας, I	5.864(+16)	3.196(-02)	7.897(+44)
Περιστροφική κινητική ενέργεια, T	3.257(+03)	2.661(-03)	3.943(+52)
Βαρυτική δυναμική ενέργεια, $ W $	5.346(+04)	4.367(-02)	6.472(+53)
Λόγος Περιστροφικής κινητικής ενέργειας προς Βαρυτική δυναμική ενέργεια, $T/ W $	6.092(-02)	6.092(-02)	6.092(-02)
Αύξηση βαρυτικής μάζας, δM	1.863(+04)	1.522(-02)	2.509(+32)
Αύξηση βαρυονικής μάζας, δM_B	2.035(+04)	1.662(-02)	2.740(+32)
Αύξηση ιδιομάζας, δM_P	2.236(+04)	1.826(-02)	3.011(+32)
Αύξηση ακτίνας, δR_{SD}	3.709(+04)	3.030(-02)	3.709(+04)
Τρίτης τάξης διόρθωση στροφορμής, δJ	6.810(+09)	4.544(-03)	2.749(+48)
Τρίτης τάξης διόρθωση ροπής αδράνειας, δI	2.043(+16)	1.114(-02)	2.752(+44)
Τρίτης τάξης διόρθωση περιστροφικής κινητικής ενέργειας, δT	1.135(+03)	9.271(-04)	1.374(+52)
Τρίτης τάξης διόρθωση βαρυτικής δυναμικής ενέργειας, $ \delta W $	4.865(+03)	3.974(-03)	5.889(+52)
Τετραπολική ροπή, Q	5.593(+15)	3.049(-03)	1.366(+100)
Ποσότητες διορθωμένες μέχρι την τετραπολική παραμόρφωση και την τρίτη τάξη στη γωνιακή ταχύτητα			
Ακτίνα, $R + \delta R_{SD}$	9.705(+05)	7.928(-01)	9.705(+05)
Βαρυτική μάζα, $M + \delta M$	2.191(+05)	1.789(-01)	2.950(+33)
Βαρυονική μάζα, $M_B + \delta M_B$	2.405(+05)	1.965(-01)	3.239(+33)
Ιδιομάζα, $M_P + \delta M_P$	2.730(+05)	2.230(-01)	3.677(+33)
Στροφορμή, $J + \delta J$	2.635(+10)	1.759(-02)	1.064(+49)
Ροπή αδράνειας, $I + \delta I$	7.907(+16)	4.310(-02)	1.065(+45)
Περιστροφική κινητική ενέργεια, $T + \delta T$	4.392(+03)	3.588(-03)	5.316(+52)
Βαρυτική δυναμική ενέργεια, $ W + \delta W $	5.833(+04)	4.765(-02)	7.061(+53)
Γεωμετρικά χαρακτηριστικά του ομοιόμορφα περιστρεφόμενου αστέρα			
Πολική ακτίνα, \bar{r}_p	8.353(+05)	6.824(-01)	8.353(+05)
Ισημερινή ακτίνα, \bar{r}_e	1.038(+06)	8.480(-01)	1.038(+06)
Λόγος πολικής προς ισημερινή ακτίνα, \bar{r}_p/\bar{r}_e	8.047(-01)	8.047(-01)	8.047(-01)
Εκκεντρότητα, $e(\bar{r}_p, \bar{r}_e)$	7.377(-01)	7.377(-01)	7.377(-01)
Πολική περιφερειακή ακτίνα, R_p	8.240(+05)	6.731(-01)	8.240(+05)
Ισημερινή περιφερειακή ακτίνα, R_e	1.044(+06)	8.526(-01)	1.044(+06)
Λόγος πολικής προς ισημερινή περιφερειακή ακτίνα, R_p/R_e	7.895(-01)	7.895(-01)	7.895(-01)
Εκκεντρότητα, $e(R_p, R_e)$	7.774(-01)	7.774(-01)	7.774(-01)

Πίνακας 4.2: Αριθμητικά αποτελέσματα για πολυτροπικό μοντέλο μέγιστης μάζας με $n = 1.5$ ομοιόμορφη περιστροφή με Κεπλεριανή γωνιακή ταχύτητα.

	βαρυτικές μονάδες	πολυτροπικές μονάδες	cgs μονάδες
Μη περιστρεφόμενος αστéρας			
Πολυτροπική σταθερά, K	3.389(+07)	1.000(+00)	5.380(+09)
Κεντρική πυκνότητα μάζας-ενέργειας, E_c	3.631(-13)	7.163(-02)	4.890(+15)
Κεντρική πυκνότητα μάζας ηρεμίας, ρ_c	2.962(-13)	5.843(-02)	3.989(+15)
Ακτίνα, R	8.727(+05)	1.965(+00)	8.727(+05)
Βαρυτική μάζα, M	1.175(+05)	2.645(-01)	1.582(+33)
Βαρουσική μάζα, M_B	1.228(+05)	2.765(-01)	1.654(+33)
Ιδιομάζα, M_P	1.363(+05)	3.069(-01)	1.836(+33)
Διορθώσεις από την ομοιόμορφη περιστροφή (με Κεπλεριανή γωνιακή ταχύτητα)			
Κεπλεριανή γωνιακή ταχύτητα, Ω_K	2.658(-07)	1.180(-01)	7.967(+03)
Λόγος Κεπλεριανής προς την μέγιστη γωνιακή ταχύτητα, Ω_K/Ω_{\max}	6.321(-01)	6.321(-01)	6.321(-01)
Στροφορμή, J	5.482(+09)	2.779(-02)	2.213(+48)
Ροπή αδράνειας, I	2.063(+16)	2.354(-01)	2.778(+44)
Περιστροφική κινητική ενέργεια, T	7.284(+02)	1.640(-03)	8.817(+51)
Βαρυτική δυναμική ενέργεια, $ W $	1.954(+04)	4.400(-02)	2.365(+53)
Λόγος Περιστροφικής κινητικής ενέργειας προς Βαρυτική δυναμική ενέργεια, $T/ W $	3.728(-02)	3.728(-02)	3.728(-02)
Αύξηση βαρυτικής μάζας, δM	8.462(+03)	1.905(-02)	1.140(+32)
Αύξηση βαρουσικής μάζας, δM_B	9.056(+03)	2.039(-02)	1.220(+32)
Αύξηση ιδιομάζας, δM_P	9.759(+03)	2.197(-02)	1.314(+32)
Αύξηση ακτίνας, δR_{SD}	4.899(+04)	1.103(-01)	4.899(+04)
Τρίτης τάξης διόρθωση στροφορμής, δJ	1.613(+09)	8.178(-03)	6.514(+47)
Τρίτης τάξης διόρθωση ροπής αδράνειας, δI	6.070(+15)	6.929(-02)	8.176(+43)
Τρίτης τάξης διόρθωση περιστροφικής κινητικής ενέργειας, δT	2.144(+02)	4.827(-04)	2.595(+51)
Τρίτης τάξης διόρθωση βαρυτικής δυναμικής ενέργειας, $ \delta W $	1.511(+03)	3.403(-03)	1.830(+52)
Τετραπολική ροπή, Q	1.629(+15)	1.859(-02)	3.980(+99)
Ποσότητες διορθωμένες μέχρι την τετραπολική παραμόρφωση και την τρίτη τάξη στη γωνιακή ταχύτητα			
Ακτίνα, $R + \delta R_{SD}$	9.217(+05)	2.075(+00)	9.217(+05)
Βαρυτική μάζα, $M + \delta M$	1.260(+05)	2.836(-01)	1.696(+33)
Βαρουσική μάζα, $M_B + \delta M_B$	1.318(+05)	2.969(-01)	1.776(+33)
Ιδιομάζα, $M_P + \delta M_P$	1.461(+05)	3.289(-01)	1.967(+33)
Στροφορμή, $J + \delta J$	7.095(+09)	3.597(-02)	2.865(+48)
Ροπή αδράνειας, $I + \delta I$	2.670(+16)	3.047(-01)	3.596(+44)
Περιστροφική κινητική ενέργεια, $T + \delta T$	9.428(+02)	2.123(-03)	1.141(+52)
Βαρυτική δυναμική ενέργεια, $ W + \delta W $	2.105(+04)	4.740(-02)	2.548(+53)
Γεωμετρικά χαρακτηριστικά του ομοιόμορφου περιστρεφόμενου αστéρα			
Πολική ακτίνα, \bar{r}_p	8.025(+05)	1.807(+00)	8.025(+05)
Ισημερινή ακτίνα, \bar{r}_e	9.814(+05)	2.210(+00)	9.814(+05)
Λόγος πολικής προς ισημερινή ακτίνα, \bar{r}_p/\bar{r}_e	8.177(-01)	8.177(-01)	8.177(-01)
Εκκεντρότητα, $e(\bar{r}_p, \bar{r}_e)$	7.039(-01)	7.039(-01)	7.039(-01)
Πολική περιφερειακή ακτίνα, R_p	7.994(+05)	1.780(+00)	7.994(+05)
Ισημερινή περιφερειακή ακτίνα, R_e	9.829(+05)	2.213(+00)	9.829(+05)
Λόγος πολικής προς ισημερινή περιφερειακή ακτίνα, R_p/R_e	8.133(-01)	8.133(-01)	8.133(-01)
Εκκεντρότητα, $e(R_p, R_e)$	7.153(-01)	7.153(-01)	7.153(-01)

Πίνακας 4.3: Αριθμητικά αποτελέσματα για πολυτροπικό μοντέλο μέγιστης μάζας με $n = 2.0$ ομοιόμορφη περιστροφή με Κεπλεριανή γωνιακή ταχύτητα.

	βαρυτικές μονάδες	πολυτροπικές μονάδες	cgs μονάδες
Μη περιστρεφόμενος αστέρας			
Πολυτροπική σταθερά, K	1.291(+05)	1.000(+00)	1.000(+12)
Κεντρική πυκνότητα μάζας-ενέργειας, E_c	3.457(-13)	5.765(-03)	4.657(+15)
Κεντρική πυκνότητα μάζας ηρεμίας, ρ_c	3.027(-13)	5.047(-03)	4.077(+15)
Ακτίνα, R	8.962(+05)	6.941(+00)	8.962(+05)
Βαρυτική μάζα, M	6.662(+04)	5.160(-01)	8.973(+32)
Βαρυονική μάζα, M_B	6.778(+04)	5.249(-01)	9.129(+32)
Ιδιομάζα, M_P	7.286(+04)	5.643(-01)	9.813(+32)
Διορθώσεις από την ομοιόμορφη περιστροφή (με Κεπλεριανή γωνιακή ταχύτητα)			
Κεπλεριανή γωνιακή ταχύτητα, Ω_K	1.844(-07)	2.381(-02)	5.528(+03)
Λόγος Κεπλεριανής προς την μέγιστη γωνιακή ταχύτητα, Ω_K/Ω_{\max}	6.061(-01)	6.061(-01)	6.061(-01)
Στροφορμή, J	1.571(+09)	9.424(-02)	6.344(+47)
Ροπή αδράνειας, I	8.522(+15)	3.958(+00)	1.148(+44)
Περιστροφική κινητική ενέργεια, T	1.449(+02)	1.122(-03)	1.754(+51)
Βαρυτική δυναμική ενέργεια, $ W $	6.384(+03)	4.944(-02)	7.728(+52)
Λόγος Περιστροφικής κινητικής ενέργειας προς Βαρυτική δυναμική ενέργεια, $T/ W $	2.269(-02)	2.269(-02)	2.269(-02)
Αύξηση βαρυτικής μάζας, δM	3.520(+03)	2.726(-02)	4.741(+31)
Αύξηση βαρυονικής μάζας, δM_B	3.663(+03)	2.837(-02)	4.934(+31)
Αύξηση ιδιομάζας, δM_P	3.853(+03)	2.984(-02)	5.189(+31)
Αύξηση ακτίνας, δR_{SD}	6.042(+04)	4.679(-01)	6.042(+04)
Τρίτης τάξης διόρθωση στροφορμής, δJ	3.651(+08)	2.190(-02)	1.474(+47)
Τρίτης τάξης διόρθωση ροπής αδράνειας, δI	1.980(+15)	9.197(-01)	2.667(+43)
Τρίτης τάξης διόρθωση περιστροφικής κινητικής ενέργειας, δT	3.366(+01)	2.607(-04)	4.075(+50)
Τρίτης τάξης διόρθωση βαρυτικής δυναμικής ενέργειας, $ \delta W $	3.666(+02)	2.839(-03)	4.438(+51)
Τετραπολική ροπή, Q	5.868(+14)	2.726(-01)	1.434(+99)
Ποσότητες διορθωμένες μέχρι την τετραπολική παραμόρφωση και την τρίτη τάξη στη γωνιακή ταχύτητα			
Ακτίνα, $R + \delta R_{SD}$	9.566(+05)	7.408(+00)	9.566(+05)
Βαρυτική μάζα, $M + \delta M$	7.014(+04)	5.432(-01)	9.447(+32)
Βαρυονική μάζα, $M_B + \delta M_B$	7.145(+04)	5.533(-01)	9.623(+32)
Ιδιομάζα, $M_P + \delta M_P$	7.672(+04)	5.941(-01)	1.033(+33)
Στροφορμή, $J + \delta J$	1.936(+09)	1.161(-01)	7.819(+47)
Ροπή αδράνειας, $I + \delta I$	1.050(+16)	4.878(+00)	1.414(+44)
Περιστροφική κινητική ενέργεια, $T + \delta T$	1.785(+02)	1.383(-03)	2.161(+51)
Βαρυτική δυναμική ενέργεια, $ W + \delta W $	6.751(+03)	5.228(-02)	8.171(+52)
Γεωμετρικά χαρακτηριστικά του ομοιόμορφα περιστρεφόμενου αστέρα			
Πολική ακτίνα, \bar{r}_p	8.416(+05)	6.518(+00)	8.416(+05)
Ισημερινή ακτίνα, \bar{r}_e	1.014(+06)	7.854(+00)	1.014(+06)
Λόγος πολικής προς ισημερινή ακτίνα, \bar{r}_p/\bar{r}_e	8.299(-01)	8.299(-01)	8.299(-01)
Εκκεντρότητα, $e(\bar{r}_p, \bar{r}_e)$	6.723(-01)	6.723(-01)	6.723(-01)
Πολική περιφερειακή ακτίνα, R_p	8.407(+05)	6.511(+00)	8.407(+05)
Ισημερινή περιφερειακή ακτίνα, R_e	1.015(+06)	7.857(+00)	1.015(+06)
Λόγος πολικής προς ισημερινή περιφερειακή ακτίνα, R_p/R_e	8.286(-01)	8.286(-01)	8.286(-01)
Εκκεντρότητα, $e(R_p, R_e)$	6.755(-01)	6.755(-01)	6.755(-01)

Πίνακας 4.4: Αριθμητικά αποτελέσματα για πολυτροπικό μοντέλο μέγιστης μάζας με $n = 2.5$ ομοιόμορφη περιστροφή με Κεπλεριανή γωνιακή ταχύτητα.

	βαρυτικές μονάδες	πολυτροπικές μονάδες	cgS μονάδες
Μη περιστρεφόμενος αστέρας			
Πολυτροπική σταθερά, K	2.980(+03)	1.000(+00)	1.500(+13)
Κεντρική πυκνότητα μάζας-ενέργειας, E_c	2.591(-13)	1.256(-04)	3.489(+15)
Κεντρική πυκνότητα μάζας ηρεμίας, ρ_c	2.428(-13)	1.177(-04)	3.270(+15)
Ακτίνα, R	8.998(+05)	4.087(+01)	8.998(+05)
Βαρυτική μάζα, M	2.743(+04)	1.246(+00)	3.694(+32)
Βαρουσική μάζα, M_B	2.755(+04)	1.251(+00)	3.710(+32)
Ιδιομάζα, M_P	2.858(+04)	1.298(+00)	3.849(+32)
Διορθώσεις από την ομοιόμορφη περιστροφή (με Κεπλεριανή γωνιακή ταχύτητα)			
Κεπλεριανή γωνιακή ταχύτητα, Ω_K	1.141(-07)	2.512(-03)	3.420(+03)
Λόγος Κεπλεριανής προς την μέγιστη γωνιακή ταχύτητα, Ω_K/Ω_{\max}	5.880(-01)	5.880(-01)	5.880(-01)
Στροφορμή, J	2.787(+08)	5.751(-01)	1.125(+47)
Ροπή αδράνειας, I	2.443(+15)	2.290(+02)	3.290(+43)
Περιτροπική κινητική ενέργεια, T	1.590(+01)	7.221(-04)	1.924(+50)
Βαρυτική δυναμική ενέργεια, $ W $	1.167(+03)	5.303(-02)	1.413(+52)
Λόγος Περιτροπικής κινητικής ενέργειας προς Βαρυτική δυναμική ενέργεια, $T/ W $	1.362(-02)	1.362(-02)	1.362(-02)
Αύξηση βαρυτικής μάζας, δM	1.017(+03)	4.619(-02)	1.369(+31)
Αύξηση βαρουσικής μάζας, δM_B	1.033(+03)	4.694(-02)	1.392(+31)
Αύξηση ιδιομάζας, δM_P	1.060(+03)	4.814(-02)	1.427(+31)
Αύξηση ακτίνας, δR_{SD}	6.773(+04)	3.077(+00)	6.773(+04)
Τρίτης τάξης διόρθωση στροφορμής, δJ	5.003(+07)	1.032(-01)	2.020(+46)
Τρίτης τάξης διόρθωση ροπής αδράνειας, δI	4.385(+14)	4.110(+01)	5.906(+42)
Τρίτης τάξης διόρθωση περιτροπικής κινητικής ενέργειας, δT	2.854(+00)	1.296(-04)	3.455(+49)
Τρίτης τάξης διόρθωση βαρυτικής δυναμικής ενέργειας, $ \delta W $	4.574(+01)	2.078(-03)	5.537(+50)
Τετραπολική ροπή, Q	1.499(+14)	1.405(+01)	3.663(+98)
Ποσότητες διορθωμένες μέχρι την τετραπολική παραμόρφωση και την τρίτη τάξη στη γωνιακή ταχύτητα			
Ακτίνα, $\bar{R} + \delta R_{SD}$	9.675(+05)	4.395(+01)	9.675(+05)
Βαρυτική μάζα, $M + \delta M$	2.844(+04)	1.292(+00)	3.831(+32)
Βαρουσική μάζα, $M_B + \delta M_B$	2.858(+04)	1.298(+00)	3.849(+32)
Ιδιομάζα, $M_P + \delta M_P$	2.964(+04)	1.346(+00)	3.992(+32)
Στροφορμή, $J + \delta J$	3.287(+08)	6.783(-01)	1.327(+47)
Ροπή αδράνειας, $I + \delta I$	2.881(+15)	2.701(+02)	3.881(+43)
Περιτροπική κινητική ενέργεια, $T + \delta T$	1.875(+01)	8.518(-04)	2.270(+50)
Βαρυτική δυναμική ενέργεια, $ W + \delta W $	1.213(+03)	5.511(-02)	1.469(+52)
Γεωμετρικά χαρακτηριστικά του ομοιόμορφου περιστρεφόμενου αστέρα			
Πολική ακτίνα, \bar{r}_p	8.590(+05)	3.902(+01)	8.590(+05)
Ισημερινή ακτίνα, \bar{r}_e	1.022(+06)	4.641(+01)	1.022(+06)
Λόγος πολικής προς ισημερινή ακτίνα, \bar{r}_p/\bar{r}_e	8.407(-01)	8.407(-01)	8.407(-01)
Εκκεντρότητα, $e(\bar{r}_p, \bar{r}_e)$	6.442(-01)	6.442(-01)	6.442(-01)
Πολική περιφερειακή ακτίνα, R_p	8.588(+05)	3.901(+01)	8.588(+05)
Ισημερινή περιφερειακή ακτίνα, R_e	1.022(+06)	4.642(+01)	1.022(+06)
Λόγος πολικής προς ισημερινή περιφερειακή ακτίνα, R_p/R_e	8.404(-01)	8.404(-01)	8.404(-01)
Εκκεντρότητα, $e(R_p, R_e)$	6.449(-01)	6.449(-01)	6.449(-01)

Πίνακας 4.5: Αριθμητικά αποτελέσματα για πολυτροπικό μοντέλο μέγιστης μάζας με $n = 2.9$ ομοιόμορφη περιστροφή με Κεπλεριανή γωνιακή ταχύτητα.

	βαρυτικές μονάδες	πολυτροπικές μονάδες	cgS μονάδες
Μη περιστρεφόμενος αστέρας			
Πολυτροπική σταθερά, K	1.449(+02)	1.000(+00)	2.600(+13)
Κεντρική πυκνότητα μάζας-ενέργειας, E_c	8.108(-14)	1.500(-07)	1.092(+15)
Κεντρική πυκνότητα μάζας ηρεμίας, ρ_c	8.005(-14)	1.481(-07)	1.078(+15)
Ακτίνα, R	8.508(+05)	6.255(+02)	8.508(+05)
Βαρυτική μάζα, M	4.397(+03)	3.233(+00)	5.923(+31)
Βαρουσική μάζα, M_B	4.406(+03)	3.239(+00)	5.934(+31)
Ιδιομάζα, M_P	4.438(+03)	3.263(+00)	5.978(+31)
Διορθώσεις από την ομοιόμορφη περιστροφή (με Κεπλεριανή γωνιακή ταχύτητα)			
Κεπλεριανή γωνιακή ταχύτητα, Ω_K	4.878(-08)	6.635(-05)	1.463(+03)
Λόγος Κεπλεριανής προς την μέγιστη γωνιακή ταχύτητα, Ω_K/Ω_{\max}	5.773(-01)	5.773(-01)	5.773(-01)
Στροφορμή, J	1.271(+07)	6.868(+00)	5.130(+45)
Ροπή αδράνειας, I	2.605(+14)	1.035(+05)	3.508(+42)
Περιστροφική κινητική ενέργεια, T	3.099(-01)	2.279(-04)	3.752(+48)
Βαρυτική δυναμική ενέργεια, $ W $	4.117(+01)	3.027(-02)	4.983(+50)
Λόγος Περιστροφικής κινητικής ενέργειας προς Βαρυτική δυναμική ενέργεια, $T/ W $	7.529(-03)	7.529(-03)	7.529(-03)
Αύξηση βαρυτικής μάζας, δM	1.204(+02)	8.855(-02)	1.622(+30)
Αύξηση βαρουσικής μάζας, δM_B	1.211(+02)	8.902(-02)	1.631(+30)
Αύξηση ιδιομάζας, δM_P	1.217(+02)	8.946(-02)	1.639(+30)
Αύξηση ακτίνας, δR_{SD}	6.831(+04)	5.022(+01)	6.831(+04)
Τρίτης τάξης διόρθωση στροφορμής, δJ	1.945(+06)	1.051(+00)	7.853(+44)
Τρίτης τάξης διόρθωση ροπής αδράνειας, δI	3.987(+13)	1.584(+04)	5.370(+41)
Τρίτης τάξης διόρθωση περιστροφικής κινητικής ενέργειας, δT	4.744(-02)	3.488(-05)	5.743(+47)
Τρίτης τάξης διόρθωση βαρυτικής δυναμικής ενέργειας, $ \delta W $	1.287(+00)	9.464(-04)	1.558(+49)
Τετραπολική ροπή, Q	1.926(+13)	7.655(+03)	4.705(+97)
Ποσότητες διορθωμένες μέχρι την τετραπολική παραμόρφωση και την τρίτη τάξη στη γωνιακή ταχύτητα			
Ακτίνα, $R + \delta R_{SD}$	9.191(+05)	6.757(+02)	9.191(+05)
Βαρυτική μάζα, $M + \delta M$	4.518(+03)	3.322(+00)	6.085(+31)
Βαρουσική μάζα, $M_B + \delta M_B$	4.527(+03)	3.328(+00)	6.097(+31)
Ιδιομάζα, $M_P + \delta M_P$	4.560(+03)	3.353(+00)	6.141(+31)
Στροφορμή, $J + \delta J$	1.465(+07)	7.919(+00)	5.915(+45)
Ροπή αδράνειας, $I + \delta I$	3.003(+14)	1.194(+05)	4.045(+42)
Περιστροφική κινητική ενέργεια, $T + \delta T$	3.574(-01)	2.627(-04)	4.326(+48)
Βαρυτική δυναμική ενέργεια, $ W + \delta W $	4.245(+01)	3.121(-02)	5.139(+50)
Γεωμετρικά χαρακτηριστικά του ομοιόμορφα περιστρεφόμενου αστέρα			
Πολική ακτίνα, \bar{r}_p	8.192(+05)	6.023(+02)	8.192(+05)
Ισημερινή ακτίνα, \bar{r}_e	9.690(+05)	7.124(+02)	9.690(+05)
Λόγος πολικής προς ισημερινή ακτίνα, \bar{r}_p/\bar{r}_e	8.454(-01)	8.454(-01)	8.454(-01)
Εκκεντρότητα, $e(\bar{r}_p, \bar{r}_e)$	6.319(-01)	6.319(-01)	6.319(-01)
Πολική περιφερειακή ακτίνα, R_p	8.192(+05)	6.731(+02)	8.192(+05)
Ισημερινή περιφερειακή ακτίνα, R_e	9.690(+05)	7.124(+02)	9.690(+05)
Λόγος πολικής προς ισημερινή περιφερειακή ακτίνα, R_p/R_e	8.453(-01)	8.453(-01)	8.453(-01)
Εκκεντρότητα, $e(R_p, R_e)$	6.320(-01)	6.320(-01)	6.320(-01)

Πίνακας 4.6: Αριθμητικές τιμές των $\rho_{(re)c}$, $\rho_{(im)c}$ και $\rho_{(im)c}/\rho_{(re)c}$, για διάφορα πολυτροπικά μοντέλα μέγιστης μάζας, σε βαρυτικές μονάδες.

Ποσότητα	$n = 1.0$	$n = 1.5$	$n = 2.0$	$n = 2.5$	$n = 2.9$
$\rho_{c(re)}$	2.134(-13)	2.962(-13)	3.027(-13)	2.428(-13)	8.005(-14)
$\rho_{c(im)}$	0.000(+00)	2.865(-15)	2.556(-15)	9.980(-16)	8.000(-16)
$\rho_{c(im)}/\rho_{c(re)}$	0.000(+00)	9.673(-03)	8.443(-03)	4.111(-03)	9.993(-03)

Πίνακας 4.7: Αριθμητικές τιμές των $\Phi_{(re)1}$, $\Phi_{(im)1}$, $\Omega_{(re)}^{arb}$ και $\Omega_{(im)}^{arb}$, για διάφορα πολυτροπικά μοντέλα, σε βαρυτικές μονάδες.

Ποσότητα	$n = 1.0$	$n = 1.5$	$n = 2.0$	$n = 2.5$	$n = 2.9$
$\Phi_{(re)1}$	-7.750(-01)	-4.763(-01)	-2.737(-01)	-1.212(-01)	-2.227(-02)
$\Phi_{(im)1}$	+0.000(+00)	-2.284(-03)	-9.639(-04)	-1.833(-04)	-7.574(-05)
$\Omega_{(re)}^{arb}$	+1.648(-10)	+1.132(-10)	+8.721(-11)	+7.142(-11)	+6.265(-11)
$\Omega_{(im)}^{arb}$	+0.000(+00)	+3.306(-15)	+1.094(-13)	+1.727(-14)	+6.315(-15)

Πίνακας 4.8: Αριθμητικές τιμές του \mathcal{K}' , που λαμβάνεται: (α) από την λύση του γραμμικού συστήματος (3.19)–(3.20), ($\mathcal{K}' = \widetilde{\mathcal{K}'}$) και (β) από τον αλγόριθμο λεπτής ρύθμισης (§ 3.1.3, Εξς. (3.49)–(3.53)), ($\mathcal{K}' = \overline{\mathcal{K}'}$) και την επί τοις χιλίοις διαφορά αυτών, για διάφορα πολυτροπικά μοντέλα.

Ποσότητα	$n = 1.0$	$n = 1.5$	$n = 2.0$	$n = 2.5$	$n = 2.9$
$\widetilde{\mathcal{K}'}$	-1. - 4.1(-04)	-1. - 3.1(-06)	-1. - 2.2(-06)	-1. - 1.9(-06)	-1. - 3.3(-06)
$\overline{\mathcal{K}'}$	-1. - 9.4(-04)	-1. - 6.9(-06)	-1. - 5.1(-06)	-1. - 4.8(-06)	-1. - 1.2(-05)
$(\overline{\mathcal{K}'} - \widetilde{\mathcal{K}'}) \times 1000/\widetilde{\mathcal{K}'}$	5.27(-01)	3.75(-03)	2.90(-03)	2.93(-03)	8.38(-03)

Πίνακας 4.9: Αριθμητικές τιμές των ΔP_0 , ΔP_2 , $\Delta P_0/P_{c(re)}$, $\Delta P_2/P_{c(re)}$, για διάφορα πολυτροπικά μοντέλα, σε βαρυτικές μονάδες.

Ποσότητα	$n = 1.0$	$n = 1.5$	$n = 2.0$	$n = 2.5$	$n = 2.9$
ΔP_0	+8.131(-16)	+7.830(-17)	-1.109(-17)	+3.455(-19)	+1.634(-20)
ΔP_2	-4.182(-16)	+1.133(-16)	+3.242(-17)	+7.303(-19)	-1.853(-21)
$\Delta P_0/P_{c(re)}$	+1.192(-02)	+1.756(-03)	-5.155(-04)	+5.309(-05)	+4.623(-05)
$\Delta P_2/P_{c(re)}$	-6.129(-03)	+2.540(-03)	+1.507(-03)	+1.122(-04)	-5.241(-06)

Πίνακας 4.10: Αριθμητικές τιμές των ΔE_0 , ΔE_2 , $\Delta E_0/E_{c(re)}$, $\Delta E_2/E_{c(re)}$, για διάφορα πολυτροπικά μοντέλα, σε βαρυτικές μονάδες.

Ποσότητα	$n = 1.0$	$n = 1.5$	$n = 2.0$	$n = 2.5$	$n = 2.9$
ΔE_0	-1.316(-14)	-9.573(-16)	+2.518(-15)	+8.422(-17)	-2.676(-17)
ΔE_2	-6.618(-15)	-7.390(-16)	-1.711(-15)	+1.614(-16)	+5.526(-17)
$\Delta E_0/E_{c(re)}$	-4.672(-02)	-2.637(-03)	+7.282(-03)	+3.251(-04)	-3.301(-04)
$\Delta E_2/E_{c(re)}$	-2.350(-02)	-2.035(-03)	-4.948(-03)	+6.231(-04)	+6.816(-04)

Πίνακας 4.11: Αριθμητικές τιμές των $(\bar{r}_p)_1^a$, $(\bar{r}_e)_1^a$, $(\bar{r}_p/\bar{r}_e)_1^a$, $(\bar{r}_p/\bar{r}_e)_2^b$, $(\bar{r}_p/\bar{r}_e)_3^y$, $(\%)_{13}^\delta$, $(\%)_{23}^\varepsilon$.

Ποσότητα	$n = 1.0$	$n = 1.5$	$n = 2.0$	$n = 2.5$	$n = 2.9$
$(\bar{r}_p)_1$	6.967(+05)	6.749(+05)	7.175(+05)	7.351(+05)	6.999(+05)
$(\bar{r}_e)_1$	1.107(+06)	1.045(+06)	1.076(+06)	1.084(+06)	1.029(+06)
$(\bar{r}_p/\bar{r}_e)_1$	6.291(-01)	6.458(-01)	6.667(-01)	6.784(-01)	6.804(-01)
$(\bar{r}_p/\bar{r}_e)_2$	8.047(-01)	8.177(-01)	8.299(-01)	8.407(-01)	8.454(-01)
$(\bar{r}_p/\bar{r}_e)_3$	5.875(-01)	6.188(-01)	6.406(-01)	6.563(-01)	6.625(-01)
$(\%)_{13}$	7.089(+00)	4.373(+00)	4.073(+00)	3.368(+00)	2.696(+00)
$(\%)_{23}$	3.697(+01)	3.216(+01)	2.954(+01)	2.810(+01)	2.760(+01)

^a Υπολογίζονται από τις Εξς. (3.25)–(3.28), με περιεχόμενη τιμή της \mathcal{K}' , αυτήν που λαμβάνεται από τον αλγόριθμο λεπτής ρύθμισης [§ 3.1.3, Εξς. (3.49)–(3.53)], ($\mathcal{K}' = \bar{\mathcal{K}}'$).

^b Υπολογίζονται από τις Εξς. (3.25)–(3.28), με περιεχόμενη τιμή της \mathcal{K}' , αυτήν που λαμβάνεται από την λύση του γραμμικού συστήματος (3.19)–(3.20), ($\mathcal{K}' = \bar{\mathcal{K}}'$).

^y Υπολογίζονται από το πακέτο RNS .

^δ Μεταξύ των αποτελεσμάτων της πρώτης και της τρίτης περίπτωσης.

^ε Μεταξύ των αποτελεσμάτων της δεύτερης και της τρίτης περίπτωσης.

Πίνακας 4.12: Ποσοστό (%) της διόρθωσης τρίτης τάξης στην γωνιακή ταχύτητα για τα μεγέθη J , I , T και $|W|$, για διάφορα πολυτροπικά μοντέλα.

Ποσότητα	$n = 1.0$	$n = 1.5$	$n = 2.0$	$n = 2.5$	$n = 2.9$
$(\delta J/J) \times 100\%$	34.85	29.42	23.24	17.95	15.30
$(\delta I/I) \times 100\%$	34.84	29.42	23.23	17.95	15.30
$(\delta T/T) \times 100\%$	34.85	29.43	23.23	17.95	15.31
$(\delta W / W) \times 100\%$	9.10	7.73	5.74	3.92	3.13

Πίνακας 4.13: Αριθμητικές τιμές των Ω , $\rho_{(re)c}$, V_{bound} , V_{free} , από την οικογένεια λύσεων σταθερών βαρυονικών μαζών για πολυτροπικό μοντέλο με $n = 1.0$, βαρυονική μάζα $\tilde{M} = 2.202 \times 10^5$ και ισημερινή ακτίνα του περιστρεφόμενου αστέρα $\bar{r}_e = 1.107 \times 10^6$ (όλες οι τιμές εκφράζονται σε βαρυτικές μονάδες).

Ω	$\rho_{(re)c}$	V_{bound}	V_{free}
3.000×10^{-7}	6.15×10^{-14}	3.36×10^{-1}	4.23×10^{-1}
3.200×10^{-7}	4.65×10^{-14}	3.47×10^{-1}	3.90×10^{-1}
3.300×10^{-7}	3.82×10^{-14}	3.50×10^{-1}	3.67×10^{-1}
3.340×10^{-7}	3.46×10^{-14}	3.50×10^{-1}	3.57×10^{-1}
3.350×10^{-7}	3.36×10^{-14}	3.50×10^{-1}	3.54×10^{-1}
3.361×10^{-7}	3.26×10^{-14}	3.50×10^{-1}	3.50×10^{-1}

Πίνακας 4.14: Όπως στον Πνκ. 4.13, αλλά για $n = 1.5$, βαρυονική μάζα $\tilde{M} = 1.228 \times 10^5$ και ισημερινή ακτίνα του περιστρεφόμενου αστέρα $\bar{r}_e = 1.045 \times 10^6$.

Ω	$\rho_{(re)c}$	V_{bound}	V_{free}
2.30×10^{-7}	5.77×10^{-13}	2.72×10^{-1}	3.32×10^{-1}
2.60×10^{-7}	5.45×10^{-13}	3.04×10^{-1}	3.59×10^{-1}
2.70×10^{-7}	5.50×10^{-13}	3.16×10^{-1}	3.58×10^{-1}
2.80×10^{-7}	5.62×10^{-13}	3.28×10^{-1}	3.56×10^{-1}
2.90×10^{-7}	5.75×10^{-13}	3.40×10^{-1}	3.54×10^{-1}
3.00×10^{-7}	5.84×10^{-13}	3.52×10^{-1}	3.52×10^{-1}

Πίνακας 4.15: Όπως στον Πνκ. 4.13, αλλά για $n = 2.0$, βαρυονική μάζα $\tilde{M} = 6.778 \times 10^4$ και ισημερινή ακτίνα του περιστρεφόμενου αστέρα $\bar{r}_e = 1.076 \times 10^6$.

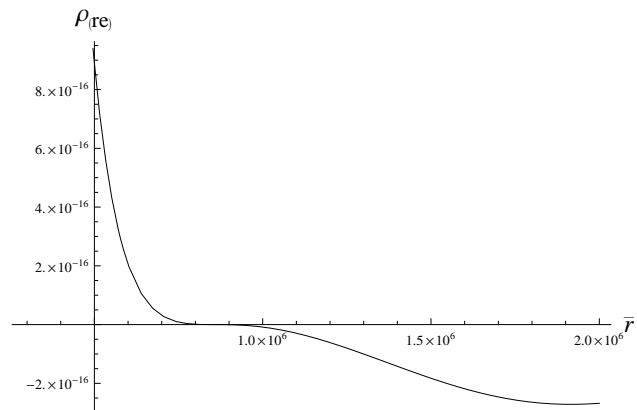
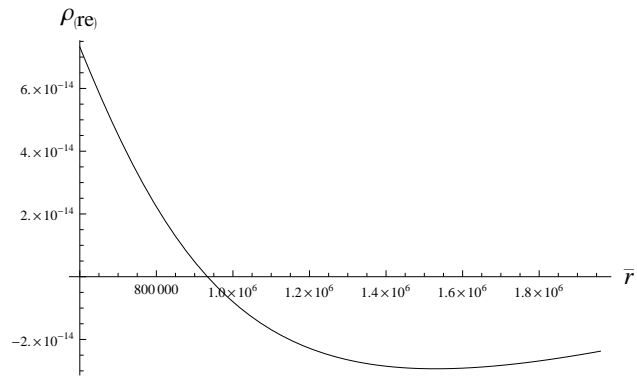
Ω	$\rho_{(re)c}$	V_{bound}	V_{free}
1.60×10^{-7}	5.86×10^{-13}	1.84×10^{-1}	2.60×10^{-1}
1.70×10^{-7}	6.05×10^{-13}	1.96×10^{-1}	2.57×10^{-1}
1.80×10^{-7}	6.25×10^{-13}	2.08×10^{-1}	2.53×10^{-1}
1.90×10^{-7}	6.40×10^{-13}	2.19×10^{-1}	2.49×10^{-1}
2.00×10^{-7}	6.48×10^{-13}	2.31×10^{-1}	2.43×10^{-1}
2.07×10^{-7}	6.67×10^{-13}	2.40×10^{-1}	2.40×10^{-1}

Πίνακας 4.16: Όπως στον Πνκ. 4.13, αλλά για $n = 2.5$, βαρυονική μάζα $\tilde{M} = 2.755 \times 10^4$ και ισημερινή ακτίνα του περιστρεφόμενου αστέρα $\bar{r}_e = 1.084 \times 10^6$.

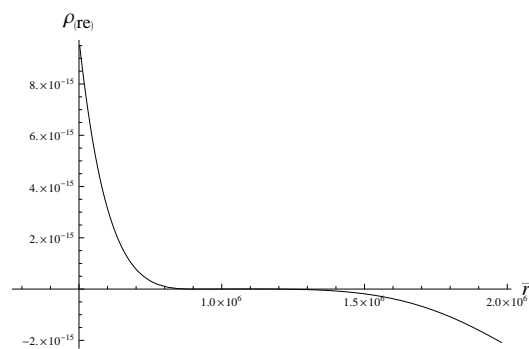
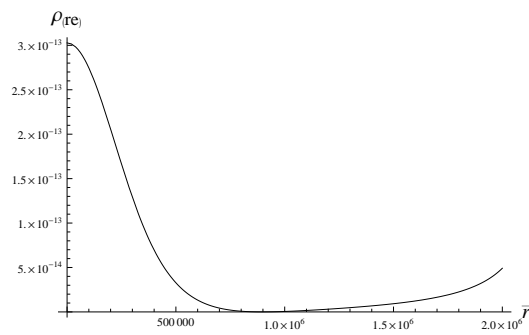
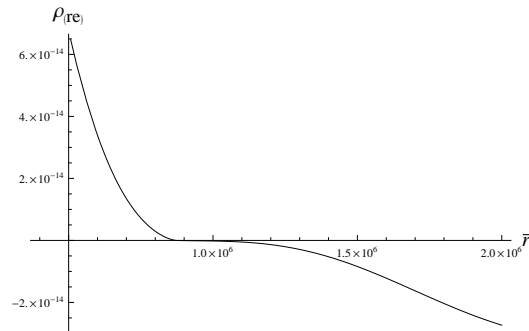
Ω	$\rho_{(re)c}$	V_{bound}	V_{free}
0.800×10^{-7}	6.33×10^{-13}	8.88×10^{-2}	1.62×10^{-1}
1.000×10^{-7}	7.70×10^{-13}	1.11×10^{-1}	1.62×10^{-1}
1.150×10^{-7}	8.20×10^{-13}	1.28×10^{-1}	1.63×10^{-1}
1.400×10^{-7}	9.60×10^{-13}	1.56×10^{-1}	1.64×10^{-1}
1.440×10^{-7}	1.00×10^{-12}	1.60×10^{-1}	1.65×10^{-1}
1.495×10^{-7}	1.03×10^{-12}	1.66×10^{-1}	1.66×10^{-1}

Πίνακας 4.17: Όπως στον Πγκ. 4.13, αλλά για $n = 2.9$, βαρυονική μάζα $\tilde{M} = 4.406 \times 10^3$ και ισημερινή ακτίνα του περιστρεφόμενου αστέρα $\bar{r}_e = 1.029 \times 10^6$.

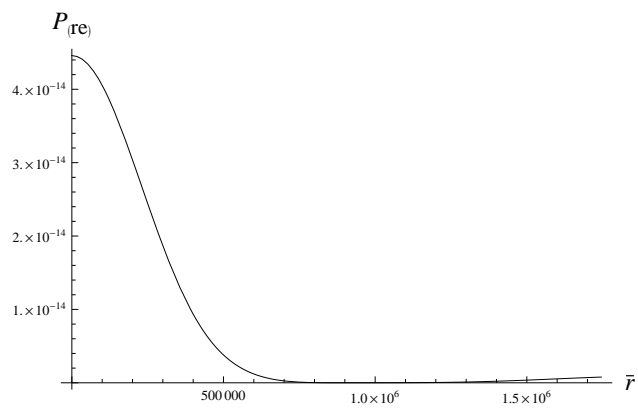
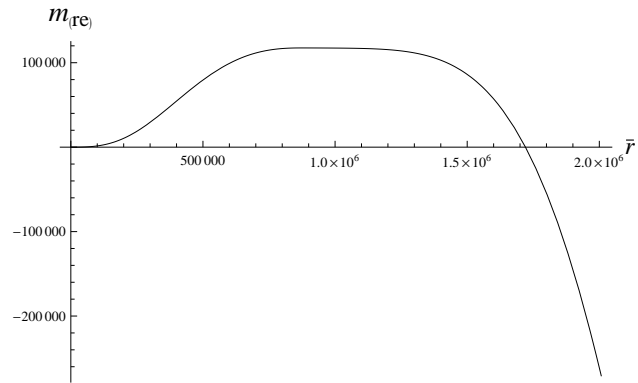
Ω	$\rho_{(re)c}$	V_{bound}	V_{free}
4.50×10^{-8}	1.65×10^{-13}	4.65×10^{-2}	6.59×10^{-2}
5.00×10^{-8}	2.00×10^{-13}	5.16×10^{-2}	6.58×10^{-2}
5.20×10^{-8}	2.50×10^{-13}	5.37×10^{-2}	6.48×10^{-2}
5.60×10^{-8}	2.80×10^{-13}	5.78×10^{-2}	6.47×10^{-2}
6.10×10^{-8}	3.10×10^{-13}	6.29×10^{-2}	6.53×10^{-2}
6.39×10^{-8}	3.22×10^{-13}	6.59×10^{-2}	6.59×10^{-2}



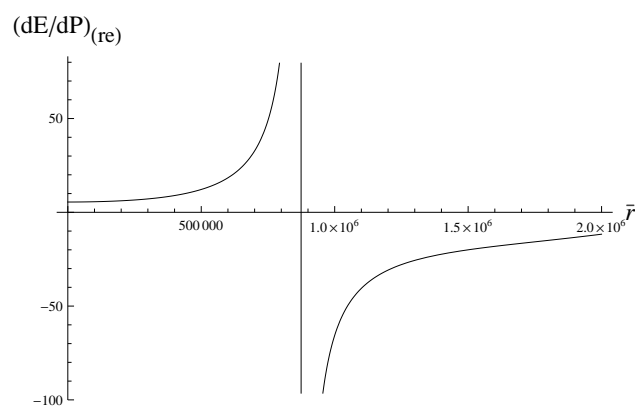
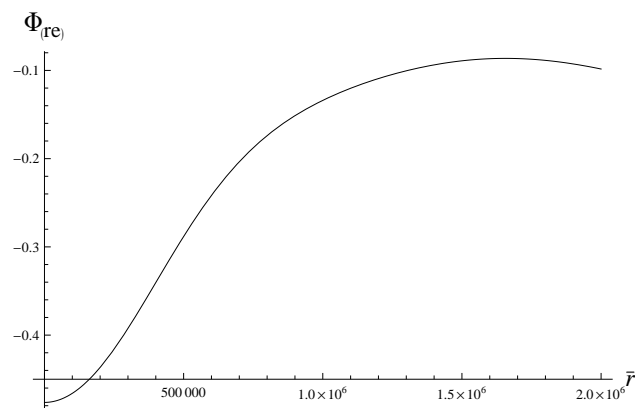
Σχήμα 4.1: Η πυκνότητα μάζας ηρεμίας $\rho_{(re)}$ συναρτήσει της ακτινικής συντεταγμένης \bar{r} , σε βαρυτικές μονάδες, για αδιατάρακτα πολυτροπικά μοντέλα μέγιστης μάζας, με $n = 1.0$ (πάνω σχήμα) και $n = 2.9$ (κάτω σχήμα).



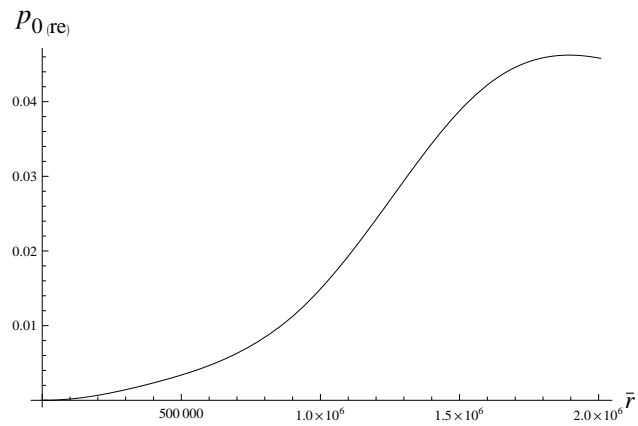
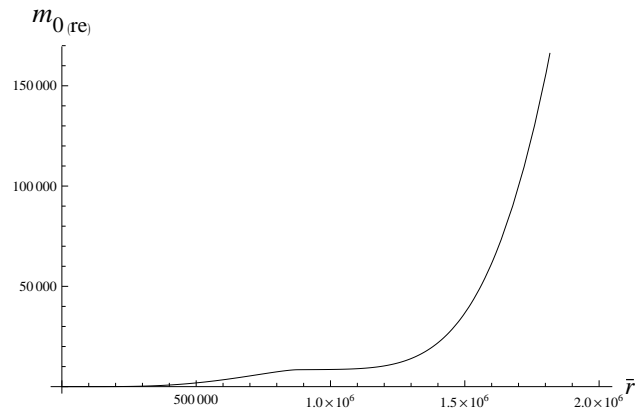
Σχήμα 4.2: Όπως στο Σχ. 4.1, αλλά για πολυτροπικά μοντέλα με $n = 1.5$ (πάνω σχήμα), $n = 2.0$ (μεσαίο σχήμα) και $n = 2.5$ (κάτω σχήμα).



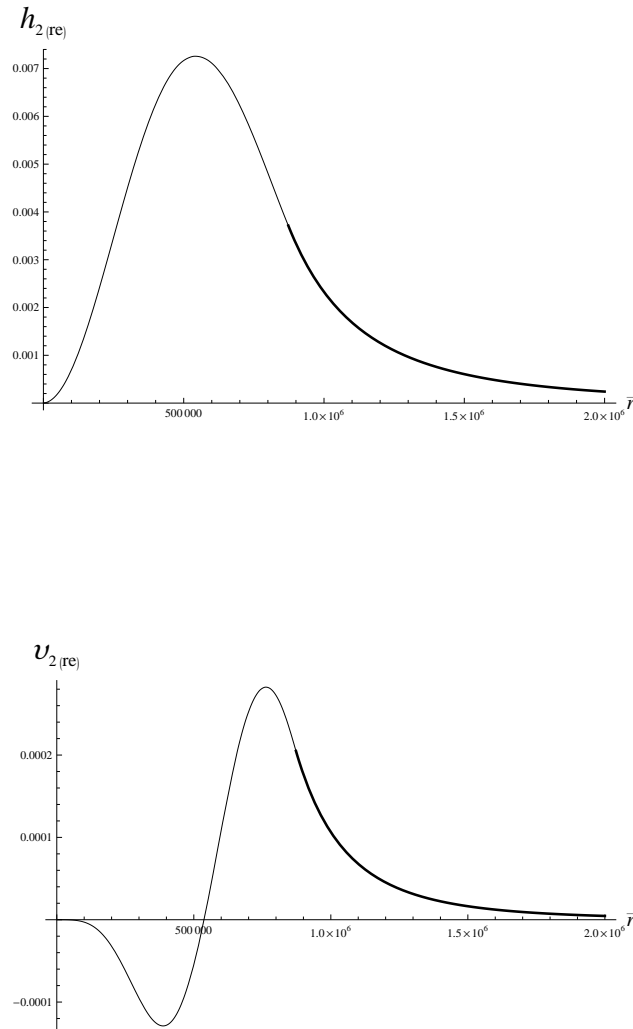
Σχήμα 4.3: Η μάζα $m_{(re)}$ (πάνω σχήμα) και η πίεση P_{re} (κάτω σχήμα) συναρτήσεως της ακτινικής συντεταγμένης \bar{r} , σε βαρυτικές μονάδες, για αδιατάρακτο πολυτροπικό μοντέλο μέγιστης μάζας, με $n = 1.5$.



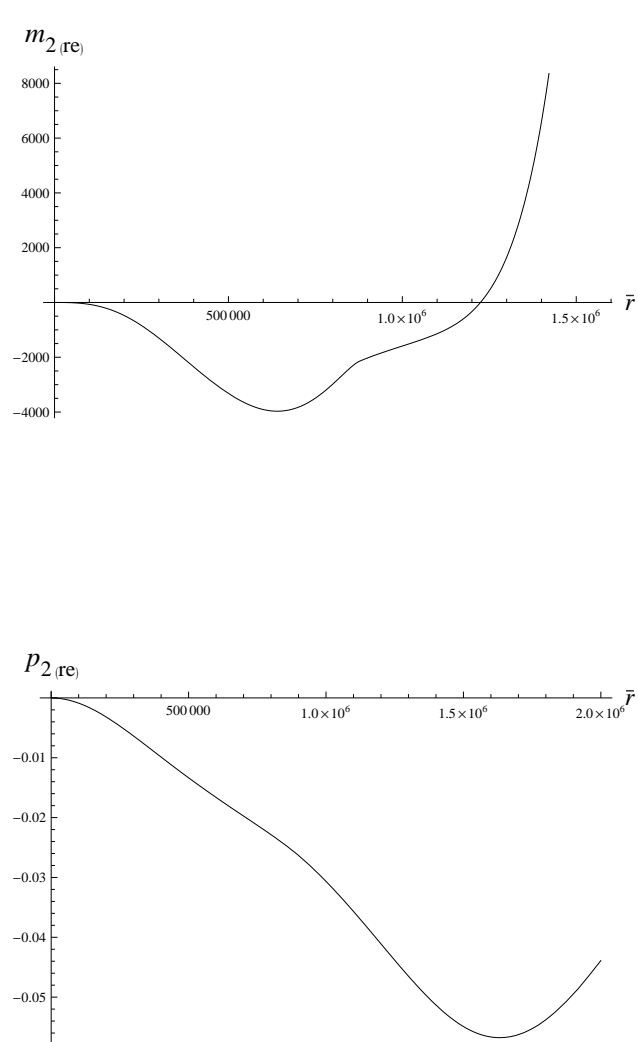
Σχήμα 4.4: Όπως στο Σχ. 4.3, αλλά για την $\Phi_{(re)}$ (πάνω σχήμα) και την $(dE/dP)_{(re)}$ (κάτω σχήμα).



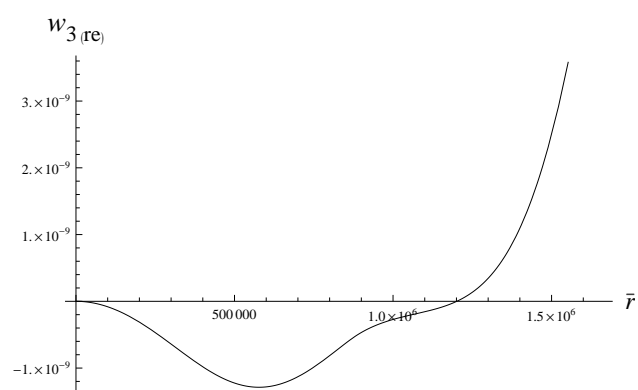
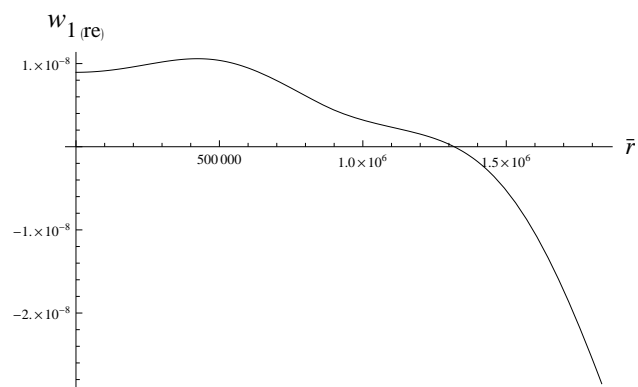
Σχήμα 4.5: Διαταρακτική συνάρτηση $m_{0(re)}$ (πάνω σχήμα) και $p_{0(re)}$ (κάτω σχήμα) συναρτήσει της ακτινικής συντεταγμένης \bar{r} , σε βαρυτικές μονάδες, για ομοιόμορφα περιστρεφόμενο πολυτροπικό μοντέλο μέγιστης μάζας, με $n = 1.5$.



