Χρήσιμες επισημάνσεις στις αντίστροφες συναρτήσεις

του Μαύρου Γιάννη, Μαθηματικού

Α) Αντίστροφη και μονοτονία

Πρόταση: Αν μία συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη, τότε αντιστρέφεται και η αντίστροφή της συνάρτηση $f^{-1}: f(A) \to \mathbb{R}$ είναι επίσης γνησίως μονότονη με το ίδιο μάλιστα είδος μονοτονίας.

Απόδειξη:
Έστω f γνησίως αύξουσα στο Α. (Όμοια εργαζόμαστε αν είναι γνησίως φθίνουσα)
Τότε για $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ θα είναι $f(x_1) < f(x_2)$.
Συνεπακόλουθα για $x_1 \neq x_2$ θα είναι $f(x_1) \neq f(x_2)$ οπότε η f είναι“1-1” και ως εκ τούτου αντιστρέψιμη.

Τώρα θα αποδείξουμε ότι: $\forall y_1, y_2 \in f(A)$ με $y_1 < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ (*)
Έστω τώρα η σχέση (*) δεν ισχύει. Τότε θα ισχύει η άρνησή της, που είναι: $\exists y_1, y_2 \in f(A)$ με $y_1 < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$
Έτσι, και αφού f γνησίως αύξουσα στο Α, από την $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$ $\Rightarrow f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2))$, δηλαδή: $y_1 \geq y_2$, άρα άτοπο.
Επομένως σχέση (*) ισχύει και ως εκ τούτου η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο Α

Β) Σχετικά με τις γραφικές παραστάσεις δύο αντίστροφων συναρτήσεων

Πρόταση 1: Αν μία συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ αντιστρέφεται, τότε οι γραφικές παραστάσεις C_f της f και $C_{f^{-1}}$ της f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ (διχοτόμο της 1ης και της 3ης γωνίας των αξόνων)

Απόδειξη:
Έστω μία συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ αντιστρέφεται. Έχουμε:

$$M(\alpha,\beta) \in C_f \Leftrightarrow \beta = f(\alpha) \Leftrightarrow \alpha = f^{-1}(\beta) \Leftrightarrow M'(\beta,\alpha) \in C_{f^{-1}}$$

Και επειδή τα σημεία Μ(α,β) και $M'(\beta,\alpha)$ είναι συμμετρικά ως προς τη ευθεία y=x, συνάγεται ότι οι γραμμές C_f της f και $C_{f^{-1}}$ της f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x.

Πρόταση 2: Αν μία συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ αντιστρέφεται και οι γραφικές παραστάσεις C_f της f και $C_{f^{-1}}$ της f^{-1} έχουν ένα μοναδικό κοινό σημείο, αυτό ανήκει στην ευθεία $y = x$

Απόδειξη:

Έστω ότι οι C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν ένα μοναδικό κοινό σημείο , το Μ(α,β). Τότε:

$$\begin{cases}(\alpha,\beta)\in C_f\\(\alpha,\beta)\in C_{f^{-1}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\beta=f(\alpha)\\\beta=f^{-1}(\alpha)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=f^{-1}(\beta)\\\alpha=f(\beta)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(\beta,\alpha)\in C_{f^{-1}}\\(\beta,\alpha)\in C_f\end{cases}$$

Άρα το σημείο $M'(\alpha,\beta)$ είναι επίσης κοινό των C_f και $C_{f^{-1}}$. Έτσι, από την υπόθεση έχουμε: $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$ και συνεπώς α=β. Επομένως το κοινό σημείο ανήκει στην ευθεία y=x.

Πρόταση 3: Αν μία συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ αντιστρέφεται τότε οι εξισώσεις $f(x)=x$ και $f^{-1}(x)=x$ είναι ισοδύναμες.

Απόδειξη:

- Έστω $x_0\in A$ για το οποίο ισχύει $f(x_0)=x_0$,
  Τότε θα είναι και $f^{-1}(f(x_0))=f^{-1}(x_0)\Rightarrow x_0=f^{-1}(x_0)$.
- Έστω τώρα $x_0\in f(A)$ για το οποίο ισχύει $f^{-1}(x_0)=x_0$,
  Τότε θα είναι και $f(f^{-1}(x_0))=f(x_0)\Rightarrow x_0=f(x_0)$.

Πρόταση 4: Αν μία συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ αντιστρέφεται και είναι γνησίως αύξουσα τότε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ (αν υπάρχουν) ανήκουν στην ευθεία y=x.

(Δηλαδή οι εξισώσεις $f(x)=x$ και $f^{-1}(x)=f(x)$ είναι ισοδύναμες).

Απόδειξη:

- Έστω $x_0\in A$ για το οποίο ισχύει $f(x_0)=x_0$,
  Τότε θα είναι και $f^{-1}(f(x_0))=f^{-1}(x_0)\Rightarrow x_0=f^{-1}(x_0)$.
  Τελικά είναι $f^{-1}(x_0)=f(x_0)$
- Έστω τώρα $x_0\in A\cap f(A)$ για το οποίο ισχύει $f^{-1}(x_0)=f(x_0)$ (**). Θα δείξουμε ότι είναι και $f(x_0)=x_0$. Πράγματι, έστω ότι : $f(x_0)>x_0$.
  Τότε αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε:
  $f(x_0)>x_0$, λόγω της (**) $\Rightarrow f^{-1}(x_0)>x_0\Rightarrow f(f^{-1}(x_0))>f(x_0)\Rightarrow x_0>f(x_0)$.Άτοπο
  Όμοια φτάνουμε σε άτοπο αν υποθέσουμε ότι $f(x_0)<x_0$.
  Άρα $f(x_0)=x_0$ και το σημείο με τετμημένη x_0 ανήκει στην ευθεία y=x.

Σημείωση. Η παραπάνω πρόταση δεν ισχύει αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.