

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ**

**Εκτός «ορίων»!**

*«...ήδη ένα όριο ήμουν ,ένα μη περαιτέρω...»*

**Θέμα 1**

Να βρεθεί το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{27\sqrt{x} - x^2}{\sqrt{x} - 3}$

Λύση:

**Θέμα 2**

Αν  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(4-x)}{f(x)} = \alpha$ , να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{x - \sqrt{x}}$

Λύση:

**Θέμα 3**

Αν για τις συναρτήσεις  $f, g$  ορισμένες στο  $\mathbb{R}$  ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)\eta\mu x - xf(x)}{2x} = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) \cdot \eta\mu x + x \cdot f(x)}{\eta\mu x} = \frac{1}{2}, \text{ τότε να βρεθεί το όριο στο } x_0 = 0 \text{ των συναρτήσεων } f \text{ και } g.$$

Απάντηση:

**Θέμα 4**

Να βρεθούν τα όρια:

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \left( x^2 \eta\mu \frac{1}{x} \right)$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0} \left( x \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \right)$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 0} \left[ x^2 \left( 3 - 2\eta\mu \frac{1}{x} \right) \right]$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow \pi} \left[ (x - \pi)^3 \eta\mu \frac{2}{x - \pi} \right].$$

Απάντηση:

**Θέμα 5**

Να αποδειχθεί ότι: **i)**  $\lim_{x \rightarrow 0} \eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu x \left( \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0$

$$\mathbf{ii)} \lim_{x \rightarrow 0} \left( x + \eta\mu \frac{\pi}{x} \right) \left( \sqrt{1+x^2} - 1 \right) = 0 \quad \mathbf{iii)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{\varepsilon\varphi \frac{\pi x}{4}} - 1}{x-1} = \frac{\pi}{4}.$$

Απάντηση:

**Θέμα 6**

**(i)** Αν  $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + x^2 - x + 2] = 3$  να δείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 2f(x) - 3}{f^2(x) - 1} = 2$

**(ii)** Αν  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + x}{x-1} = 2$  να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) + f(x) - 2}{\sqrt{f^2(x) + 3} - 2}$ .

Απάντηση:

**Θέμα 7**

Να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  όταν:

$$(i) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x + 1}{f(x)} = -\infty$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\pi x}{4}}{x^2 - 4} = +\infty$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) \cdot \eta\mu(x-2)}{\sqrt{x^2 + 5} - 3} = -\infty$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) \cdot \eta\mu(x^2 - 4)}{\sqrt[3]{x+6} - \sqrt{x+2}} = +\infty$$

Απάντηση:

**Θέμα 8**

Οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι ορισμένες κοντά στο  $x_0$ . Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$  και

$f(x) \cdot g(x) \neq 0$ , κοντά στο  $x_0$ , να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^3(x) + g^3(x) \cdot \eta\mu x}{f^2(x) + g^2(x)} = 0$

Απάντηση:

**Θέμα 9**

1. Για τις διάφορες τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$  να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sqrt{x^2 - 3\alpha x + 3\alpha^2} - \alpha}{|x| - \alpha}$

2. Για τις διάφορες τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x - \alpha| - |x + \alpha|}{x^3}$

Απάντηση:

**Θέμα 10**

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  συνάρτηση ώστε

$$f(x) \cdot f(\psi) = \psi \cdot f(x) + x \cdot f(\psi) - x\psi \text{ για κάθε } x, \psi \in \mathbb{R}.$$

Να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3}$ .

Απάντηση:

**Θέμα 11**

Οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι ορισμένες στο  $\mathbb{R}$  και για κάθε  $x \neq 0$  ικανοποιούν τη σχέση

$$x^2 (f(x))^2 + (g(x))^2 \leq x^4 \eta\mu \frac{2\pi}{x}.$$

Να υπολογιστούν τα όρια:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ .

Απάντηση:

**Θέμα 12**

Αν  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^3 + (\beta + 2)x + \gamma - 3}{(x - 1)^2} = 3$ , να βρεθούν οι αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$

Απάντηση:

**Θέμα 13**

Αν  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6\alpha x + 8\beta x}{\eta\mu(x\alpha^2) + \eta\mu(x\beta^2)} = 2$ , να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων  $M(\alpha, \beta)$ .

Απάντηση:

**Θέμα 14**

Έστω  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f^3(x) + xf(x) = 1, \forall x > 0$

Δείξτε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

Απάντηση:

Τι είναι τα Μαθηματικά;

"Τι είναι λοιπόν τα Μαθηματικά; Φαίνεται ότι έχουμε τρεις επιλογές:

- Τα Μαθηματικά είναι η ανθρωπιστική επιστήμη που υμνεί την αιώνια λογική.
- Είναι η φυσική επιστήμη που μελετά το φαινόμενο λογική.
- Είναι η τέχνη που πλάθει μορφές αιθέριας ομορφιάς από πρώτη ύλη που ονομάζεται λογική.

Είναι όλα αυτά και άλλα. Πάνω απ' όλα, όμως, μπορώ να σας διαβεβαιώσω ότι τα Μαθηματικά είναι ευχαρίστηση."