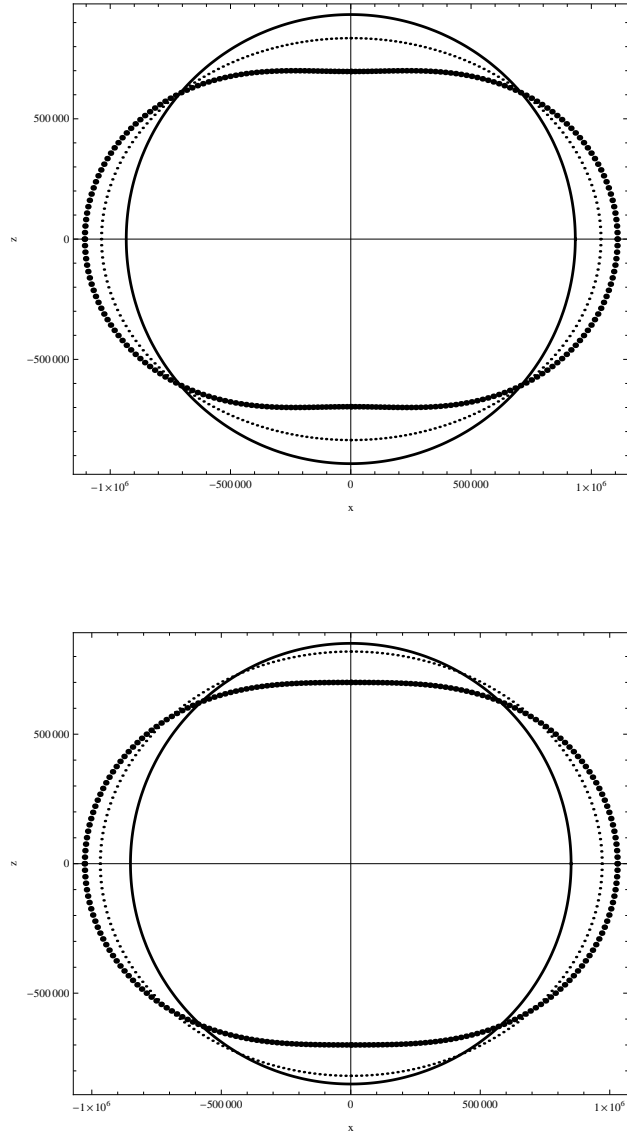
Σχήμα 4.6: Όπως στο Σχ. 4.5, αλλά για την $h_{2(re)}$ (πάνω σχήμα) και την $v_{2(re)}$ (κάτω σχήμα). Η απλή γραμμή αφορά το εσωτερικό του μη περιστρεφόμενου αστέρα ($\bar{r} < R$), ενώ η έντονη γραμμή αφορά το διάστημα ($\bar{r} > R$).



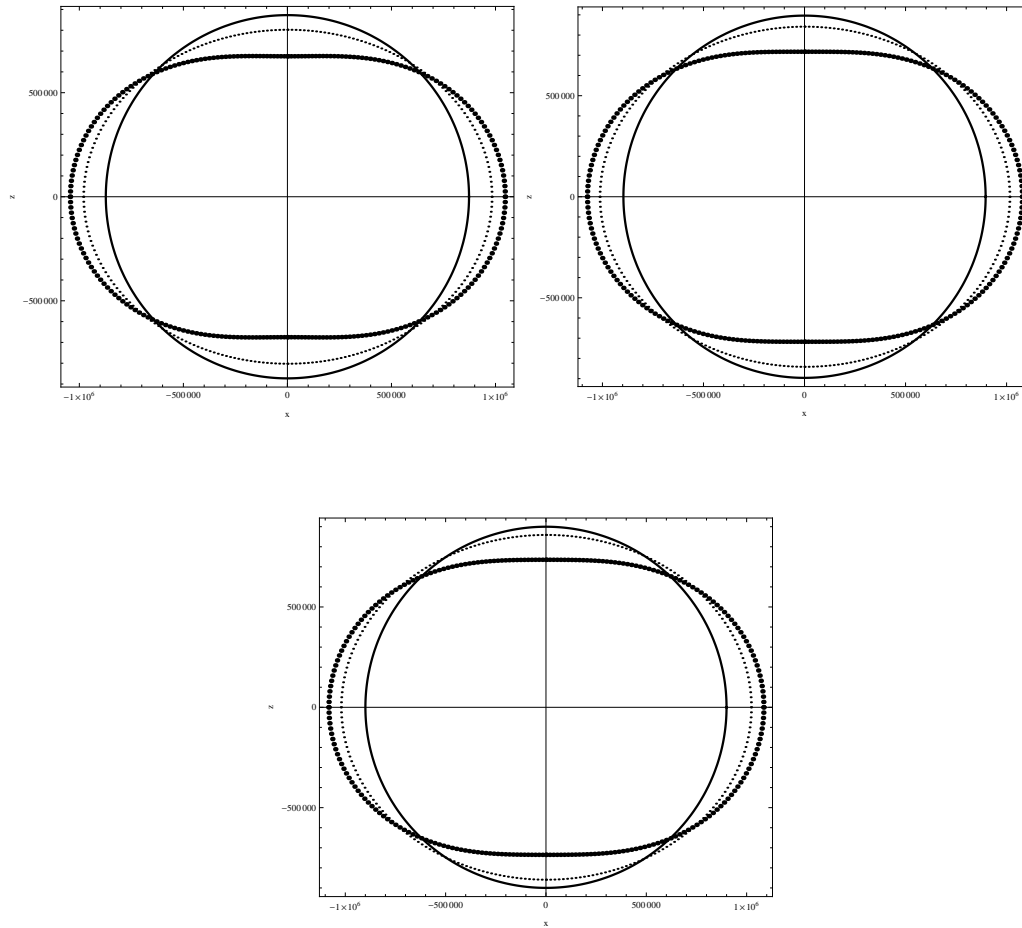
Σχήμα 4.7: Όπως στο Σχ. 4.5, αλλά για την $m_{2(re)}$ (πάνω σχήμα) και την $p_{2(re)}$ (κάτω σχήμα).



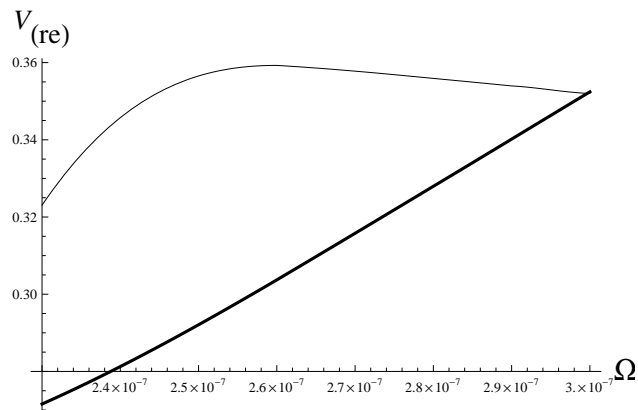
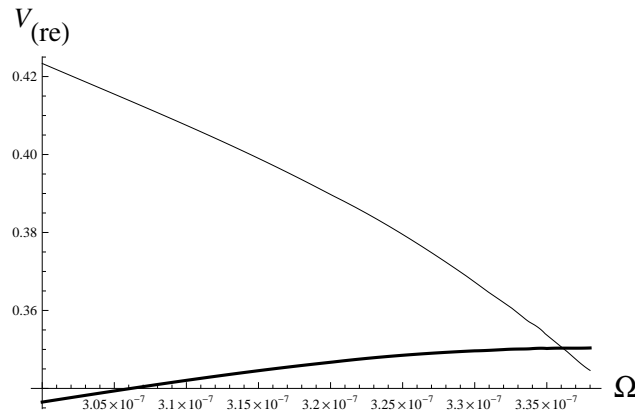
Σχήμα 4.8: Όπως στο Σχ. 4.5, αλλά για την $w_{1(re)}$ (πάνω σχήμα) και την $w_{3(re)}$ (κάτω σχήμα).



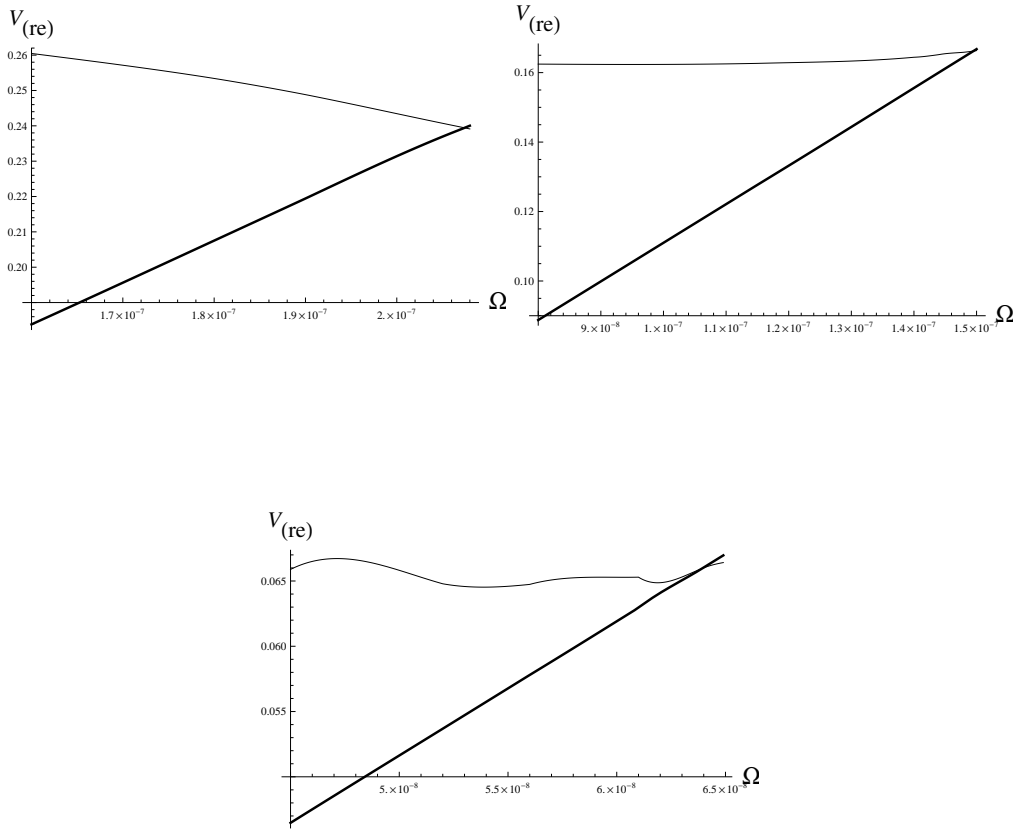
Σχήμα 4.9: Μεσημβρινές τομές πολυτροπικών μοντέλων με μέγιστη μάζα και Κεπλεριανή γωνιακή ταχύτητα για $n = 1.0$ (πάνω σχήμα) και $n = 2.9$ (κάτω σχήμα). Συνεχής καμπύλη: σύνορο του μη περιστρεφόμενου μοντέλου. Λεπτή διακεκομμένη καμπύλη: σύνορο του περιστρεφόμενου μοντέλου που υπολογίστηκε με την βοήθεια της Εξ. (3.23) και εμπεριέχει ως τιμή της \mathcal{K}' , αυτήν που παίρνουμε από την λύση του γραμμικού συστήματος (3.19)–(3.20), ($\mathcal{K}' = \widetilde{\mathcal{K}}'$). Έντονη διακεκομμένη καμπύλη: σύνορο του αντίστοιχου περιστρεφόμενου μοντέλου που υπολογίστηκε με την βοήθεια της Εξ. (3.23) και εμπεριέχει ως τιμή της \mathcal{K}' , αυτήν που παίρνουμε από τον αλγόριθμο λεπτής ρύθμισης (§ 3.1.3, Εξς. (3.49)–(3.53)), ($\mathcal{K}' = \overline{\mathcal{K}}'$).



Σχήμα 4.10: Όπως στο Σχ. 4.9, αλλά για πολυτροπικά μοντέλα με $n = 1.5$ (πάνω αριστερά σχήμα), $n = 2.0$ (πάνω δεξιά σχήμα) και $n = 2.5$ (κάτω σχήμα).



Σχήμα 4.11: Οι ταχύτητες, V_{bound} (έντονη γραμμή) και V_{free} (απλή γραμμή) σε συνάρτηση με την γωνιακή ταχύτητα Ω , για πολυτροπικά μοντέλα με (i) $n = 1.0$, βαρυσονική μάζα $\tilde{M} = 2.202 \times 10^5$ και ισημερινή ακτίνα του περιστρεφόμενου αστέρα $\tilde{r}_e = 1.107 \times 10^6$ (πάνω σχήμα) και (ii) $n = 1.5$, βαρυσονική μάζα $\tilde{M} = 1.228 \times 10^5$ και ισημερινή ακτίνα του περιστρεφόμενου αστέρα $\tilde{r}_e = 1.045 \times 10^6$ (κάτω σχήμα). Όλες οι τιμές εκφράζονται σε βαρυτικές μονάδες.



Σχήμα 4.12: Οι ταχύτητες, V_{bound} (έντονη γραμμή) και V_{free} (απλή γραμμή) σε συνάρτηση με την γωνιακή ταχύτητα Ω , για πολυτροπικά μοντέλα με (i) $n = 2.0$, βαρυονική μάζα $\tilde{M} = 6.778 \times 10^4$ και ισημερινή ακτίνα του περιστρεφόμενου αστέρα $\bar{r}_e = 1.076 \times 10^6$ (πάνω αριστερά σχήμα), (ii) $n = 2.5$, βαρυονική μάζα $\tilde{M} = 2.755 \times 10^4$ και ισημερινή ακτίνα του περιστρεφόμενου αστέρα $\bar{r}_e = 1.084 \times 10^6$ (πάνω δεξιά σχήμα) και (iii) $n = 2.9$, βαρυονική μάζα $\tilde{M} = 4.406 \times 10^3$ και ισημερινή ακτίνα του περιστρεφόμενου αστέρα $\bar{r}_e = 1.029 \times 10^6$ (κάτω σχήμα). Όλες οι τιμές εκφράζονται σε βαρυτικές μονάδες.

4.2 Συμπεράσματα

Στην παρούσα διατριβή, μελετήσαμε τους περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων στα πλαίσια της ΓΘΣ του *Einstein*. Επειδή οι εξισώσεις της ΓΘΣ που περιγράφουν την δομή και την εξέλιξη των αστέρων στον χωροχρόνο είναι πολύπλοκες και μη γραμμικές, δεν λύνονται αναλυτικά, παρά μόνο αριθμητικά. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις *Oppenheimer – Volkov* για το μη περιστρεφόμενο πολυτροπικό μοντέλο, τις εξισώσεις που προκύπτουν για το ομοιόμορφα περιστρεφόμενο πολυτροπικό μοντέλο σύμφωνα με την μέθοδο διαταραχής του *Hartle* και τις εξισώσεις που προκύπτουν με την εφαρμογή μιας διαταρακτικής προσέγγισης με όρους τρίτης τάξης στην γωνιακή ταχύτητα, καταλήξαμε σε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, που η λύση τους μας οδήγησε στον υπολογισμό σημαντικών φυσικών ποσοτήτων οι οποίες περιγράφουν τον αστέρα νετρονίων. Με την κατασκευή κατάλληλων προγραμμάτων πραγματοποιήσαμε την αριθμητική ολοκλήρωση αυτού του συστήματος διαφορικών εξισώσεων, βασιζόμενοι στις εξαιρετικές δυνατότητες του *ATOMFT*, όσον αφορά την επίλυση συστημάτων διαφορικών εξισώσεων στο μιγαδικό επίπεδο και στο *Mathematica*[®]. Το κίνητρο για αυτή την προσπάθεια αποτέλεσε η διαπίστωση ότι στην βιβλιογραφία δεν είχε επιχειρηθεί μέχρι σήμερα η αριθμητική επίλυση αυτού του συστήματος στο μιγαδικό επίπεδο, λόγω της πολυπλοκότητας των εξισώσεων αλλά και της αριθμητικής συμπεριφοράς τους.

Σ' αυτό το σημείο, πρέπει να δοθεί έμφαση στο γνωστό «παράδοξο» που αφορά την μέθοδο διαταραχής του *Hartle*, σύμφωνα με το οποίο (όπως έχει διαπιστωθεί από αρκετούς συγγραφείς (π.χ. [9], ενότητες 4 και 7· επίσης [13], §5.3), παρότι πρόκειται για μία μέθοδο διαταραχής για την περίπτωση αργής περιστροφής, δίνει αποτελέσματα ικανοποιητικής ακρίβειας ακόμη και όταν εφαρμόζεται σε ταχέως περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων.

Το κεντρικό σημείο της παρούσας έρευνας συνίσταται στην εφαρμογή της μεθόδου *CPS*. Τα πλεονεκτήματα που μας δίνει αυτή η μέθοδος είναι πολύ σημαντικά όσον αφορά την διαπραγμάτευση του προβλήματος που έχουμε να λύσουμε. Τα κυριότερα εξ αυτών είναι τα ακόλουθα.

1. Λύνουμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων με ένα κατάλληλο πρόγραμμα στο *ATOMFT* και όχι μία-μία ξεχωριστά, με αποτέλεσμα να αποφεύγουμε αριθμητικές παρεμβολές, που αθροιστικά προξενούν σημαντικά σφάλματα. Επίσης, αποφεύγουμε ιδιομορφίες ή και απροσδιόριστες μορφές, ιδιαίτερα σε αρχικές συνθήκες που επιβάλλονται στο κέντρο του αστέρα ή στην επιφάνεια του αδιατάρακτου μοντέλου.
2. Αφαιρείται ο κρίσιμος περιορισμός του τερματισμού της λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών λίγο πριν από την επιφάνεια του μη περιστρεφόμενου αστέρα, όπως συζητήθηκε στις § 2.1 και 2.2. Αντ' αυτού, η αριθμητική ο-

λοκλήρωση συνεχίζει απρόσκοπτα και πέραν του συνόρου του αδιατάρακτου μοντέλου, οπότε η ακτίνα υπολογίζεται εύκολα ως η ρίζα του πραγματικού μέρους της συνάρτησης της πυκνότητας. Επίσης, έχουμε την δυνατότητα να περιγράψουμε την παραμόρφωση που προκαλείται στην αστρική δομή λόγω της περιστροφής χωρίς να είμαστε αναγκασμένοι να χρησιμοποιήσουμε οποιεσδήποτε αριθμητικές προεκβολές που όπως είναι γνωστό, πάσχουν από σημαντικά σφάλματα.

3. Λαμβάνοντας υπόψη κατάλληλα στους υπολογισμούς μας ένα ορισμένο αριθμό συνθηκών, συνδυάζοντας την κλασική διαπραγμάτευση του διαταρακτικού σχήματος του *Hartle* (3.23) και τις σχέσεις (3.45)–(3.48), που απορρέουν από την δομή της *CPS*, οδηγηθήκαμε τελικά στην διατύπωση του αλγόριθμου λεπτής ρύθμισης του \mathcal{K}' (§ 3.1.3, Εξς. (3.49)–(3.53)). Το αποτέλεσμα αυτού του αλγόριθμου στην συνέχεια, είναι η σημαντική βελτίωση όσον αφορά την ακρίβεια των αριθμητικών αποτελεσμάτων μας σχετικά με την γεωμετρία του συνόρου του αστέρα νετρονίων (Πνκ. 4.11).

