ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

Θέματα επανάληψης

Θέμα 1x4

1. Η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$ είναι συνεχής και ισχύει $\alpha^2 f(\beta)+\beta^2 f(\alpha)=0$. Αν $\alpha\beta\neq 0$ να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[\alpha,\beta]$.

2. Η συνάρτηση $f:[0,1]\to[0,1]$ είναι συνεχής. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f και η ευθεία $\psi=x$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

3. Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύει το θεώρημα του Bolzano στο $[1,2]$ και ισχύουν $f(1)g(2)>0$, $f(2)g(1)>0$, να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$.

4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\alpha^x-\beta^x+x=0$, με $\alpha>1$ και $\beta<1$ έχει ακριβώς μία λύση στο R.

Απάντηση:

Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f : R \to R$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει:

$$f^3(x) - f^2(x) + 6f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + 5x - 8 \text{ για κάθε } x \in R .$$

(i) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία .

(ii) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(2\ln^3 x\right) = f\left(5\ln^2 x - 2\ln x\right)$.

(iii) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) > f\left(2\right)$.

Απάντηση:

Θέμα 3

Η συνάρτηση $f:[1,e]\to[-1,4]$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(1)=2$ και $f(e)=e+1$. Να δείξετε ότι:

1. (i) Υπάρχουν $x_1,x_2\in(1,e)$ με $x_1\neq x_2$ τέτοια ώστε $f'(x_1)=f'(x_2)=0$.
   (ii) Υπάρχει $\xi\in(1,e)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.
   (iii) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(1,e)$ τέτοιο ώστε: $f(x_o)\left[f'(x_o)-2f^2(x_o)\right]=x_o$.

2. (i) Η ευθεία $\varepsilon: x+\psi=e+2$ τέμνει την C_f σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $c_o\in(1,e)$
   (ii) Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,e)$ με $\xi_1\neq\xi_2$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=1$.

<u>Απάντηση:</u>

Θέμα 4x4

1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,3]$ και για κάθε $x \in [1,3]$ ισχύει $x^2 f(x) - f\left(\dfrac{3}{x}\right) = 3x^4$. Να αποδείξετε ότι: $\int_1^3 f(x)dx = 39$.

2. Η συνάρτηση $f : R \to R$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει:

$$\int_{x^2-x}^{x+3} f(t)dt \geq x^2 - 2x - 3 \text{ για κάθε } x \in R.$$

(i) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $g(x) = \int_{x^2-x}^{x+3} f(t)dt$, $x \in R$.

(ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (2,6)$ ώστε $f'(\xi) = 0$.

3. Οι συναρτήσεις $f, g : R \to R$ είναι συνεχείς και $\int_0^2 f(x)dx = 12 + \int_0^2 g(x)dx$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = g(\xi) + 3\xi^2 + 2$.

4. Η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to R$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f''(x) = 2\ell nx$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Απάντηση:

Θέμα 5x2

Α. Η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι συνεχής και για κάθε $x\in R$ ισχύει:

$$\left(f(x)-x^2\right)\left(f(x)+x^2\right)=2x^2+1.$$

(i) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ είναι αδύνατη.

(ii) Να βρείτε τον τύπο της f αν $f(2000)=4(-10)^6+1$.

Β. Η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι συνεχής και ισχύουν:

- $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$.
- $f(2002)=\dfrac{1}{2}$
- $f(2003)=2002$ και
- $\dfrac{f\left(f(x)+1\right)}{f\left(f(x)+2\right)}=\dfrac{f\left(f(x)+3\right)}{f\left(f(x)\right)}$.

Να δείξετε ότι

(i) $f(1)f(2)=f(3)f(4)$

(ii) Υπάρχει $x_1\in[1,2]$, ώστε $f^2(x_1)=f(1)f(2)$

(iii) Η f δεν είναι $1-1$.

Απάντηση:

Θέμα 6

Η συνάρτηση $f:[0,2]\to R$ είναι παραγωγίσιμη με $f(0)\neq f(2)$.

Α. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\dfrac{2f(0)+3f(2)}{5}$.

Β. Αν $\xi=1$ να δείξετε ότι:

(i) υπάρχουν $x_1,x_2\in(0,2)$ με $x_1<x_2$ ώστε $2f'(x_1)=3f'(x_2)$

(ii) Αν για την συνάρτηση $g(x)=f(x)+\alpha x^2+\beta x$ εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle στα διαστήματα $[0,1]$ και $[1,2]$, να βρείτε τους $\alpha,\beta\in R$.

(iii) Να δείξετε ότι υπάρχει $\rho\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $5f''(\xi)=f(0)-f(2)$.

Απάντηση:

\

Θέμα 7

Οι συναρτήσεις f και g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο $\Delta = [\alpha, \beta]$ με $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ και ο μιγαδικός $z = \dfrac{f(\alpha) + i f(\beta)}{g(\alpha) + i g(\beta)}$ είναι πραγματικός. Να αποδείξετε ότι:

(i) $f(\alpha) g(\beta) = f(\beta) g(\alpha)$.

(ii) $f(\alpha) f(\beta) \geq 0$.

(iii) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_o) g(x_o) = f(x_o) g'(x_o)$.

(iv) Αν ισχύουν $f''(x) g(x) = f(x) g''(x)$ για κάθε $x \in \Delta$ και $f(1) = g(1) + 1 = 2$, τότε $f(x) = 2g(x)$.

Απάντηση:

Θέμα 8

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο R, τέτοιες ώστε για κάθε $x \in R$ ισχύει:

$$\int_1^x f(t)dt + \int_x^1 g(t)dt = x^2 - 2x + 1.$$

Δίνεται επίσης ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο λύσεις ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 < 1 < \rho_2$.

Α. Να δείξετε ότι:

(i) Η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (ρ_1, ρ_2).

(ii) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = -2$.

(iii) Η συνάρτηση f έχει ένα μόνο ελάχιστο στο σημείο ξ του παραπάνω ερωτήματος.

Β. Αν η συνάρτηση g είναι κυρτή στο R, τότε και η f είναι κυρτή στο R.

Γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g και τον άξονα $\psi\psi'$.

Απάντηση:

Θέμα 9

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει:

$$\int_{1}^{f(x)} \left(3t^2+1\right)dt = x \text{, για κάθε } x \in R .$$

(i) Να αποδείξετε ότι:

α. Η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη f^{-1}.

β. Η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής το οποίο και να βρείτε

γ. Αν $0 \le \alpha < \beta$, τότε $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$.

(ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τους άξονες xx' και $\psi\psi'$.

Απάντηση:

Θέμα 10x2

Α. Οι συναρτήσεις $f, g : R \to R$ είναι συνεχείς και $\int_0^2 f(x)dx = 12 + \int_0^2 g(x)dx$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = g(\xi) + 3\xi^2 + 2$.

Β. Η συνάρτηση $f : (0,+\infty) \to R$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f''(x) = 2\ell nx$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

(i) Να βρείτε τον τύπο της f αν γνωρίζετε ότι η C_f έχει στο σημείο $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$ οριζόντια εφαπτομένη.

(ii) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

Απάντηση: