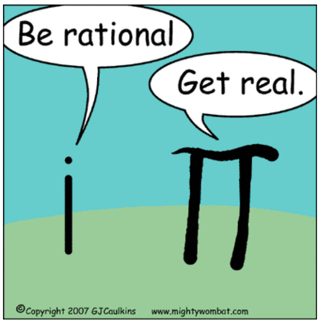
Γιατί στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών δεν μπορεί να οριστεί διάταξη;

Ποια είναι τα σημεία προσοχής σχετικά;



Άρθρο των Μαύρου Γιάννη , Οικονόμου Γιάννη
Καθηγητών του 1ου ΓΕΛ Πετρούπολης

ΜΕΡΟΣ Α: Θα αποδείξουμε στο άρθρο αυτό ότι το σύνολο $\mathbb{C}$ δεν είναι διατεταγμένο σώμα.

Ορισμοί: **Σώμα** ονομάζεται μία αλγεβρική δομή η οποία αποτελείται από ένα σύνολο Α εφοδιασμένο με δύο εσωτερικές πράξεις $+$ και $\bullet$ για τις οποίες ισχύουν:

$\alpha+\beta=\beta+\alpha$	$\alpha.\beta=\beta.\alpha$
$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$	$(\alpha.\beta).\gamma=\alpha.(\beta.\gamma)$
$\alpha+0=0+\alpha=\alpha$	$\alpha.1=1.\alpha=\alpha$
$\alpha+(-\alpha)=0$	$\alpha.\frac{1}{\alpha}=1,\ \alpha\neq 0$
$\alpha.(\beta+\gamma)=\alpha.\beta+\alpha.\gamma$	

Ένα σώμα Α λέμε ότι είναι **διατεταγμένο** αν και μόνο αν υπάρχει γνήσιο υποσύνολό του Β που να ικανοποιούνται οι παρακάτω ιδιότητες (αξιώματα).

i. Κλειστότητα
($\forall \alpha,\beta\in B \Rightarrow \alpha+\beta\in B$ και $\alpha.\beta\in B$)
ii. Τριχοτομία
($\forall \alpha\in A$ ισχύει ακριβώς μία από τις σχέσεις: ή $\alpha\in B$ ή $-\alpha\in B$ ή $\alpha=0$)

Θεώρημα: Αν Α είναι διατεταγμένο σώμα ισχύουν

- Αν $\alpha\in A$ και $\alpha\neq 0 \Rightarrow \alpha^2\in B$
- $1\in B$

Απόδειξη: • Αφού Α διατεταγμένο σώμα και $\alpha\neq 0$ θα είναι ή $\alpha\in B$ ή $-\alpha\in B$

Αν $\alpha\in B\Rightarrow \alpha.\alpha\in B$. Άρα $\alpha^2\in B$

Αν $-\alpha\in B\Rightarrow(-\alpha).(-\alpha)\in B$. Άρα $\alpha^2\in B$

- Αφού Α σώμα και $1 \neq 0$, τότε $1^2 \in B$ δηλαδή $1 \in B$

Θεώρημα: Το σώμα $(\mathbb{C},+,.)$ **όχι διατεταγμένο**

Απόδειξη: Αν $\mathbb{C}$ ήταν διατεταγμένο, θα έπρεπε να υπήρχε ένα υποσύνολο $\Gamma \subset \mathbb{C}$ που θα ίσχυαν τα αξιώματα κλειστότητας και τριχοτομίας. Αφού i=(0, 1) και O(0, 0) $\Rightarrow i \neq 0$, θα είναι $[i \in \Gamma \Rightarrow i.i = i^2 = -1 \in \Gamma]$ ή $[-i \in \Gamma \Rightarrow (-i).(-i) = i^2 = -1 \in \Gamma]$ άρα $i^2 \in \Gamma$ δηλαδή $-1 \in \Gamma$. Όμως $1 \in \Gamma$ άρα $-1 \notin \Gamma$, κατάληξη σε άτοπο.
Συνεπώς το σύνολο $\mathbb{C}$ δεν είναι διατεταγμένο σώμα.

ΜΕΡΟΣ Β: Σημεία προσοχής-επισημάνσεις

Αφού λοιπόν το σώμα $\mathbb{C}$ δε διατηρεί τη διάταξη του γνωστού μας σώματος $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, είναι χωρίς νόημα στο $\mathbb{C}$ οι έννοιες «θετικός μιγαδικός-αρνητικός αριθμός και $z_1 < z_2$ όπου $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$»

Άρα λοιπόν για $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$: $\alpha+\beta i \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow \alpha \geq 0$ και β=0

$\alpha+\beta i \in \mathbb{R}^*_+ \Leftrightarrow \alpha > 0$ και β=0

$\alpha+\beta i \in \mathbb{R}_- \Leftrightarrow \alpha \leq 0$ και β=0

$\alpha+\beta i \in \mathbb{R}^*_- \Leftrightarrow \alpha < 0$ και β=0

Επίσης για $\alpha,\beta,\kappa,\lambda \in \mathbb{R}$ είναι: $\alpha+\beta.i<\kappa+\lambda.i \Leftrightarrow \alpha < \kappa$ και $\beta = \lambda = 0$

Προσοχή **όχι** $(\alpha-\kappa)+(\beta-\lambda).i < 0$,όπου $\alpha-\kappa <0$ και $\beta-\lambda=0 \Leftrightarrow \alpha <\kappa$ αλλά $\beta=\lambda$

Παραδείγματα:

1) Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = (3-\alpha^2-\beta)+(\alpha+\beta-1)i$, με $\alpha,\beta \in \mathbb{Z}$. Να βρεθούν οι α, β έτσι ώστε $z > 0$

   Λύση: Είναι (α+β-1=0 και $3-\alpha^2-\beta > 0$)

   $\Rightarrow (\beta = 1-\alpha = 1-\alpha,\ 3-\alpha^2-(1-\alpha) > 0)$

   $\Rightarrow (\beta = 1-\alpha,\ \alpha^2-\alpha-2 < 0)$

   $\Rightarrow (\beta = 1-\alpha,\ -1<\alpha<2)$

   $\Rightarrow (\beta = 1-\alpha,\ \alpha=0$ ή $\alpha=1) \Rightarrow (\alpha=0\ \&\ \beta=1)$ ή $(\alpha=1\ \&\ \beta=0)$

2) Να βρεθούν οι εικόνες των μιγαδικών που επαληθεύουν ταυτόχρονα τις ανισώσεις: $z^2+2z-3 \geq 0$ και $2z+3 \leq 0$

   Λύση: Θέτω $z = x+yi$, $x,y \in \mathbb{R}$ και

$z^2+2z-3\geq 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left(x^2-y^2+2x-3\right)+2y\left(x+1\right)i\geq 0$ $\Leftrightarrow x^2-y^2+2x-3\geq 0$ και $2y\left(x+1\right)=0$ $\Leftrightarrow x^2-y^2+2x-3\geq 0$ και y=0 ή x=-1 αν x=-1, $y^2\leq -4$ αδύνατο αν y=0, $x^2-2x-3\geq 0 \Rightarrow x\in(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$	$2z+3\leq 0 \Leftrightarrow \left(2x+3\right)+2yi\leq 0$ με y=0 και $2x+3\leq 0 \Leftrightarrow$ y=0 και $x\leq -\dfrac{3}{2}$ δηλαδή $x\in(-\infty,-\dfrac{3}{2}]$

Συναληθεύοντας έχουμε: $y=0$ και $x\in(-\infty,-3]$, δηλαδή z=x+0i, με $x\in(-\infty,-3]$

Προσοχή, στις ανισώσεις στο $\mathbb{C}$ δεν επιτρέπεται να μεταφέρουμε όρους από το ένα μέρος στο άλλο, γιατί έτσι δεν προκύπτουν ισοδύναμες ανισώσεις, εκτός και αν οι όροι που μεταφέρουμε είναι πραγματικοί αριθμοί

Παράδειγμα 3: Οι ανισώσεις
$z^2-4z+5<0$ (1) και $z^2+5<4z$ (2) , με $z\in\mathbb{C}$ δεν είναι ισοδύναμες

Λύση: Πράγματι έχουμε από (1)
$\left(x^2-y^2-4x+5\right)+\left(2xy-4y\right)i<o \Leftrightarrow x^2-y^2-4x+5<0$ και $2xy-4y=0$
$\Leftrightarrow x^2-y^2-4x+5<0$ και (y=0 ή x=2) $\Leftrightarrow$
για y=0, έχουμε $x^2-4x+5<0$ αδύνατη αφού Δ<0 και
$x=2,\ y^2>1 \Leftrightarrow y\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ δηλαδή z=2+yi, όπου $y\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

Ενώ από την (2) έχουμε
$\left(x^2-y^2+5\right)+2xyi<4x+4yi$,
άρα (2xy=0 και 4y=0 και $x^2-y^2+5<4x$) $\Leftrightarrow$ ($y=0$ και $x^2-4x+5<0$, αδύνατη)

Προσοχή(!) στις αποδείξεις ανισοτήτων μιγαδικών που είναι όμως σε μέτρα, άρα ανισώσεις πραγματικών, όπου χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των διαδοχικών ισοδυναμιών. Αν διαγράψουμε παράγοντες από το ένα και το άλλο μέρος, το άθροισμα αυτών σε κάθε μέλος να είναι πραγματικός έτσι ώστε από ανίσωση πραγματικών να μεταφερόμαστε σε ισοδύναμη ανίσωση πραγματικών, γιατί αλλιώς αν διαγράψουμε μιγαδικό παράγοντα από τα δύο μέλη τότε δημιουργούμε ανίσωση μιγαδικών που δεν έχει νόημα.

<u>Παράδειγμα 4</u>:

Αν $z, w \in \mathbb{C}$ με $|z| < 1$ αλλά και $|w| < 1,$ να δείξετε ότι $|\bar{z} - w| < |1 - zw|$

<u>Λύση</u>: Πράγματι έχουμε:

$$|\bar{z} - w| < |1 - zw| \Leftrightarrow |\bar{z} - w|^2 < |1 - zw|^2 \Leftrightarrow (\bar{z} - w)(z - \bar{w}) < (1 - zw)(1 - \overline{zw}) \Leftrightarrow$$

$$\bar{z}z - \cancel{\overline{zw}} - \cancel{wz} + w\bar{w} < 1 - \cancel{\overline{zw}} - \cancel{zw} + z\bar{z}w\bar{w} \Leftrightarrow -(\overline{zw} + zw) = -2\operatorname{Re}(zw) \in \mathbb{R}$$

και μπορούμε (*) να το διαγράψουμε $\bar{z}z + \bar{w}w < 1 + z\bar{z}w\bar{w} \Leftrightarrow (1 - z\bar{z})(1 - \bar{w}w) < 0 \Leftrightarrow$

$(1 - |z|^2)(|w|^2 - 1) < 0$ που ισχύει.

(*) **Το λάθος θα γινόταν αν κάναμε διαγραφή μόνο του $-\overline{zw}$ και τότε θα είχαμε $(z\bar{z} - wz + w\bar{w}) < (1 - zw + z\bar{z}w\bar{w})$, μιγαδικός<μιγαδικού που δεν έχει νόημα.**