Τέλος, με βάση αυτά τα αριθμητικά αποτελέσματα (όσον αφορά την γεωμετρία του αστέρα) που προέκυψαν από τον αλγόριθμο λεπτής ρύθμισης, η διαδικασία που αναπτύχθηκε για την κατασκευή μιας ακολουθίας αστρικών μοντέλων σταθερών βαρυονικών μαζών με οποιαδήποτε γωνιακή ταχύτητα Ω (μικρότερης πάντα από το όριο της ταχύτητας διαφυγής), μας επέτρεψε τον υπολογισμό με ικανοποιητική ακρίβεια του ορίου της μάζας διαφυγής Ω_{ms} , για κάθε πολυτροπικό μοντέλο που μελετήσαμε.

Η απλότητα της *CPS*, καθώς και ο υπολογισμός φυσικών ποσοτήτων με ικανοποιητική ακρίβεια, δίνουν το ερέθισμα για μια μελλοντική χρήση της μεθόδου και σε άλλα σημαντικά θέματα που αφορούν τους αστέρες νετρονίων, όπως η διαφορική περιστροφή, το μαγνητικό πεδίο και τα βαρυτικά κύματα.

Παράρτημα Α΄

Απόδειξη της εξίσωσης υδροστατικής ισορροπίας Εξ. (1.17)

Ξεκινάμε γράφοντας τις τιμές της μετρικής $g_{\mu\nu}$. Λόγω της σχέσης (1.10) έχουμε

$$g_{tt} = -e^\nu, \quad g^{tt} = -e^{-\nu}, \quad (\text{A'.1})$$

$$g_{rr} = e^\lambda, \quad g^{rr} = e^{-\lambda}, \quad (\text{A'.2})$$

$$g_{\theta\theta} = r^2, \quad g^{\theta\theta} = r^{-2}, \quad (\text{A'.3})$$

$$g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2\theta, \quad g^{\varphi\varphi} = r^{-2} \sin^{-2}\theta. \quad (\text{A'.4})$$

Υπενθυμίζουμε ότι στην § 1.3 είχαμε αποδείξει την σχέση $\nu = 2\Phi$. Ακολουθώντας, υπολογίζουμε τους τανυστές ενέργειας-ορμής $T^{\mu\nu}$ και $T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}T^{\alpha\beta}$ σύμφωνα με την σχέση (1.11)

$$T^{tt} = (E + P)u^t u^t + P g^{tt} = (E + P)e^{-2\Phi} - P e^{-2\Phi} = E e^{-2\Phi},$$
$$T_{tt} = E e^{2\Phi}, \quad (\text{A'.5})$$

$$T^{rr} = 0 + P g^{rr} = P e^{-\lambda},$$
$$T_{rr} = P e^\lambda, \quad (\text{A'.6})$$

$$T^{\theta\theta} = 0 + P g^{\theta\theta} = P r^{-2},$$
$$T_{\theta\theta} = P r^2, \quad (\text{A'.7})$$

$$T^{\varphi\varphi} = 0 + P g^{\varphi\varphi} = P r^{-2} \sin^{-2}\theta,$$
$$T_{\varphi\varphi} = P r^2 \sin^2\theta, \quad (\text{A'.8})$$

$$T^{\mu\nu} = 0, \quad T_{\mu\nu} = 0 \quad \text{για} \quad \mu \neq \nu. \quad (\text{A'.9})$$

Οι υπολογισμοί των συντελεστών *Christoffel* γίνονται με βάση την σχέση

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(g_{\rho\mu,\nu} + g_{\rho\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}) \quad (\text{A'.10})$$

οπότε παίρνουμε τους δεκατρείς μη μηδενικούς συντελεστές

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t &= \Gamma_{rt}^t = \Phi, r, \\ \Gamma_{tt}^r &= e^{-\lambda+2\Phi}\Phi, r, \\ \Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2}\Lambda, r, \\ \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r e^{-\lambda}, \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -r \sin^2\theta e^{-\lambda}, \\ \Gamma_{r\theta}^{\theta} &= \Gamma_{\theta r}^{\theta} = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^{\theta} &= -\sin\theta \cos\theta \\ \Gamma_{r\varphi}^{\varphi} &= \Gamma_{\varphi r}^{\varphi} = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{\theta\varphi}^{\varphi} &= \Gamma_{\varphi\theta}^{\varphi} = \cot\theta \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας τον τανυστή ενέργειας-ορμής έχουμε

$$T_{;\nu}^{\mu\nu} = (E + P)_{;\nu} u^{\mu}u^{\nu} + (E + P) (u_{;\nu}^{\mu} u^{\nu} + u^{\mu} u_{;\nu}^{\nu}) + P_{;\nu} g^{\mu\nu} \quad (\text{A'.11})$$

και χρησιμοποιώντας τον προβολικό τελεστή

$$p_{\alpha\beta} = u_{\alpha}u_{\beta} + g_{\alpha\beta}, \quad (\text{A'.12})$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned} p_{\alpha\mu} T_{;\nu}^{\mu\nu} &= (E + P)_{;\nu} (u_{\alpha}u_{\mu}u^{\mu}u^{\nu} + g_{\alpha\mu} u^{\mu}u^{\nu}) \\ &+ (E + P)(u_{\alpha}u_{\mu}u_{;\nu}^{\mu}u^{\nu} + g_{\alpha\mu}u_{;\nu}^{\mu}u^{\nu}) \\ &+ (E + P)(u_{\alpha}u_{\mu}u^{\mu}u_{;\nu}^{\nu} + g_{\alpha\mu}u^{\mu}u_{;\nu}^{\nu}) \\ &+ u_{\alpha}u_{\mu}P_{;\nu}g^{\mu\nu} + g_{\alpha\mu}P_{;\nu}g^{\mu\nu} = \\ &(E + P)_{;\nu} [u_{\alpha}(-1)u^{\nu} + u_{\alpha}u^{\nu}] \\ &+ (E + P) \left[u_{\alpha} \frac{1}{2} (u_{\mu}u^{\mu})_{;\nu} u^{\nu} + u_{\alpha;\nu}u^{\nu} \right] \\ &+ (E + P) [u_{\alpha}(-1)u_{;\nu}^{\nu} + u_{\alpha}u_{;\nu}^{\nu}] + u_{\alpha}u^{\nu}P_{;\nu} + g_{\alpha}^{\nu}P_{;\nu} = \\ &0 + (E + P) [0 + u_{\alpha;\nu}u^{\nu}] + 0 + u_{\alpha}u^{\nu}P_{;\nu} + P_{;\alpha} = \\ &(E + P)u_{\alpha;\nu}u^{\nu} + u_{\alpha}u^{\nu}P_{;\nu} + P_{;\alpha}. \end{aligned} \quad (\text{A'.13})$$

Στις παραπάνω πράξεις έχουμε λάβει υπόψη τις σχέσεις

$$u_\alpha u^\alpha = -1, \quad u_\alpha u_{;\beta}^\alpha = \frac{1}{2}(u_\alpha u^\alpha)_{;\beta} = 0. \quad (\text{A'.14})$$

Σύμφωνα με την Εξ.(1.14), η σχέση (A'.13) γίνεται

$$(E + P)u_{\alpha;\nu}u^\nu + u_\alpha u^\nu P_{;\nu} + P_{;\alpha} = 0 \Rightarrow (E + P)u_{\alpha;\nu}u^\nu = -u_\alpha u^\nu P_{;\nu} - P_{;\alpha}, \quad (\text{A'.15})$$

που αποτελεί την εξίσωση *Euler* για την ΓΘΣ. Λόγω της γνωστής τανυστικής σχέσης

$$C_{\alpha;\beta} = C_{\alpha,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma C_{\gamma}, \quad (\text{A'.16})$$

η σχέση (A'.15) γίνεται

$$(E + P)(u_{\alpha,\nu}u^\nu - \Gamma_{\alpha\nu}^\kappa u_\kappa u^\nu) = -P_{;\alpha} - u_\alpha u^\nu P_{;\nu}. \quad (\text{A'.17})$$

Από το άθροισμα $u_\kappa u^\nu$, οι μόνοι όροι που δεν μηδενίζονται είναι αυτοί για τους οποίους έχουμε $\kappa = \nu = t$, οπότε

$$(E + P)(u_{\alpha,t}u^t - \Gamma_{\alpha t}^t u_t u^t) - P_{;\alpha} - u_\alpha u^t P_{;t}. \quad (\text{A'.18})$$

Για $\alpha = r$ έχουμε

$$(E + P)(u_{r,t}u^t - \Gamma_{rt}^t u_t u^t) - P_{;r} - u_r u^t P_{;t}. \quad (\text{A'.19})$$

Οι συνιστώσες της τετραταχύτητας είναι $u^r = 0$, $u^\theta = 0$, $u^\varphi = 0$ (λόγω της στατικότητας), ενώ λόγω της κανονικοποίησης

$$-1 = u_\mu u^\mu = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = g_{tt} u^t u^t = -e^\nu u^t u^t \Rightarrow u^t = e^{-\nu/2} = e^{-\Phi}. \quad (\text{A'.20})$$

Αντικαθιστώντας τον συντελεστή *Christoffel* και τις συνιστώσες της τετραταχύτητας στην σχέση (A'.19) καταλήγουμε

$$\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{1}{E + P} \frac{dP}{dr}. \quad (\text{A'.21})$$

Υπολογίζουμε τώρα τους τανυστές *Ricci*, σύμφωνα με την σχέση

$$R_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta,\mu}^\mu - \Gamma_{\alpha\mu,\beta}^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \Gamma_{\nu\mu}^\nu - \Gamma_{\alpha\nu}^\mu \Gamma_{\beta\mu}^\nu. \quad (\text{A'.22})$$

Από το αμετάβλητο της μετρικής στις στροφές προκύπτει χωρίς υπολογισμούς ότι οι μεικτοί όροι R_{ij} είναι μηδενικοί. Επίσης, από το αμετάβλητο κατά την χρονική αντιστροφή $t \rightarrow -t$ (στατική μετρική) προκύπτει ότι οι όροι $R_{it} = R_{ti} = 0$. Συνεπώς, υπολογίζουμε τους διαγώνιους όρους του $R_{\mu\nu}$

$$R_{tt} = e^{-\lambda+2\Phi} \left[\Phi'' + (\Phi')^2 - \frac{1}{2}\Phi'\Lambda' + \frac{2}{r}\Phi' \right], \quad (\text{A'.23})$$

$$R_{rr} = -\Phi'' - (\Phi')^2 + \frac{1}{2}\Phi'\Lambda' + \frac{2}{r}\Lambda', \quad (\text{A'.24})$$

$$R_{\theta\theta} = 1 - e^{-\lambda} - r e^{-\lambda} \left(\Phi' - \frac{1}{2}\Lambda' \right), \quad (\text{A'.25})$$

$$R_{\varphi\varphi} = -\sin^2\theta \left[-1 + e^{-\lambda} + r e^{-\lambda} \left(\Phi' - \frac{1}{2}\Lambda' \right) \right] = -\sin^2\theta R_{\theta\theta}. \quad (\text{A'.26})$$

Με την βοήθεια των όρων του τανυστή *Ricci* βρίσκουμε πλέον το βαθμωτό *Ricci* R

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{tt} R_{tt} + g^{rr} R_{rr} + g^{\theta\theta} R_{\theta\theta} + g^{\varphi\varphi} R_{\varphi\varphi} = -2e^{-\lambda} \left[\Phi'' - \frac{1}{2}\Phi'\Lambda' + (\Phi')^2 + \frac{2}{r} \left(\Phi' - \frac{\Lambda'}{2} \right) + \frac{1}{r^2} \right]. \quad (\text{A'.27})$$

Από τις εξισώσεις πεδίου του Einstein για την tt συνιστώσα παίρνουμε

$$\begin{aligned} G_{tt} &= R_{tt} - \frac{1}{2}g_{tt}R = 8\pi T_{tt} \Rightarrow \\ \frac{\lambda'}{r}e^{-\lambda} - \frac{1}{r^2}e^{-\lambda} + \frac{1}{r^2} &= 8\pi E \Rightarrow \\ 1 - e^{-\lambda} + \frac{\lambda'}{r}e^{-\lambda} &= 8\pi r^2 E. \end{aligned} \quad (\text{A'.28})$$

Το αριστερό μέλος της τελευταίας σχέσης (A'.28) είναι η παράγωγος της ποσότητας $r(1 - e^{-\lambda})$, οπότε έχουμε

$$\frac{d}{dr}[r(1 - e^{-\lambda})] = 8\pi r^2 E. \quad (\text{A'.29})$$

Ορίζουμε την ποσότητα $\frac{1}{2}r(1 - e^{-\lambda})$ ίση με μια βοηθητική συνάρτηση, έστω m

$$m(r) = \frac{1}{2}r(1 - e^{-\lambda}), \quad (\text{A'.30})$$

οπότε η σχέση (A'.29) γίνεται

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 E, \quad (\text{A'.31})$$

που σε ολοκληρωτική μορφή γράφεται

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r^2 E dr + m(0). \quad (\text{A'.32})$$

Ως γνωστόν, οποιαδήποτε και αν είναι η καμπυλότητα του χώρου μας, σε αρκετά μικρή απόσταση από την αρχή των συντεταγμένων ($r \rightarrow 0$) μπορούμε

να τον θεωρήσουμε οριακά επίπεδο, οπότε η μετρική του εκφυλίζεται στην ευκλείδεια μορφή

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (\text{A'.33})$$

Σύμφωνα με την Εξ. (1.10), συμπεραίνουμε ότι $e^\lambda \rightarrow 1$, συνεπώς, λόγω της σχέσης (A'.30) θα ισχύει $m(0) \rightarrow 0$. Άρα, η σχέση (A'.32) καταλήγει στην εξίσωση

$$M = \int_0^R 4\pi r^2 E dr + m(0), \quad (\text{A'.34})$$

που μας δίνει την ολική μάζα του ρευστού σε μονάδες μήκους. Έτσι, η ποσότητα m , που αυθαίρετα ορίσαμε στην (A'.30), έχει προφανή φυσική σημασία. Λόγω της σχέσης (A'.30) βρίσκουμε και την Εξ. (1.18)

$$e^\lambda = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}. \quad (\text{A'.35})$$

Από τις εξισώσεις πεδίου Einstein για την rr συνιστώσα παίρνουμε

$$\begin{aligned} G_{rr} &= R_{rr} - \frac{1}{2}g_{rr}R = 8\pi T_{rr} \Rightarrow \\ \frac{2\Phi'}{r} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2}e^\lambda &= 8\pi P e^\lambda \Rightarrow \\ \frac{2}{r}\Phi' e^{-\lambda} &= 8\pi P + \frac{1}{r}(1 - e^{-\lambda}). \end{aligned} \quad (\text{A'.36})$$

Λύνουμε την Εξ. (A'.36), ως προς Φ' , λαμβάνοντας υπόψη και την σχέση (A'.35)

$$\begin{aligned} \Phi' &= \frac{r}{2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \left[8\pi P + \frac{1}{r^2} \left(\frac{2m}{r}\right)\right] \Rightarrow \\ \frac{d\Phi}{dr} &= \frac{1}{r^2} (m + 4\pi P r^3) \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{A'.37})$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (A'.21) στην τελευταία σχέση καταλήγουμε στην Εξ. (1.17).

Παράρτημα Β'

Απόδειξη διαφορικής εξίσωσης συρμού από περιστροφή αδρανειακού συστήματος

Για να βρούμε τον ρυθμό περιστροφής των αδρανειακών συστημάτων $\omega(r, \theta)$, χρησιμοποιούμε μία από τις εξισώσεις πεδίου του *Einstein*

$$R_{\varphi}{}^t = 8\pi T_{\varphi}{}^t, \quad (\text{B'.1})$$

που την αναπτύσσουμε και στα δύο μέλη, κρατώντας μόνο τον χαμηλότερο όρο της γωνιακής ταχύτητας Ω (θεωρούμε μέχρι πρώτης τάξης όρους). Το αριστερό μέλος της (B'.1) μπορεί να γραφεί¹

$$(-g)^{1/2} R_{\varphi}{}^t = [(-g)^{1/2} g^{t\alpha} \Gamma_{\varphi\alpha}{}^{\nu}]_{,\nu}. \quad (\text{B'.2})$$

Εδώ, θα πρέπει να τονίσουμε ότι όρους Ω^3 και πάνω τους απορρίπτουμε. Επίσης, εφόσον μελετάμε την περίπτωση της αργής περιστροφής, θα κρατήσουμε μόνο όρους $\omega(r, \theta)$ και όχι ανώτερους. Συνεπώς η μετρική 1.21, με την αντικατάσταση του L με το ω γίνεται

$$ds^2 = -e^{\nu} dt^2 + e^{\lambda} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 - 2r^2 \omega \sin^2 \theta d\varphi dt, \quad (\text{B'.3})$$

όπου η οριζουσα αυτής της μετρικής προκύπτει ύστερα από μερικές απλές αλγεβρικές πράξεις², ότι είναι

$$(-g)^{1/2} = r^2 \sin \theta e^{(\nu+\lambda)/2}, \quad (\text{B'.4})$$

¹ σύμφωνα με την σχέση, που αποδεικνύεται στην εργασία των *Landau – Lifshitz* (1962), σελ. 348.

² Ο όρος με το ω^2 παραλείπεται.

ενώ οι συναλλοιώτες και ανταλλοιώτες συνιστώσες της μετρικής είναι

$$g_{tt} = -e^\nu, \quad g^{tt} = -e^{-\nu}, \quad (\text{B'.5})$$

$$g_{rr} = e^\lambda, \quad g^{rr} = e^{-\lambda}, \quad (\text{B'.6})$$

$$g_{\theta\theta} = r^2, \quad g^{\theta\theta} = r^{-2}, \quad (\text{B'.7})$$

$$g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2\theta, \quad g^{\varphi\varphi} = r^{-2} \sin^{-2}\theta, \quad (\text{B'.8})$$

$$g_{t\varphi} = -\omega r^2 \sin^2\theta, \quad g^{t\varphi} = -\omega e^\lambda. \quad (\text{B'.9})$$

Οι ανταλλοιώτες συνιστώσες βγαίνουν με την απαίτηση

$$g_{\mu\nu} = g^{\alpha\nu} = \delta_\mu^\alpha = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \mu \\ 1, & \alpha = \mu \end{cases} \quad (\text{B'.10})$$

Με αυτή την μετρική (B'.3), η σχέση (B'.2) γράφεται ως εξής

$$(-g)^{1/2} R_\varphi{}^t = -\frac{1}{2} [(-g)^{1/2} g^{ij} (g^{t\varphi} g_{\varphi\varphi,j} - g^{tt} g_{t\varphi,j})]_{,i}. \quad (\text{B'.11})$$

Τώρα, μπορούμε να υπολογίσουμε τους όρους³

$$\begin{aligned} g_{\varphi t,r} &= -2\omega r \sin^2\theta - r^2 \sin^2\theta \frac{\partial\omega}{\partial r}, \\ g_{\varphi\varphi,r} &= 2r \sin^2\theta, \\ g_{\varphi\varphi,\theta} &= 2r^2 \sin\theta \cos\theta, \\ g_{\varphi t,\theta} &= -2\omega r^2 \sin\theta \cos\theta - r^2 \sin^2\theta \frac{\partial\omega}{\partial\theta}, \end{aligned} \quad (\text{B'.12})$$

οπότε οι παρακάτω όροι παίρνουν τις εξής τιμές

$$\begin{aligned} g^{t\varphi} g_{\varphi\varphi,r} - g^{tt} g_{t\varphi,r} &= -2\omega r \sin^2\theta (e^{-\lambda} + e^{-\nu}) - r^2 e^{-\nu} \frac{\partial\omega}{\partial r} \sin^2\theta, \\ g^{t\varphi} g_{\varphi\varphi,\theta} - g^{tt} g_{t\varphi,\theta} &= -2\omega r^2 \sin\theta \cos\theta (e^{-\lambda} + e^{-\nu}) - r^2 e^{-\nu} \frac{\partial\omega}{\partial\theta} \sin^2\theta, \end{aligned} \quad (\text{B'.13})$$

Συνεπώς, η Εξ. (B'.11), αν λάβουμε υπόψη τις σχέσεις (B'.13) γίνεται

$$-2r^2 \sin\theta e^{(\nu+\lambda)/2} R_\varphi{}^t = [e^{-(\nu+\lambda)/2} r^4 \frac{\partial\omega}{\partial r} \sin^3\theta]_{,r} + [e^{(\lambda-\nu)/2} r^2 \frac{\partial\omega}{\partial\theta} \sin^3\theta]_{,\theta} + 0(\Omega^3). \quad (\text{B'.14})$$

Επειδή ο αστέρας εκτελεί μόνο περιστροφική κίνηση για τις συνιστώσες της τετραταχύτητας u^r, u^θ θα ισχύει

$$u^r = u^\theta = 0. \quad (\text{B'.15})$$

³Υπενθυμίζουμε ότι κατά την διάρκεια των πράξεων, παραλείπουμε όρους ω^2

Για την συνιστώσα u^φ έχουμε

$$u^\varphi = \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \Omega u^t. \quad (\text{B'.16})$$

Από την συνθήκη κανονικοποίησης της τετραταχύτητας έχουμε

$$\begin{aligned} u^\alpha u_\alpha &= -1 \Rightarrow u^t u_t + u^r u_r + u^\varphi u_\varphi + u^\theta u_\theta = -1 \Rightarrow \\ &u^t u_t + u^\varphi u_\varphi = -1 \Rightarrow \\ g_{tt}(u^t)^2 + 2g_{\varphi t} u^t u^\varphi + g_{\varphi\varphi}(u^\varphi)^2 &= -1. \end{aligned} \quad (\text{B'.17})$$

Λαμβάνοντας υπόψη την σχέση (B'.16), η προηγούμενη σχέση γίνεται ([1], Εξ. (36), [2], Εξ. (5)).

$$\begin{aligned} g_{tt}(u^t)^2 + 2\Omega g_{\varphi t}(u^t)^2 + \Omega^2 g_{\varphi\varphi}(u^t)^2 &= -1 \Rightarrow \\ u^t &= \left[- (g_{tt} + 2\Omega g_{t\varphi} + \Omega^2 g_{\varphi\varphi}) \right]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (\text{B'.18})$$

Για έναν ομοιόμορφα περιστρεφόμενο αστέρα νετρονίων όπου η γωνιακή ταχύτητα Ω θεωρείται σταθερή για όλο το ρευστό, ο τανυστής ενέργειας-ορμής της σχέσης (B'.1) είναι

$$T_\varphi^t = (E + P) u^t u_\varphi.$$

Η σχέση $u^t u_\varphi$ μπορεί να γίνει

$$\begin{aligned} u^t u_\varphi &= u^t (u_\varphi + u^\varphi g_{\varphi\varphi}) \\ &= u^t (u^t g_{t\varphi} + \Omega u^t g_{\varphi\varphi}) \\ &= (u^t)^2 (g_{t\varphi} + \Omega g_{\varphi\varphi}), \end{aligned} \quad (\text{B'.19})$$

οπότε η σχέση (B'.19) για τον τανυστή ενέργειας-ορμής με την βοήθεια της σχέσης (B'.19) γίνεται

$$\begin{aligned} T_\varphi^t &= (E + P) (u^t)^2 (g_{t\varphi} + \Omega g_{\varphi\varphi}) \\ &= (E + P) e^{-\nu} (\Omega - \omega) r^2 \sin^2 \theta + 0 (\Omega^3). \end{aligned} \quad (\text{B'.20})$$

Λαμβάνοντας τώρα υπόψη τις σχέσεις (B'.14), (B'.19) και με την αντικατάσταση της διαφοράς $\Omega - \omega$ με την ποσότητα, που μας ενδιαφέρει $\bar{\omega}$, (Εξ. 1.23), καταλήγουμε στην σχέση⁴ ([1], Εξ. (39))

$$\frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^4 e^{-(\nu+\lambda)/2} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial r} \right] + \frac{e^{(\lambda-\nu)/2}}{r^2 \sin^3 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin^3 \theta \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \theta} \right) - 16 \pi (E + P) e^{(\lambda-\nu)/2} \bar{\omega} = 0. \quad (\text{B'.21})$$

⁴Κρατάμε μόνον πρώτης τάξης όρους ως προς την Ω .

Εδώ, θα πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι οι μηδενικής τάξης εξισώσεις πεδίου δίνονται από τις σχέσεις (1.15), (1.19) και (1.17). Ορίζουμε την ποσότητα

$$j = e^{-\frac{\nu+\lambda}{2}}. \quad (\text{B'.22})$$

Η παραπάνω σχέση μετατρέπεται ως εξής

$$je^\lambda = \frac{1}{j}e^{-\nu}. \quad (\text{B'.23})$$

Επειδή οι συναρτήσεις ν , λ είναι συναρτήσεις μόνον του r , παραγωγίζοντας ως προς r την σχέση (B'.22), θα έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{dj}{dr} &= -\frac{1}{2}e^{-(\nu+\lambda)/2} \left(\frac{d\nu}{dr} + \frac{d\lambda}{dr} \right) \Rightarrow \\ \frac{dj}{dr} &= -\frac{1}{2}j \left(\frac{d\nu}{dr} + \frac{d\lambda}{dr} \right). \end{aligned} \quad (\text{B'.24})$$

Σύμφωνα με τις σχέσεις (1.18), (1.19) προκύπτει

$$\begin{aligned} e^{-\lambda} &= 1 - \frac{2m}{r} \Rightarrow -\frac{d\lambda}{dr}e^{-\lambda} = \frac{2m}{r^2} - \frac{2dm}{rdr} \Rightarrow \\ \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dr} &= \left(\frac{1}{r} \frac{dm}{dr} - \frac{m}{r^2} \right) e^\lambda = \left(4\pi r E - \frac{m}{r^2} \right) e^\lambda. \end{aligned}$$

Αντίστοιχα, μέσω των σχέσεων (1.15), (1.17) παίρνουμε

$$\frac{1}{2} \frac{d\nu}{dr} = \frac{m + 4\pi r^3 P}{r^2} e^\lambda. \quad (\text{B'.25})$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (B'.23), (B'.24), (B'.25) και (B'.25) έχουμε

$$\frac{dj}{dr} = -\frac{e^{-\nu}}{j} 4\pi r (E + P). \quad (\text{B'.26})$$

Επομένως, η Εξ. (B'.21) με την βοήθεια των (B'.23), (B'.26) παίρνει την μορφή

$$\frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^4 j \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial r} \right) + \frac{4}{r} \frac{dj}{dr} \bar{\omega} + \frac{e^{(\lambda-\nu)/2}}{r^2 \sin^3 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin^3 \theta \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (\text{B'.27})$$

Ένα ανάπτυγμα του $\bar{\omega}(r, \theta)$ σε πολυώνυμα *Legendre* δεν θα διαχώριζε την Εξ. (B'.27), γιατί τόσο το $g_{t\varphi}$ όσο και το ω , μετασχηματίζονται κάτω από περιστροφή όχι όπως ένα βαθμωτό στοιχείο, αλλά ως διανυσματικό. Για να λύσουμε την Εξ.(B'.27) με χωρισμό των μεταβλητών, χρειαζόμαστε να αναπτύξουμε

πρώτα σε διανυσματικές σφαιρικές αρμονικές την ποσότητα $\bar{\omega}(r, \theta)$. Οι σχετικές γωνιακές συναρτήσεις μπορούν να βρεθούν κατευθείαν πως είναι της μορφής ([34])

$$\bar{\omega}(r, \theta) = \sum_{l=1}^{\infty} \bar{\omega}_l(r) \left(-\frac{1}{\sin\theta} \frac{dP_l}{d\theta} \right). \quad (\text{B'.28})$$

Η ακτινική συνάρτηση $\bar{\omega}_l$ ικανοποιεί τότε την Εξ. ([1], Εξ. (43))

$$\frac{1}{r^4} \frac{d}{dr} \left(r^4 j(r) \frac{d\bar{\omega}_l}{dr} \right) + \left[\frac{4}{r} \frac{dj}{dr} - e^{(\lambda-\nu)/2} \frac{l(l+1)-2}{r^2} \right] \bar{\omega}_l = 0. \quad (\text{B'.29})$$

Εξετάζουμε τώρα την συμπεριφορά της λύσης της Εξ. (B'.29), όπου για μικρά r απαιτούμε η γεωμετρία να είναι ομαλή ενώ για μεγάλα r απαιτούμε να είναι επίπεδη. Συνεπώς, για μικρά r , το $j(r)$ είναι μια ομαλή συμμετρική συνάρτηση έτσι ώστε η διαφορική εξίσωση (B'.29) δέχεται μια συμπεριφορά της μορφής

$$\bar{\omega}_l \rightarrow Ar^{s^+} + Br^{s^-}, \quad r \rightarrow 0 \quad (\text{B'.30})$$

όπου A, B σταθερές και

$$s_{\pm} = -\frac{3}{2} \pm \left[\frac{9}{4} + \frac{l(l+1)-2}{j(0)} \right]^{1/2}. \quad (\text{B'.31})$$

Επειδή οι ποσότητες e^{ν}, e^{λ} είναι θετικές, η συνάρτηση $j(r)$ είναι παντού θετική. Εάν η γεωμετρία είναι ομαλή κοντά στην πηγή του βαρυτικού πεδίου, απαιτούμε το $r^{s^-} \rightarrow 0$. Για μεγάλα r , η συνάρτηση $j(r)$ γίνεται ίση με την μονάδα και η $\bar{\omega}_l$ παίρνει την μορφή

$$\bar{\omega}_l \rightarrow Cr^{-l-2} + Dr^{l-1}, \quad (\text{B'.32})$$

όπου C, D σταθερές. Η συμπεριφορά του $\bar{\omega}$ έχει ήδη φτιαχτεί κοντά στην πηγή. Συνεπώς, ο λόγος των δύο σταθερών στην σχέση (B'.32) καθορίζεται έτσι ώστε καμία να μην εξαφανίζεται εκτός κι αν το κάνουν και οι δύο. Εάν ο χώρος είναι επίπεδος για μεγάλα r , το ω πρέπει να ελαττώνεται γρηγορότερα από το $1/r^3$ έτσι ώστε το $\bar{\omega}(r) = \Omega - \omega$ να πλησιάζει το Ω . Κατά συνέπεια, από την σχέση (B'.32), γίνεται προφανές, ότι όλες οι σταθερές στο ανάπτυγμα *Legendre* του $\bar{\omega}$ εξαφανίζονται εκτός από την περίπτωση για $l = 1$. Επομένως, το $\bar{\omega}$ είναι συνάρτηση μόνο του r και υπακούει στην διαφορική εξίσωση (1.24), ([1], Εξ.(46)).

Παράρτημα Γ'

Πρόγραμμα επίλυσης του προβλήματος αρχικών τιμών με εφαρμογή του ATOMFT

Στο παράρτημα αυτό παραθέτουμε ολόκληρο το πρόγραμμα επίλυσης του προβλήματος αρχικών τιμών στο ATOMFT και εκθέτουμε ταυτόχρονα ορισμένες λεπτομέρειες όσον αφορά τους όρους που εμφανίζονται σ' αυτόν προς καλύτερη κατανόηση του αναγνώστη. Υπενθυμίζουμε ότι όλες οι αναγραφόμενες τιμές στις φυσικές ποσότητες που αναφέρονται στον κώδικα είναι σε βαρυτικές μονάδες.

01. Ο όρος HF είναι η βοηθητική συνάρτηση \mathcal{A} που γι' αυτήν έχουμε αναφέρει στην § 3.1.4.

02. Η ανεξάρτητη μεταβλητή X , που χρησιμοποιούμε εκφράζει την απόσταση από το κέντρο του αστέρα. Για να αποφύγουμε την εμφάνιση όρων της μορφής $(1/X)^\mu$ όπου $\mu = 1, 2, \dots$, αντικαθιστούμε την μεταβλητή X με τον όρο Z για τον οποίο ισχύει $Z = X + \text{SMALLX}$, όπου καθορίζουμε ότι $\text{SMALLX} = 10^{-3}$.

Το μονοπάτι της ολοκλήρωσης αρχίζει από το σημείο $r_1 = \Delta_1 + i\delta_1$ πολύ κοντά στο κέντρο του αστέρα, αφού π.χ. η Εξ. (2.1) δεν ορίζεται στο σημείο $r_0 = 0$. Συνεπώς, το Δ_1 αντιστοιχεί στον όρο $\text{ZEROR} = 10^{-3}$, ενώ το δ_1 αντιστοιχεί στον όρο $\text{ZEROI} = 0.5$. Για το τελικό σημείο στο μονοπάτι της ολοκλήρωσης $r_{\max} = r_{(\text{re})\max} + i\delta_1$, η ποσότητα $r_{(\text{re})\max}$ αντιστοιχεί στον όρο $\text{DSTNCE} = 20 \times 10^5$.

03. Για να αποφύγουμε την εμφάνιση όρων $d\Phi/dr$ σε παρανομαστές διαφορών μαθηματικών παραστάσεων ο όρος $\text{DGRPOT} = d\Phi/dr$, αντικαθίσταται με τον όρο DGRPOZ για τον οποίο ισχύει $\text{DGRPOZ} = \text{DGRPOT} + \text{ZERO}$, όπου καθορίζουμε ότι $\text{ZERO} = 10^{-8}$.

04. Ο όρος που αντιστοιχεί στην Κεπλεριανή γωνιακή ταχύτητα Ω_K , είναι ο $\text{COMCAP} = 2.65761 \times 10^{-7}$.

05. Ο όρος που αντιστοιχεί στο πραγματικό μέρος του βαρυτικού δυναμικού $\Phi_{(re)}(r_1)$ είναι ο GRPOIN = -4.76319×10^{-01} , ενώ αντίστοιχα του φανταστικού μέρους $\Phi_{(im)}(r_1)$ είναι ο GRPIIN = -2.28372×10^{-03} .

06. Στο πραγματικό μέρος της γωνιακής ταχύτητας $\Omega_{(re)}^{arb}$ αντιστοιχεί ο όρος OMARBR = 1.13206×10^{-10} , ενώ αντίστοιχα στο φανταστικό μέρος $\Omega_{(im)}^{arb}$ αντιστοιχεί ο όρος OMARBI = 3.30648×10^{-13} .

07. Ο όρος που αντιστοιχεί στο πραγματικό μέρος της κεντρικής πυκνότητας μάζας ηρεμίας, $\rho_{c(re)}$, είναι ο DENSMR = 2.96185×10^{-13} , ενώ αντίστοιχα του φανταστικού μέρους $\rho_{c(im)}$ είναι ο DENSMI = 2.865×10^{-15} .

08. Για τις σταθερές ποσότητες που χρησιμοποιούμε έχουμε

$$POL = n = 1.5,$$

$$GAM = \Gamma = 5/3,$$

$$C = 2.99792458 \times 10^{10},$$

$$G = 6.6732 \times 10^{-8},$$

$$OMINCO = \bar{\omega}_{(re)1}^{arb} = 1.82342,$$

$$RKRU = K = 3.38866 \times 10^7 \text{ (Πολυτροπική σταθερά)}.$$

Για τον έλεγχο της ακρίβειας των αποτελεσμάτων του προβλήματος χρησιμοποιούμε την μεταβλητή ERRLIM (error criterion), στην οποία δίνουμε την τιμή ERRLIM = 10^{-28} . Όπως έχουμε αναφέρει στην § 3.1.4, όσον αφορά τον αριθμό των κορυφών στο μιγαδικό μονοπάτι που ακολουθούμε θέτουμε KPTS = 2. Με την μεταβλητή LENSER = 24 ορίζουμε το πλήθος των όρων των σειρών Taylor. Τέλος, για τον αριθμό των βημάτων ολοκλήρωσης δίνουμε στην μεταβλητή NSTEPS = 10000.

Ακολουθεί στις επόμενες σελίδες το πρόγραμμα μας στο ATOMFT, για την επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών για πολυτροπικό δείκτη $n = 1.5$.

```
C File CPS15.ato
C CPS15. Illustrates simple ODEINP file
C Y.F. Chang, ATOMFT User Manual, Version 3.11
C Nonrotating neutron star model.
C Uniform rotation.
C Spherical-Quadrupole deformations.

COPTION DOUBLE,COMPLX,LENVAR=128,DUMP=6

DIFF(CDENS,X,0)=HF3
DIFF(CPRES,X,0)=RKRU*HF5
DIFF(HF,X,1)=-TOVA
DIFF(CMASS,X,1)=FOURPI*TOVB
DIFF(GRPOT,X,1)=DGRPOT
DIFF(DOMEGB,X,1)=-OMEGFA+OMEGFB+4.*OMEGFC
DIFF(OMEGB,X,1)=DOMEGB
DIFF(CM0,X,1)=1./3.*SPHM01+1./12.*SPHM02+SPHM03*CP0
DIFF(CP0,X,1)=-CHELP*(CM0*SPHP0A+SPHP0B+SPHP0C)+1./12.*SPHP0D
DIFF(CHU2,X,1)=-2.*CHH2*DGRPOT
DIFF(CHH2,X,1)=-COFACT*(2.*CHU2+CHH2*QUDEFA)
DIFF(CU2,X,1)=1./6.*QUDu2-2.*CH2*DGRPOT
DIFF(CH2,X,1)=COFACT*(QUDh2+1./3.*QUDEFB+1./12.*QUDEFc)

DIFF(GRPCON,X,0)=1./2.*ALOG(1.-2.*CMASS/Z)
DIFF(GRPINI,X,0)=GRPOIN+(GRPCON-GRPOT)
DIFF(OMGARB,X,0)=OMEGB+X/3.*DOMEGB

ZERO=1.D-8
SMALLX=1.D-3
PI=3.141592653589793D0
FOURPI=4.*PI

POL=1.5D0
POLINV=2./3.
GAM=5./3.
RKRU=3.38866D7

GRPOIN=-4.76319D-01
COMCAP=2.65761D-7
COMARB=1.13206D-10
CAPARB=COMCAP/COMARB
```

```
Z=X+SMALLX
ZTO2=Z*Z
ZTO3=Z*ZTO2
XTO2=X*X
XTO3=X*XTO2

HF2=HF*HF
HF3=HF*HF2
HF4=HF2*HF2
HF5=HF2*HF3

DENS=HF3
PRESS=RKRU*HF5
DCPDCD=RKRU*GAM*HF2
TOTDEN=CDENS+POL*PRESS
DPLUSP=TOTDEN+PRESS
XM2CM=X-2.*CMASS
ZM2CM=Z-2.*CMASS
Z2MTO2=ZM2CM*ZM2CM
X2MTO2=XM2CM*XM2CM
CHELP=1./Z2MTO2
ZPZM2M=Z*ZM2CM
XPXM2M=X*XM2CM
DGRPOZ=DGRPOT+ZERO
COFACT=1./(ZPZM2M*DGRPOZ)
DGPOT2=DGRPOT*DGRPOT

TOV10=3.*ZPZM2M*HF2*DCPDCD
TOV20=DPLUSP/TOV10
TOV100=FOURPI*XTO2*PRESS
TOV200=CMASS+X*TOV100
TOVA=TOV20*TOV200
TOVB=XTO2*TOTDEN
DGRPOT=TOV200/ZPZM2M

EXPNI=1.-2.*CMASS/Z
EXPMIF=EXP(-GRPOT)
EPEXPL=DPLUSP/EXPNI
COMRES=CAPARB*OMEGB
DOMRES=CAPARB*DOMEGB
OMEGFA=4.*DOMEGB/Z
```

OMEGFB=FOURPI*X*EPEXPL*DOMEGB

OMEGFC=FOURPI*EPEXPL*OMEGB

COMTO2=COMRES*COMRES

DOMTO2=DOMRES*DOMRES

EXPTO2=EXPMIF*EXPMIF

SPH10=FOURPI*XTO2*DPLUSP

SPH20=EXPTO2*COMTO2

SPHM01=2.*SPH10*SPH20*XTO2

SPH30=DOMTO2*EXPTO2

SPHM02=SPH30*XTO2*XPXM2M

SPHM02=SPH300*SPH250

DEDP=POL+1./DCPDCD

SPHM03=SPH10*DEDP

SPHP0A=1.+2.*TOV100

SPHP0B=CP0*SPH10*XM2CM

SPH40=-X+3.*CMASS+X*TOV100

SPHP0C=2./3.*SPH40*XPXM2M*SPH20

SPH50=DOMRES*XTO2*EXPTO2

SPH60=8.*COMRES+X*DOMRES

SPHP0D=SPH50*SPH60

QDHO10=2.*XPXM2M*DGPTO2

QDHO20=QDHO10-SPH10

QUDEFB=2.*CMASS/Z+QDHO20

QUD10=(1.+X*DGRPOT)*EXPTO2

QUD20=FOURPI*X*TOTDEN+DGRPOT

QUD30=4.*COMTO2*QUD20+X*DOMTO2

QUD40=2.*(1.+2.*X*DGRPOT)*COMTO2

QUD50=DOMTO2*XTO2+QUD40

QUD60=-2.*CMASS*QUD50

QUD70=QUD30*XTO2+QUD60

QUDu2=QUD10*QUD70

QUD80=(1.+QDHO10)*X

QUD90=-QUD40/(2.*COMTO2)

QUD100=QUD90*CMASS+QUD20*XTO2

QUDEFB=QUD100*QUD80*SPH20

QUD110=(-1.+QDHO10)*XPXM2M

QUDEFB=QUD110*XTO2*SPH30

```
QUDh2=-2.*CU2-CH2*QUDEFA
$
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
REAL*8 MUNIT
COMPLEX*16 GRPOIN,COMARB,CAPARB,POITO2,POITO4
COMPLEX*16 DEN,EXPIN,EXGPTI,PRESIN
COMPLEX*16 CK1,CK2,CK1H,CK2H,QDK1T,QDK2T
$
C=2.99792458D10
G=6.6732D-8
MUNIT=C**2/G
PUNIT=C**4/G
OMUNIT=C
OMINCO=1.82342D0
COMBAR=OMINCO/OMUNIT
C
RKCGS=5.3802D9
RKRU=RKCGS*MUNIT**GAM/PUNIT
C
DENSMR=2.96185D-13
DENSMI=2.86500D-15
C
GRPRIN=-4.76319D-01 ! <= SECOND RUN/FIRST RUN => -5.D-1
GRPIIN=-2.28372D-03 ! <= SECOND RUN/FIRST RUN => 0.D0
GRPOIN=DCMPLX (GRPRIN,GRPIIN)
C
COMCAP=2.65761D-7
OMARBR=1.13206D-10 ! <= SECOND RUN/FIRST RUN => 1.D-10
OMARBI=3.30648D-13 ! <= SECOND RUN/FIRST RUN => 0.D0
COMARB=DCMPLX (OMARBR,OMARBI)
CAPARB=COMCAP/COMARB
C
NSTEPS=10000
MPRINT=6
LIST=16
ERRLIM=1.D-28
LENSER=24
ZEROR=1.D-3
ZEROI=5.D-1
DSTNCE=20.D5
KPTS=2
```

```
POINTS (1) =DCMPLX (ZEROR, ZEROI)
POINTS (2) =DCMPLX (DSTNCE, ZEROI)
```

C

```
OPEN (UNIT=LIST, FILE='CPS15.TXT', STATUS='UNKNOWN')
POITO2=POINTS (1) *POINTS (1)
POITO4=POITO2*POITO2
DEN=DCMPLX (DENS MR, DENS MI)
PRESIN=1.D0/PUNIT*(RKCGS*(DEN*MUNIT)**GAM)
HF (1) =DEN** (1.D0/3.D0)
CDENS (1) =DEN
CMASS (1) =0.D0
CPRES (1) =PRESIN
GRPOT (1) =GRPOIN
DOMEGB (1) =0.D0
OMEGB (1) =COMBAR
CM0 (1) =0.D0
CP0 (1) =0.D0
EXPNIN=1.D0-2.D0*CMASS (1) /POINTS (1)
EXGPTI=EXP (-2.D0*GRPOIN)
QDK2T=- (2.D0/3.D0) *PI*EXPNIN*EXGPTI
CARBT2=CAPARB*CAPARB
COMBT2=COMBAR*COMBAR
CARCOM=CARBT2*COMBT2
CK1H=1.D0
CK2H=- (2.D0/3.D0) *PI*CK1H*(DEN+(POL+3.D0)*PRESIN)
CK1=1.D0
QDK1T=- (2.D0/3.D0) *PI*CK1*(DEN+(POL+3.D0)*PRESIN)
CK2=QDK1T+QDK2T*CARCOM*(DEN+(POL+1.D0)*PRESIN)
CHU2 (1) =CK2H*POITO4
CHH2 (1) =CK1H*POITO2
CU2 (1) =CK2*POITO4
CH2 (1) =CK1*POITO2
```

\$

\$

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να εξηγήσουμε ότι στο πρώτο μπλοκ του ODEINP περιέχονται αρκετοί όροι που αντιπροσωπεύουν πολύπλοκες μαθηματικές εκφράσεις, που δημιουργούν δυσκολίες στο ATOMFT όσον αφορά την ανάλυση σε σειρές Taylor κάθε συνιστώσας της λύσης. Για τον σκοπό αυτό αναλύουμε αυτούς τους όρους σε επί μέρους απλούστερες μορφές, διευκολύνοντας σημαντικά την εκτέλεση του προγράμματος. Παρακάτω, δίνουμε αναλυτικά τι αντιπροσωπεύει ο κάθε όρος που εμφανίζεται στο πρώτο μπλοκ του ODEINP.

$$\begin{aligned}
\text{HF} &= \mathcal{A} = \rho^{1/3} \\
\text{PRESS} &= P = K\mathcal{A}^5 \\
\text{DCPDCD} &= \frac{dP}{d\rho} = \Gamma K\mathcal{A}^2 \\
\text{TOTDEN} &= E = \rho + nP \\
\text{DPLUSP} &= E + P \\
\text{XM2CM} &= x - 2m \\
\text{ZM2CM} &= z - 2m \\
\text{Z2MTO2} &= (z - 2m)^2 \\
\text{X2MTO2} &= (x - 2m)^2 \\
\text{CHELP} &= \frac{1}{(z - 2m)^2} \\
\text{ZPZM2M} &= z(z - 2m) \\
\text{XPXM2M} &= x(x - 2m) \\
\text{DGRPOT} &= \frac{d\Phi}{dr} = \frac{m + 4\pi x^3 P}{z(z - 2m)} \\
\text{DGRPOZ} &= \frac{d\Phi}{dr} + \text{ZERO} \\
\text{COFACT} &= \frac{1}{z(z - 2m) \left(\frac{d\Phi}{dr} + \text{ZERO} \right)} \\
\text{DGPTO2} &= \left(\frac{d\Phi}{dr} \right)^2 \\
\text{TOV10} &= z(z - 2m) \left(\frac{dP}{d\rho} \right) \\
\text{TOV20} &= \frac{E + P}{z(z - 2m) \left(\frac{dP}{d\rho} \right)} \\
\text{TOV100} &= 4\pi x^2 P \\
\text{TOV200} &= m + 4\pi x^3 P \\
\text{TOVA} &= \frac{(E + P)(m + 4\pi x^3 P)}{z(z - 2m) \left(\frac{dP}{d\rho} \right)} \\
\text{TOVB} &= x^2 E \\
\text{EXPNI} &= 1 - 2m/z \\
\text{EXPMIF} &= e^{-\Phi} \\
\text{EPexpl} &= \frac{E + P}{1 - 2m/z} \\
\text{COMCAP} &= \Omega = 3.33305 \times 10^{-7} \\
\text{COMARB} &= \Omega_{\text{arb}} = 1.64822 \times 10^{-10} \\
\text{CAPARB} &= \frac{\Omega}{\Omega_{\text{arb}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{OMEGB} &= \bar{\omega} \\
\text{DOMEGB} &= \frac{d\bar{\omega}}{dr} \\
\text{COMRES} &= \frac{\Omega}{\Omega_{\text{arb}}} \bar{\omega} = \varpi \\
\text{DOMRES} &= \frac{\Omega}{\Omega_{\text{arb}}} \frac{d\bar{\omega}}{dr} \\
\text{OMEGFA} &= \frac{4}{z} \frac{d\bar{\omega}}{dr} \\
\text{OMEGFB} &= 4\pi x \frac{E+P}{1-2m/z} \frac{d\bar{\omega}}{dr} \\
\text{OMEGFC} &= 4\pi \frac{E+P}{1-2m/z} \bar{\omega} \\
\text{COMTO2} &= \varpi^2 \\
\text{DOMTO2} &= \left(\frac{d\varpi}{dr} \right)^2 \\
\text{EXPTO2} &= e^{-2\Phi} \\
\text{SPH10} &= 4\pi x^2 (E+P) \\
\text{SPH20} &= \varpi^2 e^{-2\Phi} \\
\text{SPHM01} &= 8\pi x^4 (E+P) \varpi^2 e^{-2\Phi} \\
\text{SPH30} &= \left(\frac{d\varpi}{dr} \right)^2 e^{-2\Phi} \\
\text{SPHM02} &= x^3 (x-2m) \left(\frac{d\varpi}{dr} \right)^2 e^{-2\Phi} \\
\text{DEDP} &= n + \frac{1}{dP/d\rho} \\
\text{SPHM03} &= 4\pi x^2 (E+P) \left(n + \frac{1}{dP/d\rho} \right) \\
\text{SPHP0A} &= 1 + 8\pi x^2 P \\
\text{SPHP0B} &= 4\pi x^2 p_0 (x-2m) (E+P) \\
\text{SPH40} &= -x + 3m + 4\pi x^3 P \\
\text{SPHP0C} &= \frac{2}{3} x (x-2m) (-x + 3m + 4\pi x^3 P) \varpi^2 e^{-2\Phi} \\
\text{SPH50} &= x^2 e^{-2\Phi} \frac{d\varpi}{dr} \\
\text{SPH60} &= 8\varpi + x \frac{d\varpi}{dr} \\
\text{SPHP0D} &= x^2 e^{-2\Phi} \frac{d\varpi}{dr} \left[8\varpi + x \frac{d\varpi}{dr} \right] \\
\text{QDHO10} &= 2x (x-2m) \left(\frac{d\Phi}{dr} \right)^2 \\
\text{QDHO20} &= 2x (x-2m) \left(\frac{d\Phi}{dr} \right)^2 - 4\pi x^2 (E+P) \\
\text{QUDEFA} &= \frac{2m}{z} + 2x (x-2m) \left(\frac{d\Phi}{dr} \right)^2 - 4\pi x^2 (E+P) \\
\text{QUD10} &= \left(1 + x \frac{d\Phi}{dr} \right) e^{-2\Phi} \\
\text{QUD20} &= 4\pi x E + \frac{d\Phi}{dr} \\
\text{QUD30} &= 4\varpi^2 \left[4\pi x E + \frac{d\Phi}{dr} \right] + x (d\varpi/dr)^2 \\
\text{QUD40} &= 2 \left(1 + 2x \frac{d\Phi}{dr} \right) \varpi^2 \\
\text{QUD50} &= x^2 \left(\frac{d\varpi}{dr} \right)^2 + 2 \left(1 + 2x \frac{d\Phi}{dr} \right) \varpi^2 \\
\text{QUD60} &= -2m \left[x^2 \left(\frac{d\varpi}{dr} \right)^2 + 2 \left(1 + 2x \frac{d\Phi}{dr} \right) \varpi^2 \right] \\
\text{QUD70} &= x^2 \left[4\varpi^2 \left(4\pi x E + \frac{d\Phi}{dr} \right) + x \left(\frac{d\varpi}{dr} \right)^2 \right] - 2m \left[x^2 \left(\frac{d\varpi}{dr} \right)^2 + 2 \left(1 + 2x \frac{d\Phi}{dr} \right) \varpi^2 \right] \\
\text{QUDu2} &= \left(1 + x \frac{d\Phi}{dr} \right) e^{-2\Phi} \left\{ x^2 \left[4\varpi^2 \left(4\pi x E + \frac{d\Phi}{dr} \right) + x \left(\frac{d\varpi}{dr} \right)^2 \right] - 2m \left[x^2 \left(\frac{d\varpi}{dr} \right)^2 + 2 \left(1 + 2x \frac{d\Phi}{dr} \right) \varpi^2 \right] \right\} \\
\text{QUD80} &= x \left[1 + 2x (x-2m) \left(\frac{d\Phi}{dr} \right)^2 \right] \\
\text{QUD90} &= - \left(1 + 2x \frac{d\Phi}{dr} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{QUD100} &= -m \left(1 + 2x \frac{d\Phi}{dr} \right) + x^2 \left(4\pi x E + \frac{d\Phi}{dr} \right) \\
\text{QUDEFB} &= \varpi^2 e^{-2\Phi} \left[-m \left(1 + 2x \frac{d\Phi}{dr} \right) + x^2 \left(4\pi x E + \frac{d\Phi}{dr} \right) \right] x \left[1 + 2x(x-2m) \left(\frac{d\Phi}{dr} \right)^2 \right] \\
\text{QUD110} &= x(x-2m) \left[-1 + 2x(x-2m) \left(\frac{d\Phi}{dr} \right)^2 \right] \\
\text{QUDEFC} &= x^3(x-2m) \left[-1 + 2x(x-2m) \left(\frac{d\Phi}{dr} \right)^2 \right] \left(\frac{d\varpi}{dr} \right)^2 e^{-2\Phi} \\
\text{QUdh2} &= -2v_2 - h_2 \left[2\frac{m}{z} + 2x(x-2m) \left(\frac{d\Phi}{dr} \right)^2 - 4\pi x^2 (E + P) \right]
\end{aligned}$$

Θα περιγράψουμε τώρα τον τρόπο με τον οποίο δημιουργήθηκε σταδιακά ο όρος TOVA.

$$\begin{aligned}
\text{ZM2CM} &= Z - 2 * \text{CMASS} = z - 2m \\
\text{ZPZM2M} &= Z * \text{ZM2CM} = z(z - 2m) \\
\text{TOV10} &= 3 * \text{ZPZM2M} * \text{HF2} * \text{DCPDCD} = z(z - 2m) \left(\frac{dP}{d\rho} \right) \\
\text{TOTDEN} &= \text{CDENS} + \text{POL} * \text{PRESS} = E = \rho + nP \\
\text{DPLUSP} &= \text{TOTDEN} + \text{PRESS} = E + P = \rho + (n + 1)P \\
\text{TOV20} &= \text{DPLUSP} / \text{TOV10} = \frac{E + P}{z(z - 2m) \left(\frac{dP}{d\rho} \right)} \\
\text{TOV100} &= \text{FOURPI} * \text{XT02} * \text{PRESS} = 4\pi x^2 P \\
\text{TOV200} &= \text{CMASS} + X * \text{TOV100} = m + 4\pi x^3 P \\
\text{TOVA} &= \text{TOV20} * \text{TOV200} = \frac{(E + P)(m + 4\pi x^3 P)}{z(z - 2m) \left(\frac{dP}{d\rho} \right)}
\end{aligned}$$

Παραθέτουμε τον παρακάτω Πίνακα με τους όρους $\text{DENS} = \rho$, $\text{PRESS} = P$, $\text{DCPDCD} = dP/d\rho$, TOV10 , οι οποίοι αντιστοιχούν σε διαφορετικές μαθηματικές εκφράσεις λόγω της χρήσης ή όχι της βοηθητικής συνάρτησης $\text{HF} = \mathcal{A}$, όπως έχουμε περιγράψει στην παράγραφο (3.1.4).

