ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

Θεωρήματα συνέχειας (Β)

Θέμα 1

Έστω f συνάρτηση συνεχής στο $[0,1]$. Αν ισχύει:

$$\left[f^2(0)+16\right]\cdot\left[f^2(1)+4\right]\le\left[f(0)f(1)-8\right]^2$$

να αποδείξετε ότι η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[0,1]$.

Απάντηση:

Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\alpha_5x^5+\alpha_4x^4+\alpha_3x^3+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0$ όπου $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\in\mathbb{R}$, $\alpha_0>0$, $\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5=0$ και $5\alpha_5+4\alpha_4+3\alpha_3+2\alpha_2+\alpha_1>0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Απάντηση:

Θέμα 3

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,2]$ και $3f(2)+5f(2)=0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[1,2]$.

Απάντηση:

Θέμα 4

Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και όλες οι ρίζες της εξίσωσης $f\left[1-x\cdot f(x+3)\right]=x\cdot f(x+2)+f(x+1)$ βρίσκονται στο διάστημα $\left(f(\alpha),f(\beta)\right)$, τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία ρίζα στο διάστημα (α,β).

Απάντηση:

Θέμα 5

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύει: $f(x)+2xg(x)=g^2(x)+x^2+4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν $g(1)<1$, $g(2)>2$ και η g είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο

Απάντηση:

Θέμα 6

Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής. Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $\left|f\left(x\right)\right|\le\dfrac{3x^2+4}{7}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f\left(x_0\right)=x_0^{1821}$.

Απάντηση:

Θέμα 7

Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει $f\left(g\left(x\right)\right)=x^7+x+1+g\left(x\right)$.

(i) Να αποδείξετε ότι η g είναι $1-1$.

(ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f\left(\xi\right)=\xi$.

Απάντηση:

Θέμα 8

Η συνάρτηση f είναι συνεχής, δεν μηδενίζεται πουθενά στο $[1,2]$ και ισχύει:

$$\left[f^2(1)+4f(1)+34\right]\cdot\left[f^2(2)+5f(2)+73\right]=2010,$$

Να αποδείξετε ότι $f(x)<0$, για κάθε $x\in[1,2)$

Απάντηση:

Θέμα 9

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x)>0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Αν υπάρχουν $x_1,x_2,x_3,x_4\in[\alpha,\beta]$ με $x_1<x_2<x_3<x_4$, τέτοια ώστε $f^3(x_4)=f(x_1)\cdot f(x_2)\cdot f(x_3)$, να αποδείξετε ότι η f δεν είναι $1-1$ στο $[\alpha,\beta]$.

Απάντηση:

Θέμα 10

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=3$, για την οποία ισχύει $f(f(x))=2x+x^2-2f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(i) Να βρείτε το $f(3)$

(ii) Να βρείτε τα $f(-3)$ και $f(1)$

(iii) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο $(-3,1)$.

Απάντηση:

Θέμα 11

(i) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής και 1−1 με $f(\rho)=0$. Να αποδείξετε ότι η f δεν μπορεί να έχει το ίδιο πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty,\rho)$ και $(\rho,+\infty)$.

(ii) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής και 1−1. Αν $f(1)=0$ και $f(0)=-1$, να αποδείξετε ότι ισχύει: $f(1-f(x))-f(x)>0$ για κάθε $x<1$.

Απάντηση:

Θέμα 12

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής, όχι σταθερή συνάρτηση. Αν η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο σε δύο διαφορετικά σημεία $x_1,\ x_2\in[\alpha,\beta]$, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα x_3 μεταξύ των $x_1,\ x_2$ τέτοιο ώστε η f να παρουσιάζει στο σημείο αυτό τοπικό ελάχιστο.

Απάντηση:

Θέμα 13

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$f(x+3)+f(x-1)=f(x+1)+x,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $f(x)=5$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα

Απάντηση:

Θέμα 14

Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει $f(x)=(x^2-4x+3)\cdot g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αν οι αριθμοί 1 και 3 είναι διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$, τότε να αποδείξετε ότι: $g(1)\cdot g(3)\geq 0$ και να εξετάσετε αν η εξίσωση $g(x)+g(1)+g(3)=0$ έχει λύση στο $[1,3]$.

Απάντηση:

Θέμα 15

Έστω $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ συνεχής συνάρτηση και υπάρχουν $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ ώστε $\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha<\beta<\gamma$ και $f(\alpha)\cdot f(\beta)\cdot f(\gamma)=1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\gamma)$ τέτοιοι ώστε $f(x_0)=e^{x_0}$.

Απάντηση:

Θέμα 16

Δίνεται η συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $f^2(x)\neq 4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)>2$.Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $e^x+f(x)=e^x.f(x)$ έχει ακριβώς μία πραγματική λύση.

Απάντηση:

Θέμα 17

Έστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$f(x)\neq 0\text{, για κάθε } x\in[0,+\infty).$$

Έστω $x_1,x_2,x_3\in[0,+\infty)$, τέτοια ώστε $f(x_1)\cdot f(x_2)\cdot f(x_3)=x_1\cdot x_2\cdot x_3$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την διχοτόμο των γωνιών του $1^{ου}$ και $3^{ου}$ τεταρτημορίου.

Απάντηση: