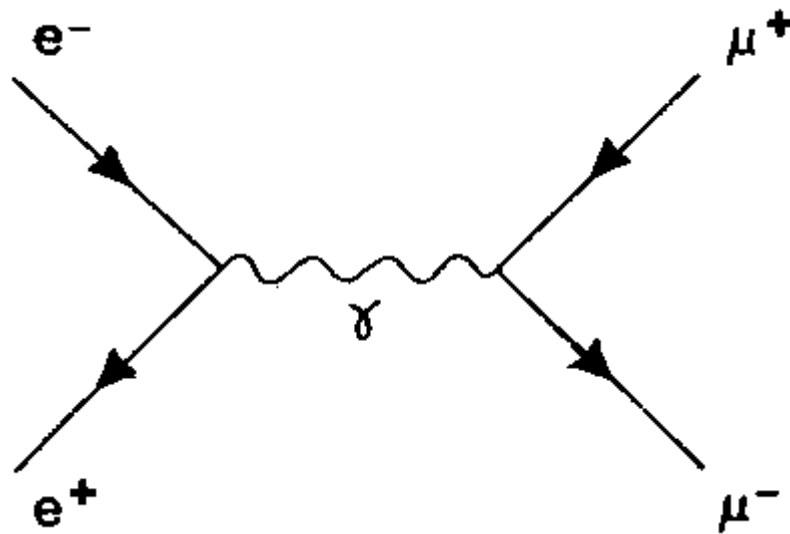




Q U A N T U M E L E C T R O D Y N A M I C S



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ – ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
Στα πλαίσια του Μεταπτυχιακού προγράμματος σπουδών.

ΙΩΑΝΝΗΣ Ε. ΣΦΑΕΛΟΣ
2004

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Κανόνες Feynman
2. Ελαστική σκέδαση ηλεκτρονίου από εξωτερικό στατικό πεδίο
3. Ομαλοποίηση – Επανακανονικοποίηση
4. Υπολογισμός διορθωμένης ενεργού διατομής στην ελαστική σκέδαση ηλεκτρονίου από εξωτερικό στατικό πεδίο
5. Σκέδαση ηλεκτρονίου – ηλεκτρονίου
6. Διαδικασία παραγωγής μιονίων : $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$
7. Σκέδαση ηλεκτρονίου – ποζιτρονίου
8. Υπολογισμός πλάτους σκέδασης σε μεγαλύτερες τάξεις

1. Κανόνες Feynman

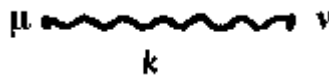
- (i) Σε κάθε κορυφή του διαγράμματος αντιστοιχούμε τον όρο : $-ie\gamma_\mu$.
Για την περίπτωση του Σχ. 1, όπου έχουμε μία κορυφή φωτονίου-ηλεκτρονίου θα έχουμε : $(-ie)\gamma_\mu(2\pi)^4\delta(p-p'-k)$.



Σχ. 1

- (ii) Σε κάθε εν δυνάμει φωτόνιο ορμής k (Σχ. 2), αντιστοιχούμε

$$\text{τον όρο : } iD_F(k)_{\mu\nu} = \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$$



Σχ. 2

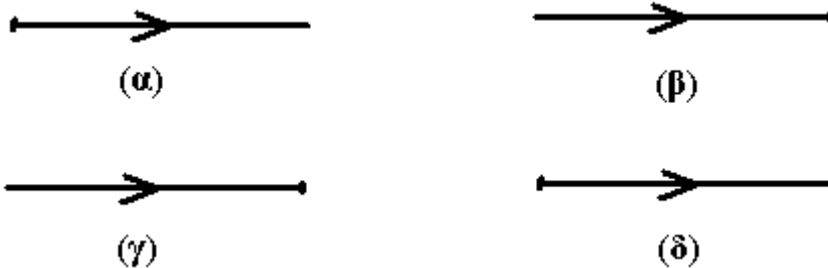
- (iii) Σε κάθε εν δυνάμει φερμιόνιο ορμής p (Σχ. 3), αντιστοιχούμε

$$\text{τον όρο : } iS_F(p) = \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

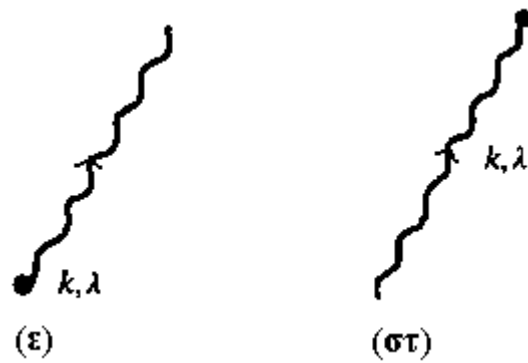


Σχ. 3

- (iv) Για τα πραγματικά σωμάτια :



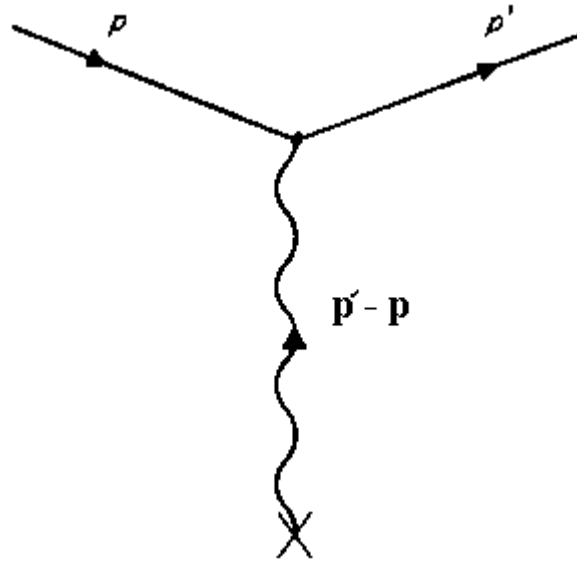
Σχ. 4



Σχ. 5

Αρχικό ηλεκτρόνιο : $u(p,s)$	Σχ.4 (α)
Τελικό ηλεκτρόνιο : $\bar{u}(p,s)$	Σχ.4 (β)
Αρχικό ποζιτρόνιο : $\bar{v}(p,s)$	Σχ.4 (δ)
Τελικό ποζιτρόνιο : $v(p,s)$	Σχ.4 (γ)
Αρχικό φωτόνιο : $\varepsilon(k,\lambda)$	Σχ. 5(στ)
Τελικό φωτόνιο : $\varepsilon^*(k,\lambda)$	Σχ. 5(ε)

2. Ελαστική σκέδαση ηλεκτρονίου από εξωτερικό στατικό πεδίο.



Σχ. 6

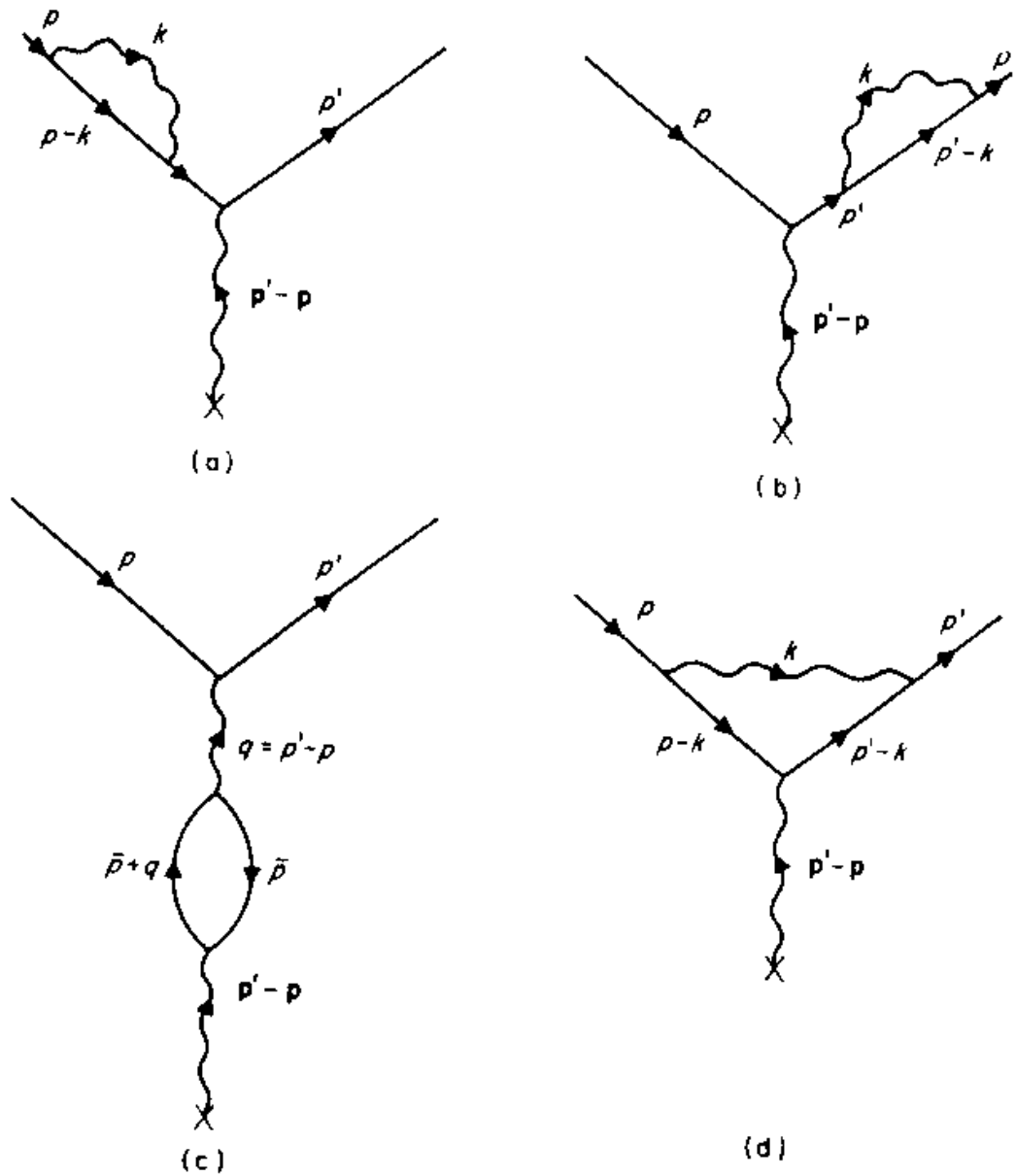
Στο Σχ. 6, βλέπουμε το διάγραμμα Feynman στην χαμηλότερης τάξης προσέγγιση. Το πλάτος Feynman, δίνεται από την σχέση :

$$M^{(0)} = ie_0 \bar{u}(\mathbf{p}') A_e(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) u(\mathbf{p}) \quad (2-1)$$

Στην προσέγγιση δεύτερης τάξης, η σκέδαση γίνεται μέσω των τεσσάρων διαδικασιών, οι οποίες περιγράφονται από τα παρακάτω διαγράμματα Feynman (Σχ. 7). Στο κάθε διάγραμμα αυτού του σχήματος, μπορεί να θεωρηθεί σαν μια τροποποίηση του διαγράμματος χαμηλότερης τάξης (Σχ. 6), με τις αντιστοιχίσεις που φαίνονται στο Σχ. 8. Για παράδειγμα, το διάγραμμα Feynman (α - Σχ. 7) προέκυψε, κάνοντας την αντικατάσταση του διαγράμματος (α - Σχ. 8), στην εισερχόμενη γραμμή του ηλεκτρονίου του διαγράμματος (Σχ. 6), κ.ο.κ.

Στο Σχ. 8 φαίνονται και οι τρεις απαιτούμενες αντικαταστάσεις, από τις οποίες στο (α) έχουμε το κομμάτι της αυτοενέργειας του ηλεκτρονίου, στο (β) το κομμάτι της αυτοενέργειας του φωτονίου (vacuum polarization) και στο (γ) το κομμάτι κορυφής, οι μαθηματικές περιγραφές των οποίων σύμφωνα με τους κανόνες του Feynman είναι αντίστοιχα :

$$ie_0^2 \Sigma(\mathbf{p}) = \frac{(ie_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4 k iD_F^{\mu\nu}(\mathbf{k}) \gamma^\mu iS_F(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \gamma^\nu \quad (2-2)$$



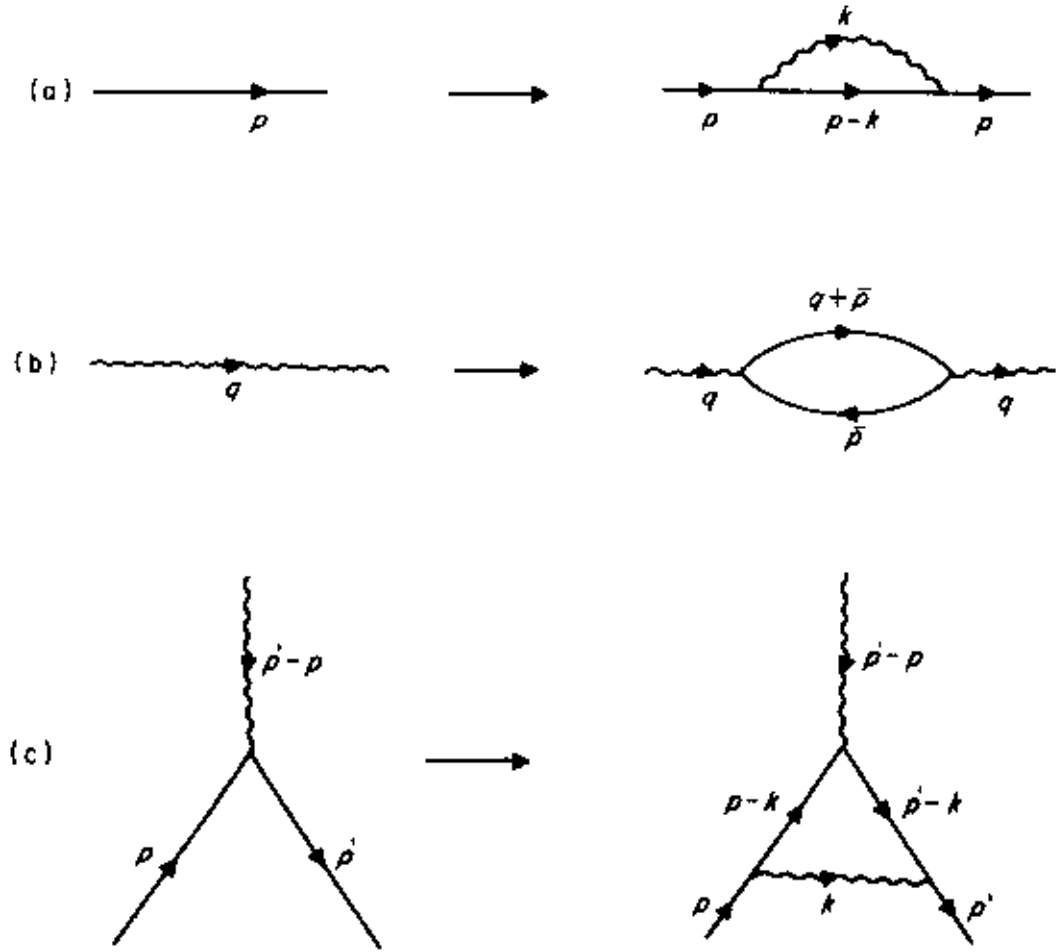
Σχ. 7

$$ie_0^2 \Pi^{\mu\nu}(q) = \frac{(ie_0)^2}{(2\pi)^4} (-1) \text{Tr} \int d^4 \bar{p} \gamma^\mu iS_F(\bar{p}+q) \gamma^\nu iS_F(\bar{p}) \quad (2-3)$$

$$e_0^2 \Lambda^\mu(p', p) = \frac{(ie_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4 k \gamma^\alpha iS_F(p'-k) \gamma^\mu iS_F(p-k) \gamma^\beta iD_F^{\alpha\beta}(k) \quad (2-4)$$

Τα πλάτη Feynman για τα διαγράμματα (α),(β),(γ),(δ) του Σχ. 7 είναι αντίστοιχα :

$$M_a^{(2)} = ie_0 \bar{u}(p') \mathbb{A}_e(p'-p) iS_F(p) ie_0^2 \Sigma(p) u(p) \quad (2-5)$$

 $\Sigma\chi. 8$

$$M_b^{(2)} = ie_0 \bar{u}(p') ie_0^2 \Sigma(p') iS_F(p') A_e(p' - p) u(p) \quad (2-6)$$

$$M_c^{(2)} = ie_0 \bar{u}(p') \gamma^\lambda u(p) iD_F^{\lambda\mu}(q) ie_0^2 \Pi^{\mu\nu}(q) A_{e\nu}(p' - p) u(p) \quad (2-7)$$

$$M_d^{(2)} = ie_0 \bar{u}(p') e_0^2 \Lambda^\mu(p', p) u(p) A_{e\mu}(p' - p) \quad (2-8)$$

3. Ομαλοποίηση - Επανακανονικοποίηση

Θα περίμενε κανείς ότι η χρήση των όρων (2-2),(2-3),(2-4) να βελτιώνει τα αποτελέσματα. Εν τούτοις όμως, τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται σ' αυτούς τους όρους αποκλίνουν, τόσο για τις μεγάλες τιμές των k, \bar{p} όσο και για τις πολύ μικρές τιμές του k . Κατά συνέπεια, τα αποτελέσματα δεν θα έχουν φυσική έννοια. Εξ άλλου είχε γίνει αντιληπτό ότι οι γραμμές στα διαγράμματα Feynman παριστάνουν γυμνά ηλεκτρόνια και όχι πραγματικά ηλεκτρόνια που παρατηρούμε στο εργαστήριο. Τα πραγματικά ηλεκτρόνια είναι ντυμένα, δηλαδή συνέχεια εκπέμπουν και απορροφούν ενδιάμεσα φωτόνια. Η άρση αυτού του προβλήματος γίνεται σε δύο βήματα :

- 1) Πρώτα η θεωρία «ομαλοποιείται», δηλαδή γίνονται επεμβάσεις π.χ. με χρησιμοποίηση μιας παραμέτρου αποκοπής (cut-off) Λ , σύμφωνα με την οποία η υπό ολοκλήρωση ποσότητα πολλαπλασιάζεται με μια κατάλληλη συνάρτηση της Λ , έτσι ώστε να οδηγούν σε σύγκλιση τα διάφορα ολοκληρώματα ώστε να μην υπάρχουν αποκλίσεις σε όλες τις τάξεις προσέγγισης. Η αρχική θεωρία επανακτάται, αφήνοντας την συνάρτηση αυτή της Λ να τείνει στην μονάδα. Μια άλλη μέθοδος είναι η διαστατική ομαλοποίηση (dimensional regularization), με την οποία οι αποκλίσεις των τετραπλών ολοκληρωμάτων παύουν να υφίστανται αν θεωρήσουμε τα ολοκληρώματα πάνω σε χώρους d -διαστάσεων και μετά πάρουμε το όριο $d \rightarrow 4$.
- 2) Μετά ακολουθεί η επανακανονικοποίηση (renormalization), που στηρίζεται στην διαφοροποίηση των πραγματικών σωματίων. Όλα τα άπειρα που εμφανίζονταν στα διαγράμματα Feynman απορροφώνται σε δύο σταθερές, που είναι η διαφορά στην μάζα (Δm) μεταξύ ενός πραγματικού (m) και ενός γυμνού (m_0) ηλεκτρονίου και στην αντίστοιχη διαφορά φορτίου μεταξύ ενός πραγματικού (e) ηλεκτρονίου και ενός γυμνού (e_0) ηλεκτρονίου.

A) Διόρθωση φωτονικού διαδότη (photon propagator)

Σ' αυτήν την διόρθωση κάνουμε την αντικατάσταση :

$$iD_F^{\alpha\beta}(k) \rightarrow iD_F^{\alpha\mu}(k) i e_0^2 \Pi^{\mu\nu}(k) iD_F^{\nu\beta}(k) \quad (3-1)$$

όπου $\Pi^{\mu\nu}$ είναι το ολοκλήρωμα που αναφέρθηκε στην εξ. (2-3). Αυτό μπορεί να γραφεί και ως εξής :

$$i e_0^2 \Pi^{\mu\nu}(k) = \frac{-e_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{\text{Tr}[\gamma^\mu (\not{p} + \not{k} + m_0) \gamma^\nu (\not{p} + m_0)]}{[(p+k)^2 - m_0^2 + i\varepsilon][p^2 - m_0^2 + i\varepsilon]} \quad (3-2)$$

Αυτός ο ταυνοστής δεύτερης τάξης $\Pi^{\mu\nu}$ μπορεί να γραφεί με την γενική μορφή (με χρήση μόνο του k^μ τετρα-διανύσματος):

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = -g^{\mu\nu}A(k^2) + k^\mu k^\nu B(k^2) \quad (3-3)$$

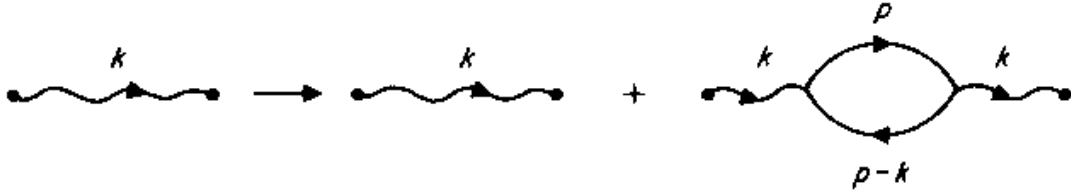
Αποδεικνύεται μέσω της διατήρησης των ρευμάτων, ότι οι όροι που είναι ανάλογοι της τετρα-ορμής του φωτονίου μηδενίζονται. Έτσι ο όρος $\Pi^{\mu\nu}$ γίνεται :

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = -g^{\mu\nu}A(k^2) \quad (3-4)$$

Αν λάβουμε υπόψιν και τον όρο χαμηλότερης τάξης (βλέπε Σχ. 9) τότε η αντικατάσταση (3-1) γίνεται :

$$\frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} \rightarrow \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} + \frac{-ig_{\alpha\mu}}{k^2 + i\varepsilon} ie_0^2 \Pi^{\mu\nu}(k) \frac{-ig_{\nu\beta}}{k^2 + i\varepsilon} \quad (3-5)$$

οπότε αν αντικαταστήσουμε και την (3-4) έχουμε :



Σχ. 9

$$\frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} \rightarrow \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} \left[1 - e_0^2 A(k^2) \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \right] \quad (3-6)$$

Αυτή η έκφραση (3-6) μπορεί να γραφεί επίσης :

$$\frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} \rightarrow \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon + e_0^2 A(k^2)} + 0(e_0^4) \quad (3-7)$$

Το δεξί μέλος της σχέσης (3-7) αναπαριστάνει τον διαδότη του πραγματικού φωτονίου και έχει πόλο στο σημείο: $-e_0^2 A(k^2)$ και δεδομένου ότι το φωτόνιο έχει μηδενική μάζα ηρεμίας, απαιτούμε :

$$A(0) = A(k^2 = 0) = 0 \quad (3-8)$$

Έτσι, μπορούμε να γράψουμε :

$$A(k^2) = k^2 A'(0) + k^2 \Pi_c(k^2) \quad (3-9)$$

$$\text{όπου : } A'(0) \equiv A'(k^2 = 0) = \left. \frac{dA(k^2)}{d(k^2)} \right|_{k^2=0}$$

και ο $\Pi_c(k^2)$ μηδενίζεται γραμμικά ως προς το k^2 για $k^2 = 0$. Αντικαθιστώντας την εξ. (3-9) στην εξ. (3-6) και πολλαπλασιάζοντας με e_0^2 , βρίσκουμε :

$$\frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} e_0^2 \rightarrow \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} e_0^2 \left[1 - e_0^2 A'(0) \right] + \frac{ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} e_0^4 \Pi_c(k^2) \quad (3-10)$$

Ο πολλαπλασιασμός με τον όρο e_0^2 γίνεται, λόγω εφαρμογής των κανόνων Feynman στην περίπτωση των κορυφών. Μία σημαντική παρατήρηση που μπορούμε να κάνουμε στην σχέση (3-10), είναι ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους

που είναι ίσο με το αριστερό μέλος πολλαπλασιασμένο με τον όρο : $1 - e_0^2 A'(0)$, δηλαδή είναι σαν τα σωματίια που αλληλεπιδρούν διαμέσου του διορθωμένου φωτονικού διαδότη να έχουν φορτίο e αντί του e_0 , όπου :

$$e^2 = e_0^2 [1 - e_0^2 A'(0)] \quad (3-11)$$

ή πιο ολοκληρωμένα :

$$e \equiv Z_3^{1/2} e_0 = e_0 \left[1 - \frac{1}{2} e_0^2 A'(0) + O(e_0^4) \right] \quad (3-12)$$

Η σχέση αυτή ορίζει τον επανακανονισμό του φορτίου και συνδέει το φορτίο e ενός πραγματικού αλληλεπιδρώντος σωματίου με το φορτίο e_0 του μοντέλου του. Για τον υπολογισμό διαφόρων φυσικών μεγεθών , π.χ. της ενεργού διατομής σε μία σκέδαση θα πρέπει να χρησιμοποιούμε το πραγματικό φορτίο. Στο όριο που επανακτούμε την αρχική θεωρία, ο όρος $\Pi_c(k^2)$ θα είναι πεπερασμένος , ενώ το μέγεθος Z_3 θα αποκλίνει, πράγμα όμως που δεν έχει καμία συνέπεια στα διάφορα προβλεπόμενα φυσικά μεγέθη, αφού συνδέει το μη πραγματικό, άρα και μη παρατηρήσιμο φορτίο e_0 , με το πραγματικό e . Η φυσική σημασία αυτού του επανακανονισμού έγκειται στο γεγονός ότι η ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση μεταξύ φορτισμένων σωματίων συνδέεται άμεσα με το φορτίο αυτών, συνεπώς κάποια αλλαγή στην αλληλεπίδραση θα πρέπει να αντανακλάται στο φορτίο.

B) Διόρθωση φερμιονικού διαδότη (fermion propagator)

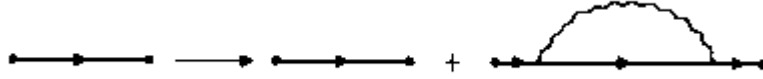
Στην περίπτωση (α) του Σχ. 8, είχαμε δει την διόρθωση της αυτοενέργειας φερμιονίου στον φερμιονικό διαδότη, που δίνεται από την εξ. (2-2). Μετά από κάποιες πράξεις με την βοήθεια των ταυτοτήτων συστολής παίρνουμε :

$$ie_0^2 \Sigma(p) = \frac{e_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4 k \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \frac{2\not{p} - 2\not{k} - 4m_0}{(p-k)^2 - m_0^2 + i\varepsilon} \quad (3-13)$$

Σ' αυτό το ολοκλήρωμα βρόχου (loop integral) εμφανίζεται υπεριώδης απόκλιση (ultra-violet divergent) στο όριο $k \rightarrow \infty$. Επίσης η ομαλοποίηση και η επανακανονικοποίηση της εξ. (3-13) οδηγεί σε ολοκληρώματα που δεν έχουν μόνο υπεριώδη απόκλιση αλλά επίσης και υπέρυθη απόκλιση (infra-red divergent), δηλαδή αποκλίνουν στο όριο $k \rightarrow 0$. Εύκολα μπορούμε να αφαιρέσουμε αυτές τις αποκλίσεις, κάνοντας την αντικατάσταση :

$$\frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \rightarrow \frac{1}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon} \quad (3-14)$$

όπου λ μία πολύ μικρή υπέρυθη παράμετρος αποκοπής ($\lambda \rightarrow 0$) και Λ μια υπεριώδης παράμετρος αποκοπής ($\Lambda \rightarrow \infty$).



Σχ. 10

Τελικά ο διορθωμένος διαδότης (Σχ. 10) θα δίνεται από την αντικατάσταση :

$$\frac{i}{p - m_0 + i\varepsilon} \rightarrow \frac{i}{p - m_0 + i\varepsilon} + \frac{i}{p - m_0 + i\varepsilon} i e_0^2 \Sigma(p) \frac{i}{p - m_0 + i\varepsilon} \quad (3-15)$$

Αν λάβουμε υπόψιν την ταυτότητα :

$$\frac{1}{A - B} = \frac{1}{A} + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \dots \quad (3-16)$$

η σχέση (3-16) γίνεται :

$$\frac{i}{p - m_0 + i\varepsilon} \rightarrow \frac{i}{p - m_0 + e_0^2 \Sigma(p) + i\varepsilon} + 0(e_0^4) \quad (3-17)$$

Το αριστερό μέλος είναι ο διαδότης του μη πραγματικού φερμιονίου, που έχει έναν πόλο στο σημείο m_0 . Το δεξί μέλος αναπαριστάνει τον διαδότη του πραγματικού φερμιονίου, για τον οποίο απαιτούμε να έχει πόλο στο σημείο : $m = m_0 + \delta m$, όπου m η μάζα του πραγματικού φερμιονίου και m_0 η μάζα του μοντέλου. Η διαφοροποίηση των μαζών οφείλεται στην αλληλεπίδραση μεταξύ του φερμιονικού και φωτονικού πεδίου που εμφανίστηκε στην δεύτερης τάξης προσέγγιση. Η σχέση αυτή ορίζει τον επανακανονισμό της μάζας.

Στην δεύτερης τάξης προσέγγιση, εφαρμόζοντας την διαδικασία όπως στην (A) περίπτωση, θέτουμε :

$$\Sigma(p) = A + (p - m)B + (p - m)\Sigma_c(p) \quad (3-18)$$

με $A = \Sigma(p)|_{p=m}$. Αντικαθιστώντας αυτή την σχέση στο δεξί μέλος της (3-17)

$$\text{παίρνουμε :} \quad \delta m = -e_0^2 A \quad (3-19)$$

Η εξ. (3-17) τότε ανάγεται στην

$$\frac{i}{p - m_0 + i\varepsilon} \rightarrow \frac{i}{(p - m)(1 + e_0^2 B) + e_0^2 (p - m)\Sigma_c(p) + i\varepsilon} + 0(e_0^4) \quad (3-20)$$

ή διατηρώντας μόνο όρους $0(e_0^2)$:

$$\frac{i}{p - m_0 + i\varepsilon} \rightarrow \frac{i}{p - m + i\varepsilon} [(1 - e_0^2 B) - e_0^2 \Sigma_c(p)] + 0(e_0^4) \quad (3-21)$$

Εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία και για το φορτίο παίρνουμε την σχέση :

$$e^2 = Z_2 e_0^2 = e_0^2 (1 - e_0^2 B) + 0(e_0^6) \quad (3-22)$$

Η διαφοροποίηση του φορτίου έχει επίσης ως αιτία την αλληλεπίδραση του φερμιονικού πεδίου με το φωτονικό.

Γ) Τροποποίηση κορυφής (διόρθωση διαδικασίας δημιουργίας ζεύγους e^+e^-)

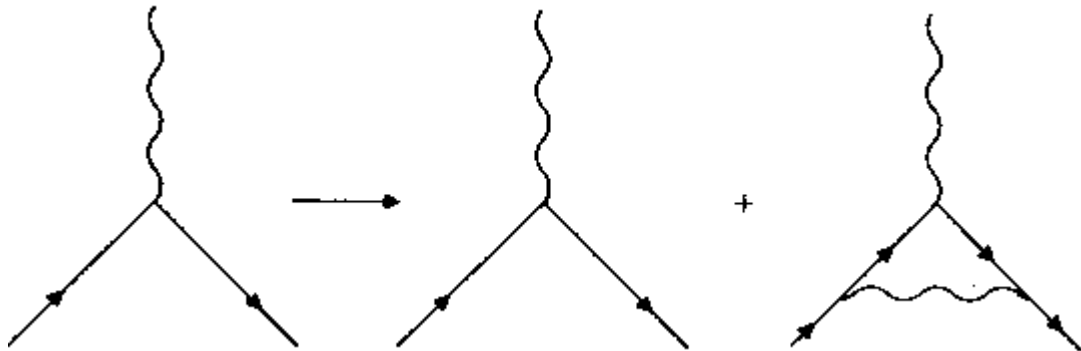
Θεωρούμε την δεύτερης τάξης τροποποίηση κορυφής, όπως φαίνεται στο Σχ. 11. Η αντικατάσταση είναι :

$$ie_0\gamma^\mu \rightarrow i\Gamma^\mu(p', p) = ie_0[\gamma^\mu + e_0^2\Lambda^\mu(p', p)] \quad (3-23)$$

όπου ο όρος $\Lambda^\mu(p', p)$ δόθηκε στην εξ. (2-4), που μπορεί να γραφεί :

$$\Lambda^\mu(p', p) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{k^2 + i\varepsilon} \gamma^\alpha \frac{1}{p' - k - m + i\varepsilon} \gamma^\mu \frac{1}{p - k - m + i\varepsilon} \gamma_\alpha \quad (3-24)$$

όπου m η πραγματική μάζα του φερμιονίου. Ο όρος $\Lambda^\mu(p', p)$ είναι ταυτόχρονα με υπέρυθρη και υπεριώδη απόκλιση.



Σχ. 11

Κάνουμε τις συντημήσεις :

$$\Delta = P - k - m + i\varepsilon, \quad q = p - P, \quad q' = p' - P$$

οπότε χρησιμοποιώντας την ταυτότητα (3-16), οι διαδότες φερμιονίων στη σχέση (3-24) γράφονται :

$$\begin{aligned} \frac{1}{p' - k - m + i\varepsilon} \gamma^\mu \frac{1}{p - k - m + i\varepsilon} &= \frac{1}{q' + \Delta} \gamma^\mu \frac{1}{q + \Delta} = \\ &= \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta} q' \frac{1}{\Delta} + \dots \right) \gamma^\mu \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta} q \frac{1}{\Delta} + \dots \right) \end{aligned} \quad (3-25)$$

Ορίζουμε τον όρο $\Lambda_c^\mu(p', p)$ ως εξής :

$$\Lambda^\mu(p', p) = L\gamma^\mu + \Lambda_c^\mu(p', p) \quad (3-26)$$

όπου L μια βαθμωτή σταθερά. Το κίνητρο για το γράψιμο της $\Lambda^\mu(p', p)$ με την μορφή της (3-26) είναι γιατί στο όριο $\Lambda \rightarrow \infty$, η QED αποκαθίσταται, το L αποκλίνει, αλλά ο όρος $\Lambda_c^\mu(p', p)$ παραμένει καλά καθορισμένος και πεπερασμένος. Αντικαθιστώντας την (3-26) στην εξ. (3-23) βρίσκουμε :

$$ie_0\gamma^\mu \rightarrow i\Gamma^\mu(p', p) = ie_0[\gamma^\mu(1 + e_0^2L) + e_0^2\Lambda_c^\mu(p', p)] \quad (3-27)$$

Ορίζουμε μια σταθερά Z_1 επανακανονικοποίησης του φορτίου :

$$e = \frac{e_0}{Z_1} = e_0(1 + e_0^2 L) + O(e_0^5) \quad (3-28)$$

οπότε η (3-27) γράφεται :

$$ie_0 \gamma^\mu \rightarrow i\Gamma^\mu(p', p) = ie[\gamma^\mu + e^2 \Lambda_c^\mu(p', p)] + O(e^5) \quad (3-29)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν και τις προηγούμενες σχέσεις επανακανονισμού του φορτίου εξάγουμε ότι η συνολική σχέση μεταξύ πραγματικού και μη φορτίου θα είναι :

$$e = e_0 Z_3 Z_2 / Z_1 \quad (3-30)$$

Η σχέση (3-30) αποδεικνύεται ότι είναι ισοδύναμη με την σχέση :

$$e = e_0 Z_3 \quad (3-31)$$

Παρατηρούμε ότι ο επανακανονισμός του φορτίου εξαρτάται μόνο από τις διορθώσεις του φωτονικού διαδότη.

4. Υπολογισμός διορθωμένης ενεργού διατομής στην ελαστική σκέδαση ηλεκτρονίου από εξωτερικό στατικό πεδίο.

Είχε αναφερθεί στην §2, εξ. (2-1) το πλάτος Feynman στην χαμηλότερης τάξης προσέγγιση. Η ενεργός διατομή θα δίνεται από την σχέση :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 = \left(\frac{m}{2\pi}\right)^2 |M^{(0)}|^2 = \left(\frac{m}{2\pi}\right)^2 |\bar{u}_s(\mathbf{p}') A_e(\mathbf{q}) u_r(\mathbf{p})|^2 \quad (4-1)$$

όπου $\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$, και $|\mathbf{p}'| = |\mathbf{p}|$.

Για παράδειγμα, θεωρούμε την σκέδαση ηλεκτρονίων από πεδίο Coulomb ενός βαρέως πυρήνα, που αντιμετωπίζεται ως σημειακό φορτίο (Mott scattering). Στην βαθμίδα Coulomb το δυναμικό έχει την μορφή :

$$A_e^a(x) = \left(\frac{Ze}{4\pi|\mathbf{x}|}, 0, 0, 0\right) \quad (4-2)$$

όπου στον χώρο των ορμών γίνεται :

$$A_e^a(\mathbf{q}) = \left(\frac{Ze}{|\mathbf{q}|^2}, 0, 0, 0\right) \quad (4-3)$$

Αντικαθιστούμε την (4-3) στην (4-1) και αθροίζοντας και υπολογίζοντας τους μέσους όρους πάνω στα spins των ηλεκτρονίων βρίσκουμε την μη πολωμένη ενεργό διατομή :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 &= \frac{(2maZ)^2}{|\mathbf{q}|^4} \frac{1}{2} \sum_{r,s} |\bar{u}_s(\mathbf{p}') \gamma^0 u_r(\mathbf{p})|^2 = \\ &= \frac{(aZ)^2}{2|\mathbf{q}|^4} \text{Tr}\{(\mathbf{p}' + m)\gamma^0(\mathbf{p} + m)\gamma^0\} = \frac{2(aZ)^2}{|\mathbf{q}|^4} (E^2 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' + m^2) \end{aligned} \quad (4-4)$$

Εισάγοντας την γωνία σκέδασης θ , έχουμε :

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' = |\mathbf{p}|^2 \cos\theta, \quad |\mathbf{q}|^2 = |\mathbf{p}' - \mathbf{p}|^2 = 4|\mathbf{p}|^2 \sin^2(\theta/2), \quad |\mathbf{p}| = E\nu$$

οπότε η (4-4) καταλήγει στην σχέση :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 = \frac{(aZ)^2}{4E^2\nu^4 \sin^4(\theta/2)} [1 - \nu^2 \sin^2(\theta/2)] \quad (4-5)$$

Η σχέση (4-5) μας δίνει το πλάτος σκέδασης σχετικιστικών ηλεκτρονίων από ένα πεδίο Coulomb. Στο μη σχετικιστικό όριο, αυτή η σχέση ανάγεται στον γνωστό τύπο σκέδασης του Rutherford :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(aZ)^2}{4m^2\nu^4 \sin^4(\theta/2)} \quad (4-6)$$

Στην προσέγγιση δεύτερης τάξης είχαμε τα 4 διαγράμματα Feynman (Σχ.7). Μετά την επανακανονικοποίηση μόνο τα διαγράμματα (c) και (d) του (Σχ.7) δίνουν συνεισφορές, οπότε το πλάτος Feynman θα είναι :

$$M = ie\bar{u}(\mathbf{p}')\gamma^\mu u(\mathbf{p})A_{e\mu}(\mathbf{q}) + ie\bar{u}(\mathbf{p}')\gamma^\mu u(\mathbf{p})[-e^2\Pi_c(q^2)]A_{e\mu}(q) + ie\bar{u}(\mathbf{p}')[e^2\Lambda_c^\mu(p', p)]u(\mathbf{p})A_{e\mu}(\mathbf{q}) \quad (4-7)$$

Ξεκινάμε τον υπολογισμό του όρου $e^2\Pi_c(k^2)$. Κάνουμε διαστατική ομαλοποίηση της εξ. (3-2) που αφορά τον βρόχο αυτοενέργειας του φωτονίου, οπότε παίρνουμε :

$$ie^2\Pi^{\mu\nu}(k) = \frac{-e^2\kappa^{4-D}}{(2\pi)^4} \int d^D p \frac{Tr[\gamma^\mu(\mathbf{p} + \mathbf{k} + m)\gamma^\nu(\mathbf{p} + m)]}{[(\mathbf{p} + \mathbf{k})^2 - m^2 + i\varepsilon][p^2 - m^2 + i\varepsilon]} \quad (4-8)$$

όπου κ είναι ένας παράγοντας κλίμακας μάζας.

Υπολογίζουμε το ίχνος με τη βοήθεια των παρακάτω σχέσεων ίχνους :

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = D \quad (\text{I})$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad (\text{II})$$

$$\left. \begin{cases} \gamma_\lambda\gamma^\lambda = DI \\ \gamma_\lambda\gamma^\alpha\gamma^\lambda = -(D-2)\gamma^\alpha \\ \gamma_\lambda\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\lambda = (D-4)\gamma^\alpha\gamma^\beta + 4g^{\alpha\beta} \end{cases} \right\} \quad (\text{III})$$

$$\left. \begin{cases} Tr(\gamma^\alpha\gamma^\beta) = f(D)g^{\alpha\beta} \\ Tr(\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta) = f(D)[g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}] \\ Tr(\gamma^\alpha\gamma^\beta\dots\gamma^\mu\gamma^\nu) = 0 \end{cases} \right\} \quad (\text{IV})$$

όπου D οι διαστάσεις, I ο $f(D) \times f(D)$ μοναδιαίος πίνακας και οι γ -πίνακες είναι $f(D) \times f(D)$ πίνακες [π.χ. $f(D=4) = 4$].

Θέτουμε: $N^{\mu\nu}(p, k) = Tr[\gamma^\mu(\mathbf{p} + \mathbf{k} + m)\gamma^\nu(\mathbf{p} + m)]$ οπότε:

$$N^{\mu\nu}(p, k) = f(D)\{(p^\mu + k^\mu)p^\nu + (p^\nu + k^\nu)p^\mu + [m^2 - p(p+k)]g^{\mu\nu}\} \quad (4-9)$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο : $\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dz}{[b + (a-b)z]^2}$

και με την παραμετροποίηση Feynman η εξ. (4-8) γράφεται :

$$ie^2\Pi^{\mu\nu}(k) = \frac{-e^2\kappa^{4-D}}{(2\pi)^4} \int_0^1 dz \int d^D p \frac{N^{\mu\nu}(p, k)}{[p^2 - m^2 + (k^2 + 2pk)z + i\varepsilon]^2} \quad (4-10)$$

Αν εισάγουμε την νέα μεταβλητή : $q = p + kz$ (4-11)

η εξ. (4-10) γίνεται :

$$ie^2\Pi^{\mu\nu}(k) = \frac{-e^2\kappa^{4-D}}{(2\pi)^4} \int_0^1 dz \int d^D q \frac{N^{\mu\nu}(q-kz, k)}{[q^2 - m^2 + (1-z)k^2 z + i\varepsilon]^2} \quad (4-12)$$

όπου :

$$N^{\mu\nu}(q-kz, k) = f(D)\{[2q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}] + [m^2 - k^2 z(1-z)]g^{\mu\nu} + [-2z(1-z)(k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu})] + \dots\} \quad (4-13)$$

όπου οι τελείες δείχνουν ότι οι γραμμικοί όροι στο q έχουν παραλειφθεί, δεδομένου ότι αυτοί οι όροι εξαφανίζονται στην ολοκλήρωση (B).

Κάνοντας μία παρένθεση, αναφέρουμε τα απαιτούμενα ολοκληρώματα D-διαστάσεων :

$$\int d^D k \frac{1}{(k^2 - s + i\varepsilon)^n} = i\pi^{D/2} (-1)^n \frac{\Gamma(n - \frac{1}{2}D)}{\Gamma(n)} \frac{1}{s^{n-D/2}} \quad (A)$$

$$\int d^D k \frac{k^\mu}{(k^2 - s + i\varepsilon)^n} = 0 \quad (B)$$

$$\int d^D k \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - s + i\varepsilon)^n} = i\pi^{D/2} (-1)^{n+1} \frac{\Gamma(n - \frac{1}{2}D - 1)}{2\Gamma(n)} \frac{g^{\mu\nu}}{s^{n-D/2-1}} \quad (Γ)$$

$$\int d^D k \frac{k^2}{(k^2 - s + i\varepsilon)^n} = i\pi^{D/2} (-1)^{n+1} \frac{\Gamma(n - \frac{1}{2}D - 1)}{2\Gamma(n)} \frac{D}{s^{n-D/2-1}} \quad (Δ)$$

Από τις εξ. (4-12),(4-13) βρίσκουμε :

$$ie^2\Pi^{\mu\nu}(k) = \frac{-e^2\kappa^{4-D}}{(2\pi)^4} f(D) \int_0^1 dz \sum_{i=1}^3 I_i^{\mu\nu}(k, z) \quad (4-14)$$

Με την βοήθεια των ολοκληρωμάτων (A),(B),(Γ),(Δ) έχουμε :

$$\begin{aligned} I_1^{\mu\nu}(k, z) &= \int d^D q \frac{[2q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}]}{[q^2 + k^2 z(1-z) - m^2 + i\varepsilon]^2} = \\ &= \frac{ig^{\mu\nu} \pi^{D/2} \Gamma(1 - \frac{1}{2}D)}{[k^2 z(1-z) - m^2]^{1-D/2}} (1 - \frac{1}{2}D) \quad (4-15) \end{aligned}$$

$$I_2^{\mu\nu}(k, z) = [m^2 - k^2 z(1-z)]g^{\mu\nu} \int d^D q \frac{1}{[q^2 + k^2 z(1-z) - m^2 + i\varepsilon]^2} =$$

$$= [m^2 - k^2 z(1-z)] g^{\mu\nu} \frac{i\pi^{D/2} \Gamma(2 - \frac{1}{2}D)}{[k^2 z(1-z) - m^2]^{2-D/2}} = -I_1^{\mu\nu}(k, z) \quad (4-16)$$

$$I_3^{\mu\nu}(k, z) = [-2z(1-z)(k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu})] \int d^D q \frac{1}{[q^2 + k^2 z(1-z) - m^2 + i\varepsilon]^2} =$$

$$= -2z(1-z)(k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) \frac{i\pi^{D/2} \Gamma(2 - \frac{1}{2}D)}{[k^2 z(1-z) - m^2]^{2-D/2}} \quad (4-17)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4-15),(4-16),(4-17) στην σχέση (4-14) παίρνουμε :

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) \Pi(k^2) \quad (4-18)$$

όπου :

$$\Pi(k^2) = \frac{\kappa^{4-D} f(D) \Gamma(2 - \frac{1}{2}D)}{2^3 \pi^{4-D/2}} \int_0^1 dz \frac{z(1-z)}{[k^2 z(1-z) - m^2]^{2-D/2}} \quad (4-19)$$

Τελικά θέτουμε: $D = 4 - n$ και παίρνουμε το όριο $n \rightarrow 0$. Αναπτύσσοντας την συνάρτηση $f(4 - n) = 4 - nf'(4) + \dots$ και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις :

$$x^{-n/2} = 1 - \frac{1}{2} n \ln x + \dots, \quad \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{2}{n} - \gamma + \dots$$

η εξ. (4-19) γίνεται :

$$\Pi(k^2) = \frac{1}{12\pi^2} \left(\frac{2}{n} - \gamma - \frac{f'(4)}{2} - \ln \pi \right) -$$

$$- \frac{1}{2\pi^2} \int_0^1 dz z(1-z) \ln \left[\frac{k^2 z(1-z) - m^2}{\kappa^2} \right] \quad (4-20)$$

Συγκρίνοντας την εξ. (4-18) με τις εξ. (3-3) και (3-9) παίρνουμε :

$$\Pi(k^2) = A'(0) + \Pi_c(k^2) \quad (4-21)$$

και αφού $\Pi_c(0) = 0$ οι δύο τελευταίες εξισώσεις μας οδηγούν :

$$e^2 \Pi_c(k^2) = e^2 [\Pi(k^2) - \Pi(0)] = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dz z(1-z) \ln \left[1 - \frac{k^2 z(1-z)}{m^2} \right] \quad (4-21)$$

Επανερχόμαστε τώρα στην εξ. (4-7), όπου στον δεύτερο όρο του αθροίσματος (έχουμε τον $e^2 \Pi_c(q^2)$), που σύμφωνα με την εξ. (4-21) ισούται :

$$e^2 \Pi_c(q^2) = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dz z(1-z) \ln \left[1 - \frac{q^2 z(1-z)}{m^2} \right] \quad (4-22)$$

Για $q^2 \ll m^2$ ο λογάριθμος στην (4-22) αναπτύσσεται, οπότε παίρνουμε :

$$e^2 \Pi_c(q^2) = \frac{\alpha}{15\pi} \left(\frac{q^2}{m^2} \right) + \dots \quad (4-23)$$

Στην εξ. (4-7) βλέπουμε ότι ο πρώτος όρος είναι το πλάτος χαμηλότερης τάξης, ενώ ο δεύτερος και τρίτος όρος είναι οι διορθωτικοί όροι ακτινοβολίας (Π_c είναι ο υπέρυθρος πεπερασμένος όρος και ο υπέρυθρος αποκλίνων όρος Λ_c^μ). Για τον υπολογισμό του τρίτου όρου ομαλοποιούμε την εξ. (3-24) για το $\Lambda^\mu(p', p)$, κάνοντας την αντικατάσταση (3-14), οπότε έχουμε :

$$e^2 \Lambda^\mu(p', p) = \frac{-ie^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k f(k)}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon} \times \left\{ \frac{\gamma^\alpha (p' - k + m) \gamma^\mu (p - k + m) \gamma_\alpha}{[(p' - k)^2 - m^2 + i\varepsilon][(p - k)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \right\} \quad (4-24)$$

$$\text{όπου : } f(k) = \frac{\lambda^2 - \Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon} \quad (4-25)$$

Ενδιαφερόμαστε για την υπέρυθρη απόκλιση όταν $k \rightarrow 0$ και όχι για την υπεριώδη απόκλιση ($k \rightarrow \infty$), οπότε μπορούμε να παραλείψουμε τον παράγοντα αποκοπής $f(k)$. Ομοίως, απορρίπτουμε τους όρους που είναι γραμμικοί σε k και k^2 στον αριθμητή και παρανομαστή μέσα στο άγκιστρο της εξ. (4-24). Χρησιμοποιώντας την εξ. Dirac και την $p^2 = p'^2 = m^2$ η εξ. (4-24) απλοποιείται, συνεπώς έχουμε :

$$e^2 \bar{u}(p') \Lambda^\mu(p', p) u(p) = \frac{-ie^2}{(2\pi)^4} \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) \times \left[\int \frac{d^4 k}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon} \frac{(p'p)}{(p'k)(pk)} + \dots \right] \quad (4-26)$$

όπου οι τελείες δείχνουν τους όρους που είναι πεπερασμένοι στο όριο $\lambda \rightarrow 0$ και επομένως τους παραμελούμε. Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα στην εξ. (4-26) με τη βοήθεια της ταυτότητας :

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon} &= P \frac{1}{k^2 - \lambda^2} - i\pi \delta(k^2 - \lambda^2) = \\ &= P \frac{1}{k^2 - \lambda^2} - \frac{i\pi}{2\omega_\lambda} [\delta(k^0 - \omega_\lambda) + \delta(k^0 + \omega_\lambda)] \end{aligned} \quad (4-27)$$

όπου $\omega_\lambda = (\lambda^2 + \mathbf{k}^2)^{1/2}$. Εκτελώντας την k^0 ολοκλήρωση στην (4-26) και παραλείποντας την υπέρυθρη πεπερασμένη συνεισφορά από το κύριο μέρος της εξ. (4-27) βρίσκουμε :

$$e^2 \bar{u}(p') \Lambda^\mu(p', p) u(p) = e^2 \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) A(p', p) + \dots \quad (4-28)$$

$$\text{όπου : } A(p', p) = \frac{-1}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\omega_\lambda} \frac{(p'p)}{(p'k)(pk)} \quad (4-29)$$

Στην εξίσωση (4-7) απαιτούμε ότι το επανακανονικοποιημένο μέρος της εξίσωσης (4-28) που δίνεται από την εξ. (3-26) να είναι :

$$e^2 \bar{u}(\mathbf{p}') \Lambda_c^\mu(p', p) u(\mathbf{p}) = e^2 \bar{u}(\mathbf{p}') [\Lambda^\mu(p', p) - L \gamma^\mu] u(\mathbf{p}) \quad (4-30)$$

$$\text{Ισχύει όμως ότι : } \bar{u}(\mathbf{P}) \Lambda^\mu(P, P) u(\mathbf{P}) = L \bar{u}(\mathbf{P}) \gamma^\mu u(\mathbf{P}) \quad (4-31)$$

οπότε λόγω της (3-26) παίρνουμε ότι για ένα ελεύθερο σωματίδιο 4-ορμής P ισχύει : $\bar{u}(\mathbf{P}) \Lambda_c^\mu(P, P) u(\mathbf{P}) = 0$ (4-32)

Από τις εξ. (3-26), (4-32) και (4-28) παίρνουμε :

$$e^2 \bar{u}(\mathbf{p}) \Lambda^\mu(p, p) u(\mathbf{p}) = e^2 L \bar{u}(\mathbf{p}) \gamma^\mu u(\mathbf{p}) = e^2 \bar{u}(\mathbf{p}) \gamma^\mu u(\mathbf{p}) A(p, p) + \dots$$

και μια παρόμοια εξίσωση με αντικατάσταση του p από το p', όπου :

$$L = A(p, p) + \dots = A(p', p') + \dots \quad (4-33)$$

Συνδυάζοντας τις εξ. (4-28), (4-33) καταλήγουμε :

$$\begin{aligned} e^2 \bar{u}(\mathbf{p}') \Lambda_c^\mu(p', p) u(\mathbf{p}) &= \\ &= e^2 \bar{u}(\mathbf{p}') \gamma^\mu u(\mathbf{p}) \left\{ A(p', p) - \frac{1}{2} A(p', p') - \frac{1}{2} A(p, p) \right\} + \dots = \\ &= e^2 \bar{u}(\mathbf{p}') \gamma^\mu u(\mathbf{p}) \left\{ \frac{1}{4(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\omega_\lambda} \left[\frac{p'}{p'k} - \frac{p}{pk} \right]^2 \right\} + \dots \quad (4-34) \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την εξ. (4-34) στην (4-7) βρίσκουμε το πλάτος Feynman :

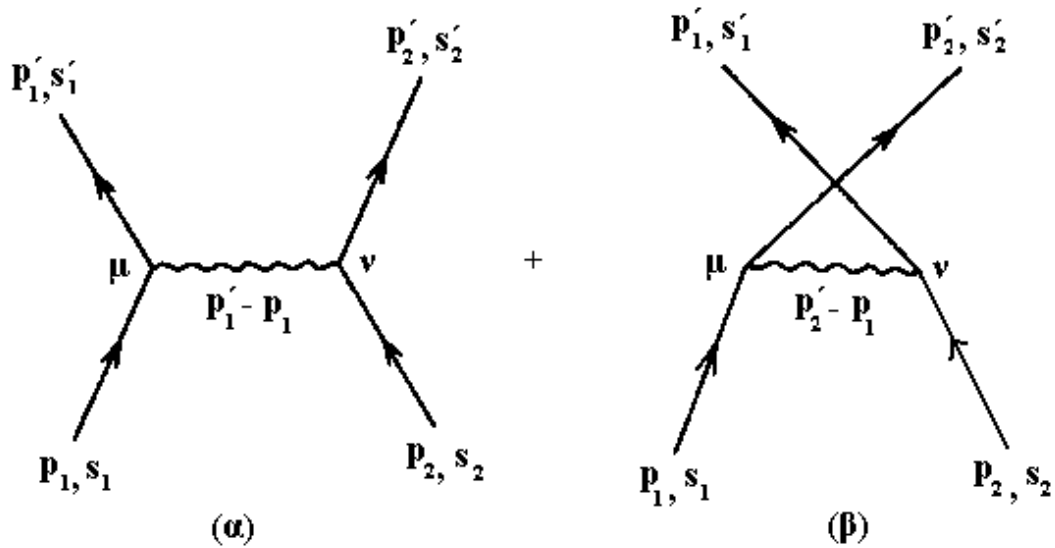
$$M = M_o \left\{ 1 + \frac{e^2}{4(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\omega_\lambda} \left[\frac{p'}{p'k} - \frac{p}{pk} \right]^2 \right\} + \dots \quad (4-35)$$

όπου M_o το πλάτος της χαμηλότερης τάξης. Επομένως η ενεργός διατομή είναι :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_o \left\{ 1 + \frac{a}{2(2\pi)^2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\omega_\lambda} \left[\frac{p'}{p'k} - \frac{p}{pk} \right]^2 \right\} + \dots \quad (4-36)$$

όπου $a = \frac{e^2}{4\pi}$ και $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_o$ η ενεργός διατομή χαμηλότερης τάξης.

5. Σκέδαση ηλεκτρονίου-ηλεκτρονίου



Σχ. 12

Τα αμετάβλητα πλάτη των διαγραμμάτων (Σχ. 12) είναι :

$$M_a = \bar{u}(p'_1, s'_1)(-ie\gamma_\mu)u(p_1, s_1)\bar{u}(p'_2, s'_2)(-ie\gamma_\nu)u(p_2, s_2)\frac{-ig_{\mu\nu}}{(p'_1 - p_1)^2 + i\varepsilon} \quad (5-1)$$

$$M_\beta = -\bar{u}(p'_2, s'_2)(-ie\gamma_\mu)u(p_1, s_1)\bar{u}(p'_1, s'_1)(-ie\gamma_\nu)u(p_2, s_2)\frac{-ig_{\mu\nu}}{(p'_2 - p_1)^2 + i\varepsilon} \quad (5-2)$$

$$\text{οπότε : } M = M_a + M_\beta \quad (5-3)$$

Τώρα πρέπει να υπολογίσουμε την παράσταση :

$$|M|^2 = |M_a|^2 + |M_\beta|^2 + 2\text{Re}M_a M_\beta^* \quad (5-4)$$

Υποθέτουμε ότι, δεν ανιχνεύουμε τα τελικά spin των ηλεκτρονίων και η δέσμη των ηλεκτρονίων είναι μη πολωμένη. Έτσι έχουμε :

$$|M_a|^2 = \frac{1}{4} \sum_{s_i} \sum_{s_f} |M_a|^2 = \frac{e^4}{4} \sum_{s_i, s_f} \bar{u}(p'_1, s'_1)\gamma_\mu u(p_1, s_1)\bar{u}(p'_2, s'_2)\gamma_\nu u(p_2, s_2) \times \\ \times \bar{u}(p_1, s_1)\gamma_\nu u(p'_1, s'_1)\bar{u}(p_2, s_2)\gamma_\mu u(p'_2, s'_2) \frac{1}{[(p'_1 - p_1)^2]^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^4}{4} \sum_{s_i, s_f} \bar{u}(p_1, s_1) \gamma_\nu u(p'_1, s'_1) \bar{u}(p'_1, s'_1) \gamma_\mu u(p_1, s_1) \times \\
&\times \bar{u}(p_2, s_2) \gamma_\nu u(p'_2, s'_2) \bar{u}(p'_2, s'_2) \gamma_\mu u(p_2, s_2) \frac{1}{[(p'_1 - p_1)^2]^2} = \\
&\frac{e^4}{4} \text{Tr} \left(\gamma_\nu \frac{\not{p}'_1 + m}{2m} \gamma_\mu \frac{\not{p}_1 + m}{2m} \right) \text{Tr} \left(\gamma_\nu \frac{\not{p}'_2 + m}{2m} \gamma_\mu \frac{\not{p}_2 + m}{2m} \right) \frac{1}{[(p'_1 - p_1)^2]^2} \quad (5-5)
\end{aligned}$$

$$|\mathbf{M}_\beta|^2 = |\mathbf{M}_\alpha|^2 \quad (p'_1 \leftrightarrow p'_2) \quad (5-6)$$

$$\begin{aligned}
&\overline{\text{Re}(\mathbf{M}_\alpha \mathbf{M}_\beta^*)} = -\frac{e^4}{4} \sum_{s_i} \sum_{s_f} \frac{1}{(p'_1 - p_1)^2 (p'_2 - p_1)^2} \times \\
&\times \text{Re}[\bar{u}(p'_1, s'_1) \gamma_\mu u(p_1, s_1) \bar{u}(p'_2, s'_2) \gamma_\mu u(p_2, s_2) \times \\
&\times \bar{u}(p_1, s_1) \gamma_\nu u(p'_2, s'_2) \bar{u}(p_2, s_2) \gamma_\nu u(p'_1, s'_1)] = \\
&= -\frac{e^4}{4} \frac{1}{(p'_1 - p_1)^2 (p'_2 - p_1)^2} \text{Tr} \left[\gamma_\nu \frac{\not{p}'_1 + m}{2m} \gamma_\mu \frac{\not{p}_1 + m}{2m} \gamma_\nu \frac{\not{p}'_2 + m}{2m} \gamma_\mu \frac{\not{p}_2 + m}{2m} \right] \quad (5-7)
\end{aligned}$$

Απαλείψαμε το Re από την τελευταία σχέση γιατί είναι μια πραγματική παράσταση. Τα ίχνη στις σχέσεις (5-5), (5-7) τα υπολογίζουμε ως εξής :

Με βάση τις γνωστές σχέσεις από άλγεβρα Dirac:

Για περιττό αριθμό γ -πινάκων ισχύει : $\text{Tr}(\gamma^{\alpha_1} \gamma^{\alpha_2} \dots \gamma^{\alpha_{2v+1}}) = 0$ (i),

$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$ (ii), $\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho})$ (iii)

$\gamma^\mu \gamma_\mu = 4$ (iv), $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$ (v), $\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu = -2\gamma^\nu$ (vi),

$\gamma_\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\mu = 4g^{\lambda\nu}$ (vii), $\gamma_\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu = -2\gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\lambda$ (viii)

Άρα έχουμε :

$$\begin{aligned}
&\text{Tr}[\gamma_\nu (\not{p}'_1 + m) \gamma_\mu (\not{p}_1 + m)] = \text{Tr}[\gamma_\nu (\gamma^\rho p'_{1\rho} + m) \gamma_\mu (\gamma^\sigma p_{1\sigma} + m)] = \\
&\text{Tr}(\gamma_\nu \gamma^\rho \gamma_\mu \gamma^\sigma) p'_{1\rho} p_{1\sigma} + \text{Tr}(\gamma_\nu \gamma^\rho \gamma_\mu) m p'_{1\rho} p_{1\sigma} + \text{Tr}(\gamma_\nu \gamma_\mu \gamma^\sigma) m p_{1\sigma} + \text{Tr}(\gamma_\nu \gamma_\mu) m^2 = \\
&\text{Tr}(g_{\kappa\nu} \gamma^\kappa \gamma^\rho g_{\lambda\mu} \gamma^\lambda \gamma^\sigma) p'_{1\rho} p_{1\sigma} + 0 + 0 + 4g_{\mu\nu} m^2 = \\
&g_{\kappa\nu} g_{\lambda\mu} \text{Tr}(\gamma^\kappa \gamma^\rho \gamma^\lambda \gamma^\sigma) p'_{1\rho} p_{1\sigma} + 4g_{\mu\nu} m^2 = \\
&4g_{\kappa\nu} g_{\lambda\mu} (g^{\kappa\rho} g^{\lambda\sigma} - g^{\kappa\lambda} g^{\rho\sigma} + g^{\kappa\sigma} g^{\rho\lambda}) p'_{1\rho} p_{1\sigma} + 4g_{\mu\nu} m^2 = \\
&4(p'_{1\nu} p_{1\mu} - g_{\mu\nu} p'_{1\sigma} p_{1\sigma} + p'_{1\mu} p_{1\nu} + g_{\mu\nu} m^2) = \\
&4(g_{\mu\nu} m^2 + p_{1\mu} p'_{1\nu} + p_{1\nu} p'_{1\mu} - g_{\mu\nu} p'_{1\sigma} p_{1\sigma}) \quad (5-8a)
\end{aligned}$$

Ομοίως : $\text{Tr}[\gamma_\nu (\not{p}'_2 + m) \gamma_\mu (\not{p}_2 + m)] =$

$$4(g_{\mu\nu}m^2 + p_{1\mu}p'_{1\nu} + p_{1\nu}p'_{1\mu} - g_{\mu\nu}p'_1 \cdot p_1) \quad (5-8b)$$

$$\begin{aligned} \gamma_\nu(\not{p}'_1 + m)\gamma_\mu(\not{p}_1 + m)\gamma_\nu &= \gamma_\nu\gamma^\rho\gamma_\mu\gamma^\sigma\gamma_\nu p'_{1\rho}p_{1\sigma} + \gamma_\nu\gamma^\rho\gamma_\mu\gamma_\nu m p'_{1\rho} + \\ &+ \gamma_\nu\gamma_\mu\gamma^\sigma\gamma_\nu m p_{1\sigma} + \gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\nu m^2 = -2\not{p}_1\gamma_\mu\not{p}'_1 + 4m(p_{1\mu} + p'_{1\mu}) - 2m^2\gamma_\mu \end{aligned} \quad (5-9)$$

$$\begin{aligned} &Tr\left[\gamma_\nu(\not{p}'_1 + m)\gamma_\mu(\not{p}_1 + m)\gamma_\nu(\not{p}'_2 + m)\gamma_\mu(\not{p}_2 + m)\right] = \\ &Tr[(-2\not{p}_1\gamma_\mu\not{p}'_1 + 4m(p_{1\mu} + p'_{1\mu}) - 2m^2\gamma_\mu)(\not{p}'_2 + m)\gamma_\mu(\not{p}_2 + m)] = \\ &Tr[-2\not{p}_1(4p'_1 \cdot p'_2 - 2mp'_1)(\not{p}_2 + m) + 4m(\not{p}'_2 + m)(p_1 + p'_1)(\not{p}_2 + m) - \\ &2m^2(-2\not{p}'_2 + 4m)(\not{p}_2 + m)] = \\ &-32\not{p}_1 \cdot \not{p}_2 p'_1 \cdot p'_2 + 16m^2\not{p}_1 \cdot \not{p}'_1 + 16m^2(p_1 + p'_1) \cdot (p_2 + p'_2) + 16m^2\not{p}_2 \cdot \not{p}'_2 - 32m^4 \end{aligned} \quad (5-10)$$

Παίρνοντας την σχέση που μας δίνει την ενεργό διατομή ως προς σύστημα κέντρου μάζας (*Møller's formula*) :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2E_2E_2 p/E} \overline{|M|^2} (2m)^4 \frac{P}{16\pi^2(2E)} \quad (5-11)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν :

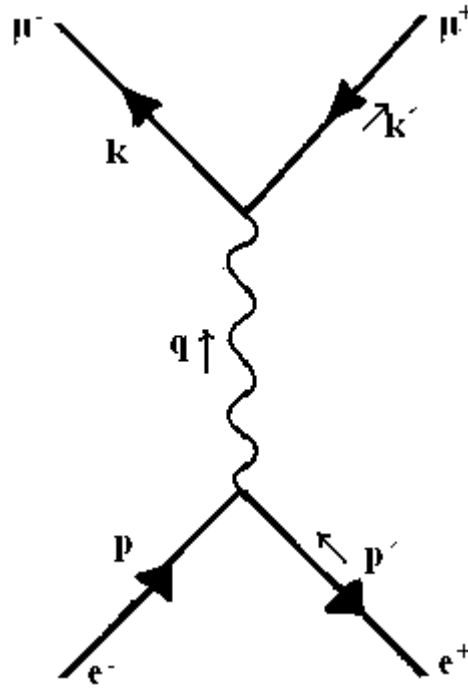
$$a = \frac{e^2}{4\pi}, \quad (p'_1 - p_1)^2 = -2p^2(1 - \cos\theta) = -4p^2 \sin^2(\theta/2),$$

$$(p'_2 - p_1)^2 = -2p^2(1 + \cos\theta) = -4p^2 \cos^2 \theta/2$$

και αντικαθιστώντας τις σχέσεις (5-8a), (5-8b) και (5-10), η ενεργός διατομή στο όριο $E \gg m$ είναι :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a^2}{8E^2} \left[\frac{1 + \cos^4(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)} + \frac{2}{\sin^2(\theta/2) \cdot \cos^2(\theta/2)} + \frac{1 + \sin^4(\theta/2)}{\cos^4(\theta/2)} \right] \quad (5-12)$$

Ο πρώτος όρος της σχέσης (5-12) προέρχεται από το $\overline{|M_a|^2}$, ο δεύτερος από το $\text{Re}M_a M_\beta^*$ και ο τρίτος από το $\overline{|M_\beta|^2}$.

6. Διαδικασία παραγωγής μιονίων : $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ 

Σχ. 13

Η αντίδραση αυτή είναι η πιο απλή διαδικασία της QED, αλλά μια από τις πιο σπουδαίες στην Φυσική υψηλών ενεργειών. Στους υπολογισμούς μας θα περιοριστούμε στην διατήρηση της μάζας των μιονίων, αφού η μάζα των ηλεκτρονίων θεωρείται αμελητέα λόγω του γεγονότος ότι $\frac{m_e}{m_\mu} \simeq \frac{1}{200}$.

Χρησιμοποιώντας τους κανόνες Feynman στο διάγραμμα (Σχ. 13) έχουμε :

$$iM = \bar{v}^{s'}(p')(-ie\gamma^\mu)u^s(p)\left(-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2}\right)\bar{u}^r(k)(-ie\gamma^\nu)v^{r'}(k') \quad (6-1)$$

Αν ρυθμίσουμε ελαφρά την σχέση (6-1) και αφήσουμε τους δείκτες των spin να υπονοούνται θα έχουμε :

$$iM = \frac{ie^2}{q^2}\bar{v}(p')\gamma^\mu u(p)\bar{u}(k)\gamma_\mu v(k') \quad (6-2)$$

Για να υπολογίσουμε την διαφορική ενεργό διατομή, χρειαζόμαστε μια έκφραση για το $|M|^2$. Αλλά ως γνωστόν : $(\bar{v}\gamma^\mu u)^* = \bar{u}\gamma^\mu v$

Οπότε η σχέση (6-2) γίνεται :

$$|M|^2 = \frac{e^4}{q^4} [\bar{v}(p') \gamma^\mu u(p) \bar{u}(p) \gamma^\nu v(p')] [\bar{u}(k) \gamma_\mu v(k') \bar{v}(k') \gamma_\nu u(k)] \quad (6-3)$$

Στα περισσότερα πειράματα, οι δέσμες ηλεκτρονίων και ποζιτρονίων είναι μη πολωμένες, έτσι η μέτρηση της ενεργού διατομής βασίζεται στην μέση τιμή των spins s και s' των ηλεκτρονίων και των ποζιτρονίων. Οι ανιχνευτές μιονίων δεν αντιλαμβάνονται την πόλωση, έτσι η μετρήσιμη ενεργός διατομή είναι ένα άθροισμα πάνω στα spins r και r' των μιονίων. Συνεπώς θα υπολογίσουμε την

$$\text{έκφραση : } \frac{1}{2} \sum_s \frac{1}{2} \sum_{s'} \sum_r \sum_{r'} |M(s, s' \rightarrow r, r')|^2$$

$$\text{Λόγω των σχέσεων : } \sum_s u^s(p) \bar{u}^s(p) = \not{p} + m, \quad \sum_s v^s(p) \bar{v}^s(p) = \not{p} - m$$

θα έχουμε :

$$\sum_{s, s'} \bar{v}^{s'}(p') \gamma^\mu u^s(p) \bar{u}^s(p) \gamma^\nu v^{s'}(p') = \text{Tr}[(\not{p}' - m) \gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\nu] \quad (6-4)$$

$$\sum_{r, r'} \bar{u}^r(k) \gamma_\mu v^{r'}(k') \bar{v}^{r'}(k') \gamma_\nu u^r(k) = \text{Tr}[(\not{k} + m) \gamma_\mu (\not{k}' - m) \gamma_\nu] \quad (6-5)$$

Άρα με την βοήθεια των σχέσεων (6-3),(6-4),(6-5) βρίσκουμε :

$$\frac{1}{4} \sum_{spins} |M|^2 = \frac{e^4}{4q^4} \text{Tr}[(\not{p}' - m_e) \gamma^\mu (\not{p} + m_e) \gamma^\nu] \text{Tr}[(\not{k} + m_\mu) \gamma_\mu (\not{k}' - m_\mu) \gamma_\nu] \quad (6-6)$$

Κάνουμε τώρα τους υπολογισμούς των ιχνών στην (6-6) :

$$\begin{aligned} \text{Tr}[(\not{p}' - m_e) \gamma^\mu (\not{p} + m_e) \gamma^\nu] &= \text{Tr}[(\gamma^\rho p'_\rho - m_e) \gamma^\mu (\gamma^\sigma p_\sigma + m_e) \gamma^\nu] = \\ \text{Tr}[(\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu) p'_\rho p_\sigma + (\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\nu) p'_\rho m_e - (\gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu) p_\sigma m_e - m_e^2 (\gamma^\mu \gamma^\nu)] &= \\ 4(g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} - g^{\rho\sigma} g^{\mu\nu} + g^{\rho\nu} g^{\mu\sigma}) p'_\rho p_\sigma + 0 + 0 - 4g^{\mu\nu} m_e^2 &= \\ 4(p'^\mu p^\nu - g^{\mu\nu} p'^\sigma p_\sigma + p'^\nu p^\mu - g^{\mu\nu} m_e^2) &= \\ 4[p'^\mu p^\nu + p'^\nu p^\mu - g^{\mu\nu} (p \cdot p' + m_e^2)] &\quad (6-7) \end{aligned}$$

Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε :

$$\text{Tr}[(\not{k} + m_\mu) \gamma_\mu (\not{k}' - m_\mu) \gamma_\nu] = 4[k_\mu k'_\nu + k_\nu k'_\mu - g_{\mu\nu} (k \cdot k' + m_\mu^2)] \quad (6-8)$$

Από τις σχέσεις (6-6),(6-7),(6-8) και λαμβάνοντας την προσέγγιση $m_e \approx 0$, παίρνουμε :

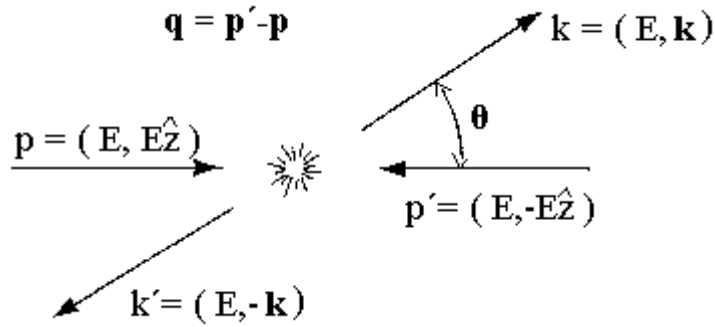
$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{spins} |M|^2 &= \frac{e^4}{4q^4} 16[p'^\mu p^\nu + p'^\nu p^\mu - g^{\mu\nu} (p \cdot p')] \times \\ &\times [k_\mu k'_\nu + k_\nu k'_\mu - g_{\mu\nu} (k \cdot k' + m_\mu^2)] = \end{aligned}$$

$$\frac{4e^4}{q^4} [p'^{\mu} p^{\nu} k_{\mu} k'_{\nu} + p'^{\mu} p^{\nu} k_{\nu} k'_{\mu} - (p \cdot p')(k \cdot k' + m_{\mu}^2) + p'^{\nu} p^{\mu} k_{\mu} k'_{\nu} + p'^{\nu} p^{\mu} k_{\nu} k'_{\mu} - (p \cdot p')(k \cdot k' + m_{\mu}^2) - (p \cdot p')(k \cdot k') - (p \cdot p')(k \cdot k') + 4(p \cdot p')(k \cdot k') + 4(p \cdot p')m_{\mu}^2]$$

και λόγω των σχέσεων : $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 4$, $a_{\mu}b^{\mu} = a \cdot b$, θα πάρουμε :

$$\frac{1}{4} \sum_{spins} |M|^2 = \frac{4e^4}{q^4} [2(p' \cdot k)(p \cdot k') + 2(p \cdot k)(p' \cdot k') + 2(p \cdot p')m_{\mu}^2] =$$

$$\frac{8e^4}{q^4} [(p \cdot k)(p' \cdot k') + (p \cdot k')(p' \cdot k) + m_{\mu}^2(p \cdot p')] \quad (6-9)$$



Σχ. 14

Ως προς σύστημα συντεταγμένων κέντρου μάζας (CM), σύμφωνα με το Σχ. 14 έχουμε :

$$|k| = \sqrt{E^2 - m_{\mu}^2}, \quad k \cdot \hat{z} = |k| \cos \theta, \quad q^2(p + p')^2 = 4E^2, \quad p \cdot p' = 2E^2,$$

$$p \cdot k = p' \cdot k' = E^2 - E|k| \cos \theta, \quad p \cdot k' = p' \cdot k = E^2 + E|k| \cos \theta$$

Κατά συνέπεια η σχέση (6-9) γίνεται :

$$\frac{1}{4} \sum_{spins} |M|^2 = \frac{8e^4}{16E^4} [E^2(E - |k| \cos \theta)^2 + E^2(E + |k| \cos \theta)^2 + 2m_{\mu}^2 E^2] =$$

$$= e^4 \left[\left(1 + \frac{m_{\mu}^2}{E^2}\right) + \left(1 - \frac{m_{\mu}^2}{E^2}\right) \cos^2 \theta \right] \quad (6-10)$$

Τώρα εφαρμόζουμε την σχέση που δίνει την ενεργό διατομή για την τελική κατάσταση δύο σωματιδίων :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{CM} = \frac{1}{2E_A 2E_B |v_A - v_B|} \frac{|p_1|}{(2\pi)^2 4E_{CM}} |M(p_A, p_B \rightarrow p_1, p_2)|^2 \quad (6-11)$$

Για το πρόβλημά μας έχουμε : $|v_A - v_B| = 2$, $E_A = E_B = E_{CM} / 2$, οπότε λόγω των σχέσεων (6-10) και (6-11) παίρνουμε :

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{CM} &= \frac{1}{2E_{CM}^2} \frac{|\mathbf{k}|}{16\pi^2 E_{CM}} \frac{1}{4} \sum_{spins} |M|^2 = \\
 &= \frac{\sqrt{E^2 - m_\mu^2}}{2E_{CM}^2 16\pi^2 E_{CM}} e^4 \left[\left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \cos^2 \theta \right] = \\
 &= \frac{E \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \cdot \alpha^2}{2E_{CM}^3} \left[\left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \cos^2 \theta \right] = \\
 &= \frac{\alpha^2}{4E_{CM}^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left[\left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \cos^2 \theta \right] \quad (6-12)
 \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας πάνω στο $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$, βρίσκουμε την ολική διατομή:

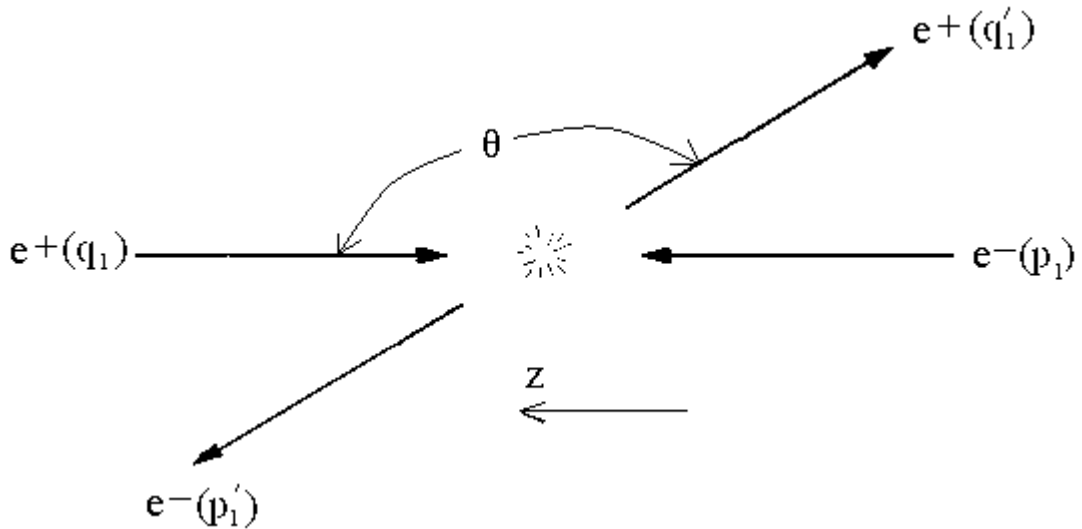
$$\begin{aligned}
 \sigma_{ol} &= \frac{\alpha^2}{4E_{CM}^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) (1 - \sin^2 \theta) \right] \sin \theta d\theta d\phi = \\
 &= \frac{2\pi\alpha^2}{4E_{CM}^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \int_0^\pi \left[2 - \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \sin^2 \theta \right] \sin \theta d\theta = \\
 &= \frac{\pi\alpha^2}{2E_{CM}^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left[\int_0^\pi 2 \sin \theta d\theta - \int_0^\pi \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \sin^3 \theta d\theta \right] = \\
 &= \frac{\pi\alpha^2}{2E_{CM}^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left[4 - \frac{4}{3} \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \right] = \\
 &= \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{CM}^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m_\mu^2}{E^2} \right) \quad (6-13)
 \end{aligned}$$

Στο όριο των υψηλών ενεργειών ($E \gg m_\mu$), οι σχέσεις (6-12) και (6-13) γίνονται :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \rightarrow \frac{a^2}{4E_{CM}^2} (1 + \cos^2 \theta) \quad (6-14)$$

$$\sigma_{ol} \rightarrow \frac{4\pi a^2}{3E_{CM}^2} \left(1 - \frac{3}{8} \left(\frac{m_\mu}{E} \right) - \dots \right) \quad (6-15)$$

7. Σκέδαση ηλεκτρονίου - ποζιτρονίου



Σχ. 15

Στο Σχ. 15 έχουμε την αντίδραση σκέδασης ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου, παρατηρούμενη ως προς σύστημα αναφοράς κέντρου μάζας (CM). Σημειώνουμε ότι τον z άξονα τον πήραμε συμβατικά κατά μήκος της αρχικής διεύθυνσης του ηλεκτρονίου, έτσι η γωνία σκέδασης θ είναι η ίδια με την συνηθισμένη πολική γωνία στις σφαιρικές συντεταγμένες.

Τα διαγράμματα Feynman γι' αυτή την διαδικασία (Bhabha scattering) φαίνονται στο Σχ. 16. Το εικονικό φωτόνιο είναι χρονοειδές, δηλ. η ορμή του έχει την ιδιότητα $q^2 > 0$. Για να βρούμε την ενεργό διατομή χρησιμοποιούμε τον τύπο του *Møller*, οπότε ο S πίνακας στοιχείων στην περίπτωσή μας θα είναι:

$$S_{fi} = + \frac{e^2 m^2}{V^2} \frac{1}{\sqrt{E_{p_1} E_{p'_1} E_{q_1} E_{q'_1}}} \left[i \frac{\bar{u}(p'_1)(-i\gamma_\mu)u(p_1)\bar{v}(q_1)(-i\gamma^\mu)v(q'_1)}{(p_1 - p'_1)^2} - \right. \\ \left. - i \frac{\bar{u}(p'_1)(-i\gamma_\mu)v(q'_1)\bar{v}(q_1)(-i\gamma^\mu)u(p_1)}{(p_1 + q_1)^2} \right] (2\pi)^4 \delta^4(p'_1 + q'_1 - p_1 - q_1) \quad (7-1)$$

Ο πρώτος όρος αντιπροσωπεύει την άμεση σκέδαση ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου. Ο δεύτερος όρος αντιπροσωπεύει την εκμηδένιση. Σημειώνουμε, ότι το πλάτος είναι αντισυμμετρικό αυτή τη φορά. Η διαφορική ενεργός διατομή για την σκέδαση μη πολωμένων ηλεκτρονίων-ποζιτρονίων είναι :

$$d\sigma = \int \frac{|S_{fi}|^2}{VT} \frac{V}{J_{inc}} \frac{V d^3 p'_1}{(2\pi)^3} \frac{V d^3 q_1}{(2\pi)^3} =$$

$$\int \frac{e^4}{(2\pi)^2} \frac{m^4}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \frac{d^3 p'_1 d^3 q_1}{E_{p_1} E_{p'_1} E_{q_1} E_{q'_1}} |M_{fi}|^2 \delta^4(p'_1 + q'_1 - p_1 - q_1) \quad (7-2)$$

Τώρα μπορούμε να προσδιορίσουμε τον αμετάβλητο πίνακα στοιχείων :

$$\begin{aligned} |M_{fi}|^2 &= \frac{\bar{u}(p'_1) \gamma_\mu u(p_1) \bar{v}(q_1) \gamma^\mu v(q'_1) \bar{v}(q'_1) \gamma^\nu v(q_1) \bar{u}(p_1) \gamma_\nu u(p'_1)}{(p_1 - p'_1)^4} \\ &\quad - \frac{\bar{u}(p'_1) \gamma_\mu u(p_1) \bar{v}(q_1) \gamma^\mu v(q'_1) \bar{u}(p_1) \gamma^\nu v(q_1) \bar{v}(q'_1) \gamma_\nu u(p'_1)}{(p_1 - p'_1)^2 (p_1 + q_1)^2} \\ &\quad - \frac{\bar{u}(p'_1) \gamma_\mu v(-q'_1) \bar{v}(q_1) \gamma^\mu u(p_1) \bar{v}(q'_1) \gamma^\nu v(q_1) \bar{u}(p_1) \gamma_\nu u(p'_1)}{(p_1 + q_1)^2 (p_1 - p'_1)^2} + \\ &\quad + \frac{\bar{u}(p'_1) \gamma_\mu v(q'_1) \bar{v}(q_1) \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p_1) \gamma^\nu v(q_1) \bar{v}(q'_1) \gamma_\nu u(p'_1)}{(p_1 + q_1)^4} \end{aligned} \quad (7-3)$$

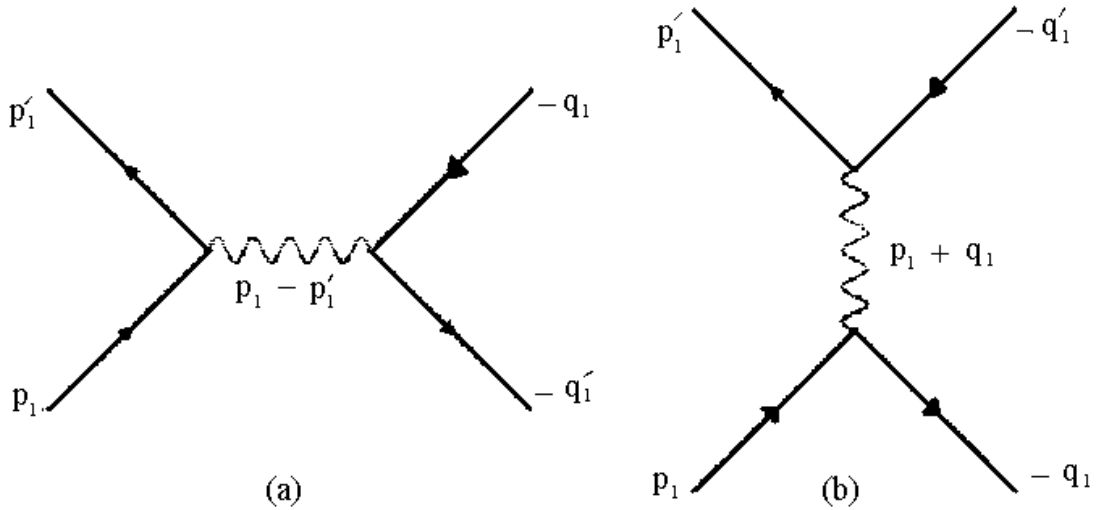
Χρειαζόμαστε τον υπολογισμό των δύο πρώτων όρων, αφού οι υπόλοιποι δύο όροι βρίσκονται μετά με την αντικατάσταση $p'_1 \leftrightarrow -q_1$. Παίρνοντας τους μέσους όρους πάνω στις αρχικές καταστάσεις των spins και αθροίζοντας πάνω στις τελικές καταστάσεις των spins, κάνουμε τους υπολογισμούς :

$$\begin{aligned} &\sum_{s_{p_1}, s_{q_1}, s_{p'_1}, s_{q'_1}} \bar{u}(p'_1)_a (\gamma_\mu)_{ab} u(p_1)_b \bar{v}(q_1)_c (\gamma^\mu)_{cd} v(q'_1)_d \bar{v}(q'_1)_e (\gamma^\nu)_{ef} v(q_1)_f \bar{u}(p_1)_g (\gamma_\nu)_{gh} u(p'_1)_h \\ &= \left(\frac{\not{p}'_1 + m}{2m} \right)_{ha} (\gamma_\mu)_{ab} \left(\frac{\not{p}_1 + m}{2m} \right)_{bg} (\gamma^\mu)_{cd} \left(\frac{-\not{q}_1 + m}{2m} \right)_{fc} (\gamma^\nu)_{ef} \left(\frac{-\not{q}'_1 + m}{2m} \right)_{de} (\gamma_\nu)_{gh} \\ &= Tr \left(\frac{\not{p}'_1 + m}{2m} \gamma_\mu \frac{\not{p}_1 + m}{2m} \gamma_\nu \right) Tr \left(\frac{-\not{q}'_1 + m}{2m} \gamma^\nu \frac{-\not{q}_1 + m}{2m} \gamma^\mu \right) \end{aligned} \quad (7-4)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{s_{p_1}, s_{q_1}, s_{p'_1}, s_{q'_1}} \bar{u}(p'_1)_a (\gamma_\mu)_{ab} u(p_1)_b \bar{v}(q_1)_c (\gamma^\mu)_{cd} v(q'_1)_d \bar{u}(p_1)_e (\gamma^\nu)_{ef} v(q_1)_f \bar{v}(q'_1)_g (\gamma_\nu)_{gh} u(p'_1)_h \\ &= \left(\frac{\not{p}'_1 + m}{2m} \right)_{ha} (\gamma_\mu)_{ab} \left(\frac{\not{p}_1 + m}{2m} \right)_{be} (\gamma^\nu)_{ef} \left(\frac{-\not{q}_1 + m}{2m} \right)_{fc} (\gamma^\mu)_{cd} \left(\frac{-\not{q}'_1 + m}{2m} \right)_{dg} (\gamma_\nu)_{gh} \\ &= Tr \left(\frac{\not{p}'_1 + m}{2m} \gamma_\mu \frac{\not{p}_1 + m}{2m} \gamma_\nu \frac{-\not{q}_1 + m}{2m} \gamma^\mu \frac{-\not{q}'_1 + m}{2m} \gamma^\nu \right) \end{aligned} \quad (7-5)$$

Ως προς σύστημα κέντρου μάζας (CM) και παραμελώντας τους όρους με m^2 , έχουμε : $E_{p_1} = E_{p'_1} = E_{q_1} = E_{q'_1} = E$, $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = \beta$, $|\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = 2\beta$,

$$p_1 \cdot q'_1 = p'_1 \cdot q_1 = 4E^2 \cos^2(\theta/2), \quad (p_1 - p'_1)^2 \simeq -2p_1 \cdot p'_1 = -4E^2 \sin^2(\theta/2)$$



Σχ. 16

$$p_1 \cdot q_1 = p_1' \cdot q_1' = 4E^2, \quad p_1 \cdot p_1' = q_1 \cdot q_1' = 4E^2 \sin^2(\theta/2)$$

$$(p_1 + q_1)^2 \simeq 2p_1 \cdot q_1 = 4E^2$$

όπου E είναι η ενέργεια κέντρου μάζας του κάθε ηλεκτρονίου και ποζιτρονίου και θ η ταχύτητά τους.