Πίνακας Γ.1: Μαθηματικές εκφράσεις που αντιστοιχούν στους όρους DENS, PRESS, DCPDCD, TOV10, για διάφορα πολυτροπικά μοντέλα.

n	DENS	PRESS	DCPDCD	TOV10
1.0	ρ	P	$K\Gamma\rho$	$K\Gamma\rho z(z - 2m)$
1.5	\mathcal{A}^3	$K\mathcal{A}^5$	$K\Gamma\mathcal{A}^2$	$3K\Gamma z(z - 2m)\mathcal{A}^4$
2.0	\mathcal{A}^2	$K\mathcal{A}^3$	$K\Gamma\mathcal{A}$	$2K\Gamma z(z - 2m)\mathcal{A}^2$
2.5	\mathcal{A}^5	$K\mathcal{A}^7$	$K\Gamma\mathcal{A}^2$	$5K\Gamma z(z - 2m)\mathcal{A}^6$
2.9	\mathcal{A}^{29}	$K\mathcal{A}^{39}$	$K\Gamma\mathcal{A}^{10}$	$29K\Gamma z(z - 2m)\mathcal{A}^{38}$

Παράρτημα Δ΄

Μονάδες που χρησιμοποιούνται στην διατριβή

Στην μαθηματική επεξεργασία του προβλήματός μας (Κεφ. (3)–(4)), οι συμπεριλαμβανόμενες φυσικές ποσότητες είναι εκπεφρασμένες σε “βαρυτικές μονάδες” (σε συντομία ‘*gu*’ ([48], §3.3)), που καλούνται επίσης και “γεωμετροποιημένες μονάδες” (βλέπε [9], [53]). Σ’ αυτές τις μονάδες η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας, G και η ταχύτητα του φωτός στο κενό, c , λαμβάνονται ίσες με την μονάδα $c_{\text{gu}} = G_{\text{gu}} = 1$ και το “μήκος” είναι το μοναδικό “βασικό” μέγεθος με μονάδα μέτρησης το centimeter (σε συντομία ‘*cm*’). Οι βαρυτικές μονάδες μιας φυσικής ποσότητας q είναι συνεπώς εκπεφρασμένες στην μονάδα βάσης, cm , υψωμένη σε έναν κατάλληλο εκθέτη, γ , δηλαδή $[q]_{\text{gu}} = cm^\gamma$. Από την άλλη μεριά, το σύστημα μονάδων ‘centimeter-gram-second units’ (σε συντομία ‘*cgs*’), που χρησιμοποιείται εκτενώς στην Αστροφυσική, έχει ως βασικές μονάδες το “μήκος” με μονάδα μέτρησης το cm , την “μάζα” με μονάδα μέτρησης το gram, (σε συντομία ‘*g*’) και τον “χρόνο” με μονάδα μέτρησης το *second* (σε συντομία ‘*s*’). Οι μονάδες *cgs* της ποσότητας q είναι συνεπώς εκπεφρασμένες ως $[q]_{\text{cgs}} = cm^a g^b s^d$. Για παράδειγμα, $[c]_{\text{cgs}} = cm^1 g^0 s^{-1} = cm s^{-1}$ και $[G]_{\text{cgs}} = cm^3 g^{-1} s^{-2}$. Χάριν απλότητας, θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω τα σύμβολα c και G για τις *cgs* μονάδες· συνεπώς θα γράφουμε c αντί του c_{cgs} και $[c]$ αντί του $[c]_{\text{cgs}}$ (παρομοίως και για το G). Αν τα εκθετικά που περιλαμβάνονται στις μονάδες της ποσότητας q , που επίσης καλούνται “διαστάσεις”, είναι όλες μηδέν σ’ ένα σύστημα μονάδων, τότε η q , είναι “αδιάστατο” μέγεθος σ’ αυτό το σύστημα.

Οι βαρυτικές μονάδες της q , $[q]_{\text{gu}} = cm^\gamma$, μπορούν να καθοριστούν από έναν κατάλληλο συνδυασμό των εκθετών α , β , γ , a , b , d , έτσι ώστε

$$cm^\gamma = \frac{[G]^\beta}{[c]^\alpha} cm^a g^b s^d, \quad (\Delta.1)$$

ή ισοδυνάμως

$$\frac{[c]^\alpha}{[G]^\beta} \text{cm}^\gamma = \text{cm}^a \text{g}^b \text{s}^d. \quad (\Delta'.2)$$

Αντικαθιστώντας τα $[c]$ και $[G]$, παίρνουμε $\text{cm}^{\alpha-3\beta+\gamma} \text{g}^\beta \text{s}^{2\beta-\alpha} = \text{cm}^a \text{g}^b \text{s}^d$, οι οποίες διαχωρίζονται (λόγω της ανεξαρτησίας των τριών μονάδων βάσεων), σε ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων

$$\begin{cases} \alpha - 3\beta + \gamma = a, \\ \beta = b, \\ 2\beta - \alpha = d. \end{cases} \quad (\Delta'.3)$$

Για παράδειγμα, η πυκνότητα ρ έχει cg_s μονάδες $[\rho]_{cg_s} = \text{cm}^{-3} \text{g}^1 \text{s}^0$, δηλαδή, $a = -3$, $b = 1$, $d = 0$. Οπότε, $\beta = 1$ (από Εξ. (Δ'.3β)), $\alpha = 2$ (από β και Εξ. (Δ'.3ς)), $\gamma = -2$ (από β , α , και Εξ. (Δ'.3α)) και $[\rho]_{gu} = \text{cm}^{-2}$. Έτσι ρ έχει διάσταση $[-2]$ σε βαρυτικές μονάδες. Ο συντελεστής μετατροπής της ρ από βαρυτικές μονάδες σε cg_s μονάδες είναι $c^\alpha/G^\beta = c^2/G$. Έτσι $\rho_{cg_s} = (c^2/G) \times \rho_{gu}$. Αντιστρόφως, ο συντελεστής μετατροπής της ρ από cg_s μονάδες σε βαρυτικές μονάδες είναι $G^\beta/c^\alpha = G/c^2$. Έτσι $\rho_{gu} = (G/c^2) \times \rho_{cg_s}$. Τώρα, παίρνουμε σαν δεύτερο παράδειγμα το βαρυτικό δυναμικό Φ , που έχει cg_s μονάδες $[\Phi]_{cg_s} = \text{cm}^2 \text{g}^0 \text{s}^{-2}$, δηλαδή, $a = 2$, $b = 0$, $d = -2$. Οπότε, $\beta = 0$, $\alpha = 2$, $\gamma = 0$ και $[\Phi]_{gu} = \text{cm}^0$. Συνεπώς το Φ έχει διάσταση $[0]$ σε βαρυτικές μονάδες (αδιάστατο). Ο συντελεστής μετατροπής του Φ από βαρυτικές μονάδες σε cg_s μονάδες είναι $c^\alpha/G^\beta = c^2$. Έτσι $\Phi_{cg_s} = c^2 \times \Phi_{gu}$. Αντιστρόφως, ο συντελεστής μετατροπής του Φ από cg_s μονάδες σε βαρυτικές μονάδες είναι $G^\beta/c^\alpha = 1/c^2$. Συνεπώς $\Phi_{gu} = (1/c^2) \times \Phi_{cg_s}$. Εργαζόμενοι ανάλογα, μπορούμε να επιβεβαιώσουμε τις βαρυτικές μονάδες και τους συντελεστές μετατροπής, που δίνονται στον Πίνακα Δ'.1, για διάφορες φυσικές ποσότητες (επί του θέματος βλέπε επίσης [13], Πίνακας 1).

Εφόσον έχουμε υπολογίσει μια φυσική ποσότητα σε βαρυτικές μονάδες, μπορούμε να τις μετατρέψουμε είτε σε cg_s μονάδες, είτε σε "πολυτροπικές μονάδες" (σε συντομία 'pu'. [22], § 2, Εξς. (4)-(13)). Σε πολυτροπικές μονάδες όλες οι φυσικές ποσότητες είναι αδιάστατες. Πράγματι, η πολυτροπική σταθερά K (για λεπτομέρειες στα πολύτροπα, βλέπε § 1.2), έχει σε cg_s μονάδες $[K]_{cg_s} = \text{cm}^{2+(3/n)} \text{g}^{-1/n} \text{s}^{-2}$, όπου n είναι ο πολυτροπικός δείκτης και σε βαρυτικές μονάδες $[K]_{gu} = \text{cm}^{2/n}$, που καθορίζονται από την διαδικασία που εξηγείται ανωτέρω. Συνεπώς, ο συντελεστής $K_{gu}^{n/2}$ έχει βαρυτικές μονάδες $[K_{gu}^{n/2}]_{gu} = \text{cm}^{(2/n)(n/2)} = \text{cm}$. Είναι επομένως μια θεμελιώδης κλίμακα μήκους του φυσικού συστήματος. Διαιρώντας την q_{gu} με $K_{gu}^{\gamma(n/2)}$ (αμφότερες έχουν μονάδες cm^γ), υπολογίζουμε την αδιάστατη ποσότητα q_{gu} , που εκφράζει την ποσότητα q σε πολυτροπικές μονάδες. Τέτοιοι συντελεστές έχουν χρησιμοποιηθεί στην § 4.1 (Πίνακες 4.1-4.5) για την μετατροπή διάφορων φυσικών

Πίνακας Δ'.1: Συντελεστές μετατροπής βαρυτικών μονάδων σε *cgs* μονάδες.

Φυσική ποσότητα	Βαρυτικές μονάδες	Συντελεστής μετατροπής	Αριθμητική τιμή
Μήκος	cm	1	1.000(+00)
Μάζα	cm	c^2/G	1.347(+28)
Χρόνος	cm	$1/c$	3.336(-11)
Πυκνότητα	cm^{-2}	c^2/G	1.347(+28)
Πίεση	cm^{-2}	c^4/G	1.210(+49)
Ενέργεια	cm	c^4/G	1.210(+49)
Βαρυτικό δυναμικό	αδιάστατο	c^2	8.988(+20)
Ταχύτητα	αδιάστατο	c	2.998(+10)
Γωνιακή ταχύτητα	cm^{-1}	c	2.998(+10)
Ορμή	cm	c^3/G	4.038(+38)
Στροφορμή	cm^2	c^3/G	4.038(+38)
Ροπή αδράνειας	cm^3	c^2/G	1.347(+28)
Τετραπολική ροπή	cm^3	c^6/G^3	2.443(+84)

ποσοτήτων από βαρυτικές μονάδες σε πολυτροπικές μονάδες (επί του θέματος, βλέπε επίσης [15], Πίνακας 1).

Ευχαριστίες

Ο συντάκτης αναγνωρίζει την χρήση του ATOMFT System.

Βιβλιογραφία

- [1] J. B. Hartle, *Astrophys. J.* **150**, 1005 (1967).
- [2] J. B. Hartle and K. S. Thorne, *Astrophys. J.* **153**, 807 (1968).
- [3] J. B. Hartle, *Astrophys. J.* **24**, 385 (1973).
- [4] J. B. Hartle, *Astrophys. J.* **196**, 653 (1975).
- [5] J. B. Hartle, *Astrophys. J.* **161**, 111 (1970).
- [6] J. B. Hartle, *Astrophys. J.* **195**, 203 (1975).
- [7] J. B. Hartle, *Astrophys. J.* **198**, 467 (1975).
- [8] J. B. Hartle and J. L. Friedman *Astrophys. J.* **196**, 653 (1975).
- [9] O. Benhar, V. Ferrari, L. Gualtieri, S. Marassi, *Phys. Rev. D* **72**,044028 (2005).
- [10] V. S. Geroyannis, *Astrophys. J.* **327**, 273 (1988).
- [11] V. S. Geroyannis, *Astrophys. J.* **350**, 355 (1990).
- [12] V. S. Geroyannis and P. J. Papatotiriou, *Astrophysical Journal Supplement* **121**, 219 (1999).
- [13] P. J. Papatotiriou and V. S. Geroyannis, *Int. J. Mod. Phys. C* **14**, 3 (2003).
- [14] P. J. Papatotiriou, V. S. Geroyannis, and S. A. Sanidas, *International Journal of Modern Physics C* **18**(11), 1735 (2007).
- [15] V. S. Geroyannis, A. G. Katelouzos *Int. J. Mod. Phys. C* **19**, 1863 (2008).
- [16] E. Berti, F. White, A. Maniopoulou, M. Bruni, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **358**, 923 (2005).

- [17] S. L. Shapiro and A. P. Lightman, *Astrophys. J.* **207**, 263 (1976).
- [18] S. Chandrasekhar, *Astrophys. J.* **140**, 417 (1964).
- [19] R. F. Tooper, *Astrophysical Journal* **142**, 1541 (1965).
- [20] R. F. Tooper, *Astrophysical Journal* **143**, 465 (1966).
- [21] Gr. B. Cook, S. L. Shapiro, S. A. Teukolsky, *Astrophys. J.* **398**, 203 (1992).
- [22] Gr. B. Cook, S. L. Shapiro, S. A. Teukolsky, *Astrophys. J.* **422**, 227 (1994).
- [23] J. L. Friedmann, J. R. Ipser and L. Parker, *Astrophys. J.* **304**, 115 (1986).
- [24] G. Baym, C. Pethic and P. Sutherland, *Astrophys. J.* **170**, 299 (1971).
- [25] T. Nozawa, N. Stergioulas, E. Gourgoulhon, and Y. Eriguchi, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* **132**, 431 (1998).
- [26] A. Passamonti, A. Stavridis, and K. Kokkotas, *Physical Review D* **77**, 024029 (2007).
- [27] W. D. Arnett and R. L. Bowers, *Astrophysical Journal Supplement* **33**, 415 (1977).
- [28] K. D. Kokkotas and J. Ruoff, *Astronomy and Astrophysics* **366**, 565 (2001).
- [29] J. M. Bardeen, K. S. Thorne, and D. W. Meltzer, *Astrophysical Journal* **145**, 505 (1966).
- [30] D. Gondek, P. Haensel, and J. L. Zdunik, *Astronomy and Astrophysics* **325**, 217 (1997).
- [31] G. Chanmugan, *Astrophysical Journal* **217**, 799 (1977).
- [32] N. D. Lyford, T. W. Baumgarte, and S. L. Shapiro, *Astrophysical Journal* **583**, 410 (2003).
- [33] N. Stergioulas, T. A. Apostolatos, and J. A. Font, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **352**, 1089 (2004).
- [34] T. Regge, J. Wheeler, *Physical Review* **108**, 1063 (1957).

-
- [35] Y. F. Chang, *ATOMFT User Manual Version 3.11* (1994). Available from Dr. George Corliss: George.Corliss@Marquette.edu.
- [36] Y. F. Chang and G. Corliss, *Computers Math. Applic.* **28**, 209 (1994).
- [37] Y. F. Chang, *Automatic solution of differential equations*. In *Constructive and Computational Methods for Differential Equations*, edited by D. L. Colton and R. P. Gilbert, *Springer Lecture Notes in Mathematics* **430**, 61 (1974).
- [38] Y. F. Chang and G. Corliss, *J. Inst. Math. Appl.* **25**, 349 (1980).
- [39] Y. F. Chang and G. Corliss, *ACM Trans. Math. Soft.* **8**, 114 (1982).
- [40] G. Corliss, *README for ATOMFT Version 3.11* (ATOMFT Compiler, version 3.11, Copyright (C) 1979-94, Y. F. Chang. Version 3.11 completed (6/21/93)), revised 20-JAN-1994 by George Corliss (1994). Available from Dr. George Corliss: George.Corliss@Marquette.edu.
- [41] G. Corliss, *Math. Comp.* **35**, 1181 (1980).
- [42] D. M. Monro, *FORTTRAN 77* (E. Arnold, London, 1982).
- [43] R. V. Churchill, *Complex variables and applications* (McGraw-Hill, New York, 1960).
- [44] Fr. White, *Geometrical and physical aspects of rotating neutron star models*, (University of Portsmouth, 2005).
- [45] N. Stergioulas, *Rotating Neutron Stars (RNS) Package*, which is available at www.gravity.phys.uwm.edu/rns/index.html.
- [46] L.S. Finn, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 1878 (1994).
- [47] M.H. van Kerkwijk, J. van Paradijs, E.J. Zuiderwijk *Astron. Astrophys.* **303**, 497 (1995).
- [48] N. K. Glendenning, *Compact Stars, Nuclear Physics, Particle Physics, and General Relativity, Second Edition* (Springer-Verlag, New York, 2000).
- [49] O. Gron, S. Hervik, *Einstein's General Theory of Relativity - Springer* (2007).

- [50] L. Landau, E. Lifshitz, *Classical Theory of Fields* - (Εκδόσεις: Addison-Wesley).
- [51] S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars* (J. Wiley, New York, 1983).
- [52] B. F. Schutz, *ΓΕΝΙΚΗ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑ*- (Εκδόσεις: Cambridge University Press Copyright ©1974).
- [53] J. B. Hartle, *GRAVITY (An Introduction to Einstein's General Relativity)*- (Εκδόσεις: Addison-Wesley Copyright ©2003).
- [54] S. Wolfram, *The Mathematica Book, 5th ed.* Wolfram Media, Inc., 2004.

Ευρετήριο

- αδιαβατικός δείκτης, 2
- βαρυονική μάζα, 46
- βαρυτική δυναμική ενέργεια, 47
- βαρυτικό δυναμικό, 31
- διόρθωση τρίτης τάξης στην βαρυτική δυναμική ενέργεια, 50
- διόρθωση τρίτης τάξης στην περιστροφική κινητική ενέργεια, 50
- διόρθωση τρίτης τάξης στην ροπή αδράνειας, 49
- διόρθωση τρίτης τάξης στην στροφορμή, 49
- εξς. Oppenheimer-Volkoff, 7
- γωνιακή ταχύτητα *Kepler* , 5
- ιδιομάζα, 46
- ισημερινή περιφερειακή ακτίνα, 37
- ισημερινή συντεταγμένη ακτίνα, 37
- μέθοδος *Hartle*, 4
- ολική πίεση, 37
- ολική πυκνότητα μάζας-ενέργειας, 37
- περιστροφική κινητική ενέργεια, 46
- πολική περιφερειακή ακτίνα, 37
- πολική συντεταγμένη ακτίνα, 37
- πολυτροπική σταθερά, 2
- πολυτροπικός δείκτης, 2
- πυκνότητα μάζας-ενέργειας, 3
- πυκνότητα της μάζας ηρεμίας, 2
- ροπή αδράνειας, 46
- σφαιρική παραμόρφωση, 12
- σφαιρική παραμόρφωση ακτίνας, 48
- σφαιρική παραμόρφωση βαρυονικής μάζας, 47
- σφαιρική παραμόρφωση βαρυτικής μάζας, 47
- σφαιρική παραμόρφωση ιδιομάζας, 47
- στροφορμή, 32
- τετραπολική διόρθωση ακτίνας, 15
- τετραπολική διόρθωση μάζας, 15
- τετραπολική διόρθωση πίεσης, 15, 36
- τετραπολική παραμόρφωση, 14
- τετραπολική ροπή, 35
- Complex-Plane Strategy, 21
- dragging of the inertial frames, 8
- mass-shedding limit, 50