

## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

### Ασκήσεις επανάληψης στις συναρτήσεις γενικά

1. Έστωσαν οι συναρτήσεις  $f$ ,  $g$  και  $h$  με αντίστοιχους τύπους  $f(x) = |\ln x|$ ,  $g(x) = \ln|x|$  και  $h(x) = \|\ln|x|\|$ . Να εξεταστεί αν κάποια από τις παραπάνω συναρτήσεις είναι ίση με μία άλλη. Κατόπιν να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $g$

2. Αν η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ , να αποδειχθεί ότι για τη συνάρτηση  $h$  με τύπο  $h(x) = \frac{f(3x+1) - f(x+1)}{2x}$ , ισχύει  $h(x) < 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$

3. Να βρεθούν όλες οι περιττές συναρτήσεις  $f$ , που έχουν τύπο  $f(x) = px^3 + qx^2 + r$ ,  $p \in \mathbb{R}^*$ ,  $q, r \in \mathbb{R}$ , και των οποίων οι αντίστροφες συναρτήσεις υπάρχουν και ορίζονται. Έπειτα να βρεθεί, για κάθε μία από τις συναρτήσεις  $f$  που πληρούν τα παραπάνω, η αντίστροφη συνάρτηση.

4. Σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις, να βρεθεί η συνάρτηση  $g$  έτσι ώστε η σύνθεσή της με τη συνάρτηση  $f$  να είναι η συνάρτηση  $h$

I.  $f(x) = \sqrt{x}$  και  $h(x) = \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$

II.  $f(x) = e^x$  και  $h(x) = e^{\eta \mu x}$

III.  $f(x) = 2x$  και  $h(x) = 2^{2x} x^{2x}$

IV.  $f(x) = 1 - x^2, x \in [-1, 1]$  και  $h(x) = \eta \mu^2 x$

V.  $f(x) = x + 4$  και  $h(x) = \frac{x + 4}{x + 5}$

5. Έστωσαν οι συναρτήσεις  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , για τις οποίες, για κάθε  $y \in \mathbb{R}$ , ισχύει  $(f \circ g)(y) = y$ . Αν για τη συνάρτηση  $f$  ξέρουμε ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ , να λυθεί η ανίσωση  $g(2f(10 - 4x) - f(x)) > x$

6. Έστωσαν οι συναρτήσεις  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , για τις οποίες, για κάθε  $x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}^*$  ισχύει  $(f \circ f)(x) = kf(x) + g(x^3 + 1)$ . Αν για τη συνάρτηση  $g$  είναι 1-1, να αποδειχθεί ότι και η συνάρτηση  $f$  είναι 1-1.