Οπότε τα ίχνη γίνονται :

$$\text{Tr} \left[\frac{\not{p}_1' + m}{2m} \gamma_\mu \frac{\not{p}_1 + m}{2m} \gamma_\nu \right] \text{Tr} \left[\frac{\not{-q}_1 + m}{2m} \gamma^\mu \frac{\not{-q}_1' + m}{2m} \gamma^\nu \right] =$$

$$\frac{2}{m^4} [p_1' \cdot q_1 p_1 \cdot q_1' + p_1' \cdot q_1' p_1 \cdot q_1] = 8 \left(\frac{E}{m} \right)^4 [1 + \cos^4(\theta/2)] \quad (7-6)$$

$$\text{Tr} \left[\frac{\not{-q}_1' + m}{2m} \frac{\not{p}_1' + m}{2m} \gamma_\mu \frac{\not{p}_1 + m}{2m} \gamma_\nu \right] \text{Tr} \left[\frac{\not{-q}_1 + m}{2m} \gamma^\mu \frac{\not{-q}_1' + m}{2m} \gamma^\nu \right] =$$

$$\frac{2}{m^4} [q_1 \cdot p_1' p_1 \cdot q_1' + q_1 \cdot q_1' p_1 \cdot p_1'] = 8 \left(\frac{E}{m} \right)^4 [\sin^4(\theta/2) + \cos^4(\theta/2)]$$

$$= 8 \left(\frac{E}{m} \right)^4 \left[\left(\frac{1 - \cos \theta}{2} \right)^2 + \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^2 \right]$$

$$= 8 \left(\frac{E}{m} \right)^4 [1 + \cos^2 \theta] \quad (7-7)$$

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left[\frac{\not{p}'_1 + m}{2m} \gamma^\mu \frac{\not{p}_1 + m}{2m} \gamma^\nu \frac{\not{q}'_1 + m}{2m} \gamma_\mu \frac{\not{q}_1 + m}{2m} \gamma_\nu \right] \\ &= -\frac{2}{m^2} p_1 \cdot q'_1 p'_1 \cdot q_1 = -8 \left(\frac{E}{m} \right)^4 \cos^4(\theta/2) \quad (7-8) \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια, η διαφορική ενεργός διατομή και ο αμετάβλητος πίνακας στοιχείων είναι :

$$d\bar{\sigma} = \frac{e^4 m^4}{8(2\pi)^2} \int \frac{d^3 p'_1 d^3 q_1}{E^4 \beta} |\bar{M}_{fi}|^2 \delta^4(p'_1 + q'_1 - p_1 - q_1) \quad (7-9)$$

$$|\bar{M}_{fi}|^2 = \frac{1}{2m^4} \left[\frac{1 + \cos^4(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)} - \frac{2 \cos^4(\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)} + \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right] \quad (7-10)$$

Στο ακραίο σχετιστικό όριο έχουμε :

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} = \frac{a^2}{8E^2} \left[\frac{1 + \cos^4(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)} - \frac{2 \cos^4(\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)} + \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right] \quad (7-11)$$

8. Υπολογισμός πλάτους σκέδασης σε μεγαλύτερες τάξεις

Αναφέρουμε εν συντομία :

1)

$$D_{\mu\nu} = \text{wavy line} + \text{wavy line with loop} + \text{wavy line with two loops}$$

$$= -\frac{ig_{\mu\nu}}{p^2 + D(p^2)} \quad (8-1)$$

Αναπτύσσουμε την $D(p^2)$: $D(p^2) = p^2 d_1 + p^4 d_2 + \dots$

Παίρνοντας το όριο $p^2 \rightarrow 0$, έχουμε :

$$D'_{\mu\nu} = \frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2(1+d_1)} = \frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2} Z_3 \quad (8-2), \quad \text{όπου } Z_3 = (1+d)^{-1}.$$

2)

$$S'_F(\mathbf{p}) = \text{horizontal line} + \text{horizontal line with loop} + \text{horizontal line with two loops} + \dots$$

$$= \frac{i}{\mathbf{p} - m - \Sigma(\mathbf{p})} \quad (8-3), \quad \text{όπου :}$$

$$\Sigma(\mathbf{p}) = -ie^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}\{\gamma_\lambda(k+\mathbf{p}+m)\gamma^\lambda\}}{\{(k+\mathbf{p})^2 - m^2\}k^2} \quad (8-4)$$

Ο πίνακας $\Sigma(\mathbf{p})$ μπορεί να εκφραστεί :

$$\begin{aligned} \Sigma(\mathbf{p}) &= A_1(p^2)I + A_2(p^2)\gamma_5 + A_3(p^2)\mathbf{p} + A_4(p^2)\gamma_5\mathbf{p} + A_5(p^2)p_\mu p_\nu \sigma_{\mu\nu} = \\ &= A_1(p^2) + A_3(p^2)\mathbf{p} \quad (8-5) \quad (\text{οι υπόλοιποι όροι είναι μηδενικοί}). \end{aligned}$$

Αναπτύσσοντας γύρω από το $\mathbf{p} = m_R$, όπου m_R είναι η επανακανονικοποιημένη μάζα ($m_R = m + \delta m$), βρίσκουμε :

$$\Sigma(\mathbf{p}) = A + B(\mathbf{p} - m_R) + \dots \quad (8-6)$$

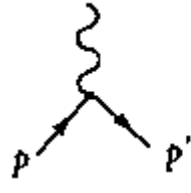
όπου για $\mathbf{p} = m_R$ έχουμε : $A = \Sigma(\mathbf{p})$, $B = \frac{\partial \Sigma(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}$

ενώ στο όριο $\mathbf{p} \rightarrow m_R$ έχουμε :

$$S'_F(\mathbf{p}) \rightarrow \frac{i}{(\mathbf{p} - m_R)(1+B)} = Z_2 \frac{i}{(\mathbf{p} - m_R)} \quad (8-7)$$


$$\text{με } Z_2 = \frac{1}{1+B}$$

3)



$$= \bar{u}(p')[-ie\Gamma_\mu(p', p)]u(p) \quad (8-8)$$

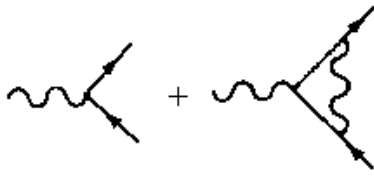
όπου $\Gamma_\mu = \gamma_\mu$.



$$= \bar{u}(p')[-ie\Gamma_\mu^1(p', p)]u(p) \quad (8-9)$$

όπου $\Gamma_\mu(p', p) = \gamma_\mu + e\Gamma_\mu^1(p', p)$.

Αλλά για $p' = p$, $p^2 = m_R^2$ έχουμε : $\Gamma_\mu^1(p', p) = e^2 C \gamma_\mu$,
 $\Gamma_\mu(p, p) = (1 + e^2 C) \gamma_\mu$ οπότε $\Gamma_\mu(p, p) = Z_1^{-1} \gamma_\mu$ με $Z_1 = \frac{1}{1 + e^2 C}$.



$$= \bar{u}(p')[-ie\Gamma_\mu(p, p)]u(p) = Z_1^{-1} \bar{u}(p')(-ie\gamma_\mu)u(p) \quad (8-10)$$

$$Z_1 = Z_2 = 1 - \frac{e^2}{8\pi^2 \varepsilon}, \quad Z_3 = 1 - \frac{e^2}{6\pi^2 \varepsilon}$$

Αναφέρουμε τώρα, τα πλάτη για κάθε περίπτωση (Σχ. 17) για την σκέδαση ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου :

$$M_\alpha = \bar{u}(p'_1, s'_1)(-ie\gamma^\nu)v(p'_2, s'_2)iD_F^{\mu\nu}(q)u(p_1, s_1)(-ie\gamma^\mu)\bar{v}(p_2, s_2) =$$

$$= \bar{u}(p'_1, s'_1)(-ie\gamma^\nu)v(p'_2, s'_2)\left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon}\right)u(p_1, s_1)(-ie\gamma^\mu)\bar{v}(p_2, s_2) \quad (8-11)$$

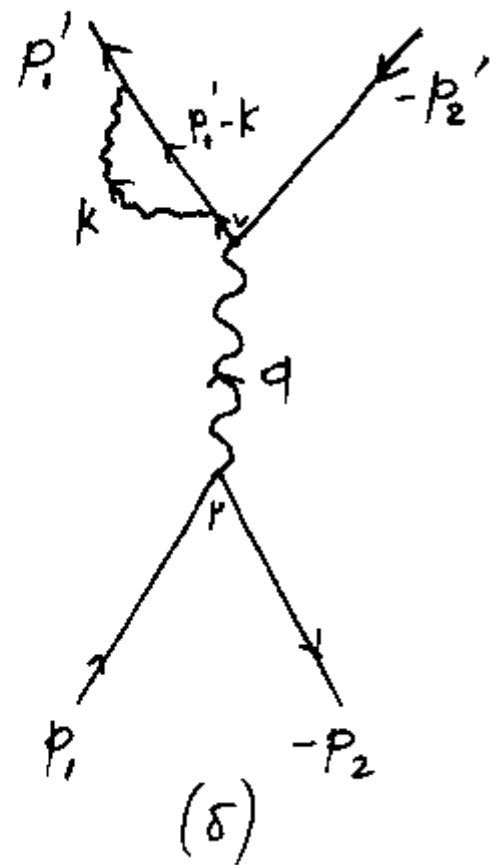
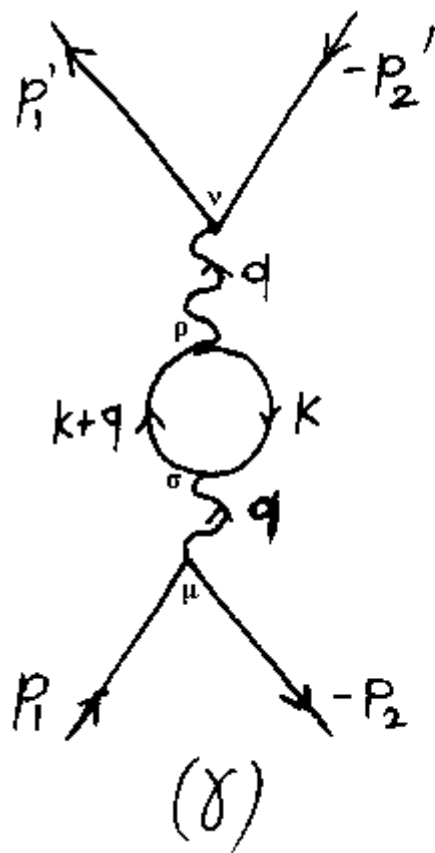
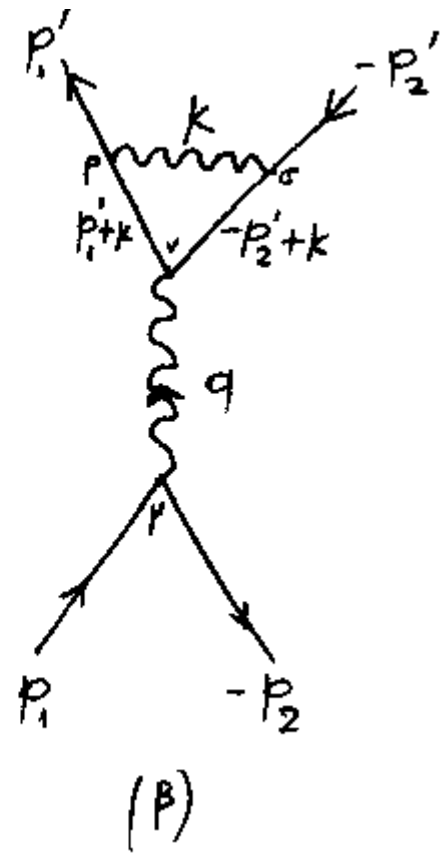
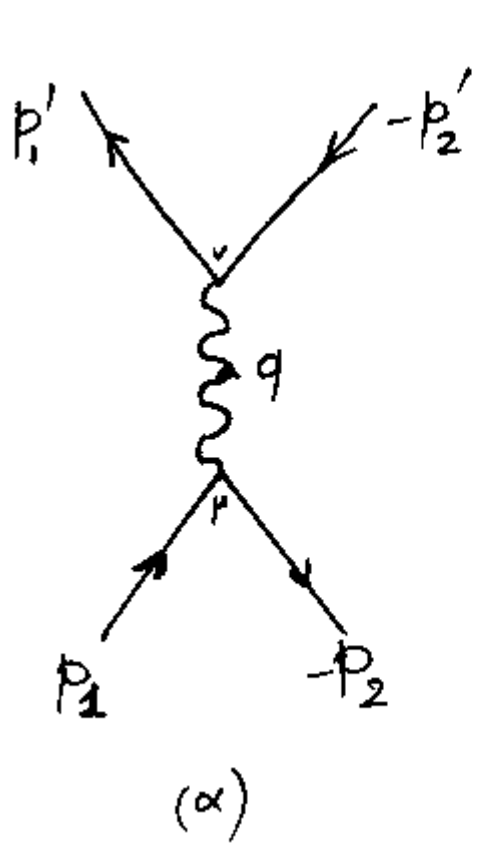
$$M_\beta = \bar{u}(p'_1, s'_1)[-ie\Gamma_\mu^1(p', p)]v(p'_2, s'_2)iD_F^{\mu\nu}(q)u(p_1, s_1)(-ie\gamma^\mu)\bar{v}(p_2, s_2) =$$

$$= \bar{u}(p'_1, s'_1)\left[\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}(-ie\gamma^\rho)\frac{i}{p'_1 + k - m + i\varepsilon}(-ie\gamma^\nu)\frac{i}{-p'_2 + k - m + i\varepsilon} \times\right.$$

$$\left. \times(-ie\gamma^\sigma)\frac{-ig_{\rho\sigma}}{k^2 + i\varepsilon}\right]v(p'_2, s'_2)\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon}(-ie\gamma^\mu)u(p_1, s_1)\bar{v}(p_2, s_2) \quad (8-12)$$

$$M_\gamma = \bar{u}(p'_1, s'_1)(-ie\gamma^\nu)v(p'_2, s'_2)iD_F^{\nu\rho}(q)i\Pi^{\rho\sigma}(k)iD_F^{\sigma\mu}(q)u(p_1, s_1) \times$$

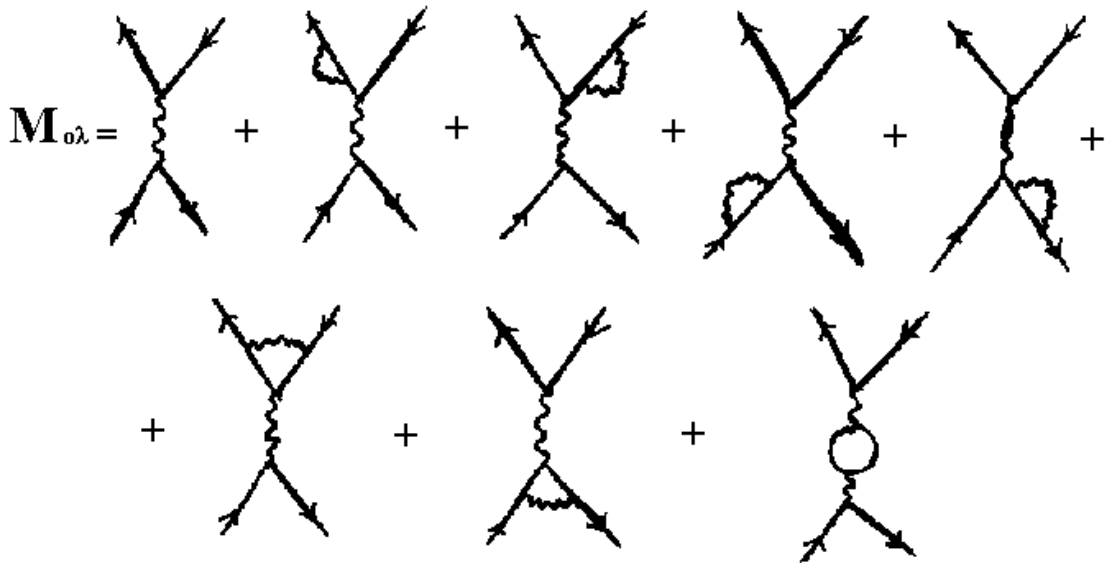
$$\times(-ie\gamma^\mu)\bar{v}(p_2, s_2) =$$



$$\begin{aligned}
&= \bar{u}(p'_1, s'_1)(-ie\gamma^v)v(p'_2, s'_2)\frac{-ig_{\nu\rho}}{q^2 + i\varepsilon} \times \\
&\left[-Tr \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k - m + i\varepsilon} (-ie\gamma^\sigma) \frac{i}{k + q - m + i\varepsilon} (-ie\gamma^\rho) \right] \times \\
&\times \frac{-ig_{\mu\sigma}}{q^2 + i\varepsilon} \bar{v}(p_2, s_2)(-ie\gamma^\mu)u(p_1, s_1) \quad (8-13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_\delta &= \bar{u}(p'_1, s'_1)iS_F(p'_1)i\Sigma(p'_1)(-ie\gamma^v)v(p'_2, s'_2)iD_F^{\mu\nu}(q) \times \\
&\times u(p_1, s_1)(-ie\gamma^\mu)\bar{v}(p_2, s_2) = \\
&= -\bar{u}(p'_1, s'_1) \left[\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-ie\gamma^\rho) \frac{i}{p'_1 - k - m + i\varepsilon} (-ie\gamma^\sigma) \frac{-ig_{\rho\sigma}}{k^2 + i\varepsilon} \right] \times \\
&\times \frac{i}{p'_1 - m + i\varepsilon} \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon} v(p'_2, s'_2)(-ie\gamma^v)u(p_1, s_1)(-ie\gamma^\mu)\bar{v}(p_2, s_2) \quad (8-14)
\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τώρα το πλάτος σκέδασης ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου με όλες τις διορθώσεις εν γένει $2^{\text{ης}}$ τάξης. Θα έχουμε :



Μπορούμε να απαλείψουμε τα διαγράμματα με τις προσθήκες αυτοενέργειας στις εξωτερικές γραμμές, πολλαπλασιάζοντας όμως τα υπόλοιπα διαγράμματα με $\sqrt{Z_2}$ για κάθε εξωτερική γραμμή, δηλαδή πολλαπλασιάζοντας με $(\sqrt{Z_2})^4 = (Z_2)^2$ και αντικαθιστώντας την μάζα με την επανακανονικοποιημένη ($m \rightarrow m_R$), οπότε παίρνουμε :

$$\begin{aligned}
 M_{\sigma\lambda} &= (Z_2)^2 \left[\left(\text{diagram 1} + \text{diagram 2} \right) \cdot \left(\text{diagram 3} + \text{diagram 4} \right) + \text{diagram 5} \right] = \\
 &= (Z_2)^2 \left[(-ie_0 Z_1^{-1})^2 \text{diagram 6} + \text{diagram 7} \right]
 \end{aligned}$$

Αλλά προσεγγιστικά για την αυτοενέργεια του φωτονίου ισχύει :

$$\text{diagram 7} \approx (-ie_0 Z_1^{-1})^2 \text{diagram 8}$$

οπότε αντικαθιστώντας στην προηγούμενη σχέση παίρνουμε για το πλάτος σκέδασης ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου με τον επανακανονικοποιημένο διαδότη φωτονίου :

$$M_{\sigma\lambda} = -e_0^2 (Z_2 Z_1^{-1})^2 \left[\text{diagram 9} + \text{diagram 10} \right]$$

και επειδή :

$$\text{diagram 9} + \text{diagram 10} \approx Z_3 \text{diagram 11}$$

και τελικά, εφόσον $Z_1 = Z_2$ το πλάτος γίνεται :

$$M_{\sigma\lambda} \approx -e_0^2 Z_3 \text{diagram 11}$$

όπου :

$$= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 [1 - \tilde{\Pi}(q^2)]}$$

Αλλά το φυσικό φορτίο του ηλεκτρονίου, όπως μετρείται είναι το επανακανονικοποιημένο φορτίο e_R , για το οποίο : $e_R = \sqrt{Z_3} e_0$. Συνεπώς έχουμε :

$$\begin{aligned}
 iM_{\alpha\lambda} &\approx -e_R^2 \bar{u}(p'_1, s'_1) [-ie_0 \Gamma^\nu(p'_1, p'_2)] v(p'_2, s'_2) \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 [1 - \tilde{\Pi}(q^2)]} \times \\
 &\times u(p_1, s_1) [-ie_0 \Gamma^\mu(p_1, p_2)] \bar{v}(p_2, s_2) = \\
 &= \frac{e_R^2 e_0^2}{q^2 [1 - \tilde{\Pi}(q^2)]} \bar{u}(p'_1, s'_1) \Gamma^\nu(p'_1, p'_2) v(p'_2, s'_2) u(p_1, s_1) \Gamma^\mu(p_1, p_2) \bar{v}(p_2, s_2)
 \end{aligned}
 \tag{8-15}$$

Αλλά για $-q^2 \gg m^2$ ισχύει :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Pi}(q^2) &= \frac{-2a}{\pi} \int_0^1 x(1-x) \ln \left[\frac{m^2}{m^2 - q^2 x(1-x)} \right] dx \approx \\
 &\approx \frac{2a}{\pi} \int_0^1 x(1-x) \left\{ \ln \left(\frac{-q^2}{m^2} \right) + \ln [x(1-x)] \right\} dx + O\left(\frac{m^2}{q^2} \right), \\
 \int_0^1 x(1-x) dx &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}, \quad \int_0^1 x^n \ln x dx = -\frac{1}{(n+1)^2}, \\
 \int_0^1 x(1-x) [\ln x + \ln(1-x)] dx &= \int_0^1 (x - x^2) \ln x dx + \\
 &+ \int_0^1 (y^{\mathbf{(y=1-x)}} - y^2) \ln y dy = 2(-1) \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right] = -\frac{5}{18}
 \end{aligned}$$

$$\text{Τελικά : } \tilde{\Pi}(q^2) = \frac{a}{3\pi} \left[\ln \left(\frac{-q^2}{m^2} \right) - \frac{5}{3} \right] + O\left(\frac{q^2}{m^2} \right) \tag{8-16}$$

Αλλά ως γνωστόν ισχύει :

$$a_{eff}(q^2) = \frac{a}{1 - \tilde{\Pi}(q^2)}, \quad a_{eff}(q^2) = a \approx \frac{1}{137}$$

$$a_{eff}(-q^2 \gg m^2) = \frac{a}{1 - \frac{a}{3\pi} \ln\left(-\frac{q^2}{Am^2}\right)}$$

όπου $A = \exp\left(\frac{5}{3}\right)$.

Συνεπώς η σχέση (8-15) γίνεται :

$$iM_{ολ} \approx \frac{-i4\pi a_{eff} e_R^2 g_{\mu\nu}}{q^2} \bar{u}(p'_1, s'_1) \Gamma^\nu(p'_1, p'_2) \nu(p'_2, s'_2) u(p_1, s_1) \Gamma^\mu(p_1, p_2) \bar{v}(p_2, s_2) \quad (8-17)$$

όπου:

$$\Gamma^\mu(p', p) = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2), \quad q = p' - p, \quad \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu],$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad i\sigma^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \gamma^\mu \gamma^\nu$$

Οι συναρτήσεις F_1, F_2 ονομάζονται form factors. Για την χαμηλότερη τάξη ισχύει : $F_1 = 1, F_2 = 0$. Στο όριο $q^2 \rightarrow 0$ αποδεικνύεται ότι :

$$F_1(q^2) \approx \frac{a}{3\pi} \frac{q^2}{m^2} \left(\ln \frac{m}{\mu} - \frac{3}{8} \right), \quad F_2(q^2) = \frac{a}{2\pi}, \quad \text{όπου } \mu \text{ η μάζα φωτονίου.}$$

Κατά συνέπεια η σχέση (8-17) γίνεται :

$$iM_{ολ} \approx \frac{-i4\pi a_{eff} e_R^2}{q^2} \left\{ \gamma^\nu \frac{\alpha}{3\pi} \frac{q'^2}{m^2} \left(\ln \frac{m}{\mu} - \frac{3}{8} \right) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q'_\nu}{2m} \frac{a}{2\pi} \right\} \left\{ \gamma_\nu \frac{\alpha}{3\pi} \frac{q^2}{m^2} \left(\ln \frac{m}{\mu} - \frac{3}{8} \right) + \frac{ig_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} q_\mu}{2m} \frac{a}{2\pi} \right\} \bar{u}(p'_1, s'_1) \nu(p'_2, s'_2) u(p_1, s_1) \bar{v}(p_2, s_2) \quad (8-18)$$

Στην απλή περίπτωση που $F_1 = 1, F_2 = 0$ και ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως μ' αυτήν που αναφέρθηκε στις σελίδες 24,25 θα έχουμε :

$$iM_{\text{ολ}} \approx 4\pi a_{\text{eff}} e_R^2 \frac{1}{q^2} \bar{u}(p'_1, s'_1) \gamma^\nu v(p'_2, s'_2) u(p_1, s_1) \gamma_\nu \bar{v}(p_2, s_2)$$

$$|M_{\text{ολ}}|^2 = \frac{4\pi^2 a_{\text{eff}}^2 e_R^4}{q^4} \sum_{s_i, s'_j} \bar{u}(p'_1, s'_1) \gamma_\nu v(p'_2, s'_2) \bar{v}(p_2, s_2) \gamma_\mu u(p_1, s_1) \times \\ \times \bar{v}(p_2, s_2) \gamma^\nu u(p_1, s_1) \bar{u}(p_1, s_1) \gamma^\mu v(p_2, s_2) \quad (8-19)$$

$$|M_{\text{ολ}}|^2 = \frac{4\pi^2 a_{\text{eff}}^2 e_R^4}{q^4} \text{Tr}[(p'_1 - m) \gamma_\nu (p'_2 - m) \gamma_\mu] \text{Tr}[(p_1 - m) \gamma^\nu (p_2 - m) \gamma^\mu]$$

$$\text{Αλλά : } \text{Tr}[(p'_1 - m) \gamma_\nu (p'_2 - m) \gamma_\mu] = 4[p'_{1\nu} p'_{2\mu} + p'_{1\mu} p'_{2\nu} - g_{\mu\nu} (p'_2 \cdot p'_1 + m^2)] \\ \text{Tr}[(p_1 - m) \gamma^\nu (p_2 - m) \gamma^\mu] = 4[p_1^\nu p_2^\mu + p_1^\mu p_2^\nu - g^{\mu\nu} (p_2 \cdot p_1 + m^2)]$$

οπότε :

$$|M_{\text{ολ}}|^2 = \frac{64\pi^2 a_{\text{eff}}^2 e_R^4}{q^4} [p'_{1\nu} p'_{2\mu} + p'_{1\mu} p'_{2\nu} - g_{\mu\nu} (p'_2 \cdot p'_1 + m^2)] \times \\ \times [p_1^\nu p_2^\mu + p_1^\mu p_2^\nu - g^{\mu\nu} (p_2 \cdot p_1 + m^2)] = \\ p'_{1\nu} p'_{2\mu} p_1^\nu p_2^\mu + p'_{1\nu} p'_{2\mu} p_1^\mu p_2^\nu - p'_1 \cdot p'_2 (p_2 \cdot p_1 + m^2) + p'_{1\mu} p'_{2\nu} p_1^\nu p_2^\mu + \\ + p'_{1\mu} p'_{2\nu} p_1^\mu p_2^\nu - p'_1 \cdot p'_2 (p_2 \cdot p_1 + m^2) - 2(p_1 \cdot p_2)(p_2 \cdot p_1 + m^2) + \\ + 4(p'_2 \cdot p'_1 + m^2)(p_2 \cdot p_1 + m^2) = \\ = 2\{(p'_1 \cdot p_1)(p'_2 \cdot p_2) + (p'_1 \cdot p_2)(p'_2 \cdot p_1) + (p'_1 \cdot p'_2)(p_1 \cdot p_2) - (p_1 \cdot p_2)^2 + \\ m^2[(p'_1 \cdot p'_2) + (p_1 \cdot p_2) + 2m^2]\} \quad (8-20)$$

Αλλά ως προς σύστημα συντεταγμένων (CM) και στο όριο των υψηλών ενεργειών έχουμε :

$$p_1 \cdot p_2 = E^2 + p^2 \approx 2E^2, \quad p'_1 \cdot p'_2 = E'^2 + p'^2 \approx 2E'^2 \quad \text{για } E = E' \gg m$$

$$|\mathbf{p}| \approx E = E' \approx |\mathbf{p}'|, \quad q^2 = (p_1 + p_2)^2 = 4E^2,$$

$$(p_1 \cdot p'_1)(p_2 \cdot p'_2) = (E^2 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}'_1)(E^2 - \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}'_2) =$$

$$= (E^2 - |\mathbf{p}_1| \cdot |\mathbf{p}'_1| \cos \theta)(E^2 - |\mathbf{p}_2| \cdot |\mathbf{p}'_2| \cos \theta) \approx E^4 (1 - \cos \theta)^2$$

$$(p_1 \cdot p'_2)(p_2 \cdot p'_1) = (E^2 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}'_2)(E^2 - \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}'_1) \approx E^4 (1 + \cos \theta)^2$$

Άρα η σχέση (8-20) γράφεται :

$$|M_{\text{ολ}}|^2 \approx 32\pi^2 a_{\text{eff}}^2 e_R^4 (1 + \cos^2 \theta) \quad (8-21)$$

οπότε η ενεργός διατομή σύμφωνα με την σχέση που αναφέρθηκε στην σελίδα 26, θα είναι :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{CM}} &\approx \frac{\sqrt{E^2 - m^2}}{32\pi^2 E_{\text{CM}}^3} 32\pi^2 a_{\text{eff}}^2 e_{\text{R}}^4 (1 + \cos^2 \theta) = \\ &= \frac{1}{8E^2} a_{\text{eff}}^2 e_{\text{R}}^4 (1 + \cos^2 \theta) \end{aligned} \quad (8-22)$$