

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

Εμβαδά

Θέμα 1

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^x - e, & x < 1 \\ \frac{\sqrt{\ln x}}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα xx' και τις ευθείες $x = 0$, $x = e$.

Απάντηση:

Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$.

(i) Να βρείτε το πρόσημο της f .

(ii) Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(iii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα xx' και τις ευθείες $x = 1$, $x = 4$.

Απάντηση:

Θέμα 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x + 1}{1 - x^2}$.

(i) Να βρεθεί ο $\alpha \in \mathbf{R}$ ώστε $f'(0) = 2f(0)$.

(ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα xx' και τις ευθείες $x = 2$, $x = 4$.

Απάντηση:

Θέμα 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu^5 x \cdot \sigma\upsilon\nu^4 x$ και $g(x) = -\eta\mu^3 x \cdot \sigma\upsilon\nu^6 x$.

Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f , C_g , τον άξονα $\psi\psi'$

και την ευθεία $x = \frac{\pi}{2}$.

Απάντηση:

Θέμα 5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x+9}{(2x+3)^2}$.

(i) Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά.

(ii) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(0, f(0))$.

(iii) Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε: $f(x) = \frac{\alpha}{2x+3} + \frac{\beta}{(2x+3)^2}$.

(iv) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f , την εφαπτομένη στο A , τον άξονα xx' και την ευθεία $x = 2$.

Απάντηση:

Θέμα 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2|x|e^{-|x|}$.

(i) Να βρεθούν τα ακρότατα της f .

(ii) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τις εφαπτόμενες στα σημεία των ακρότατων.

Απάντηση:

Θέμα 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + \frac{8}{x^2}$, $x \neq 0$.

(i) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα xx' και τις ευθείες $x = 2$, $x = 4$.

(ii) Να βρείτε την ευθεία $\varepsilon: \psi = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ που χωρίζει το χωρίο σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

Τι είναι για την C_f η ευθεία ε ;

Απάντηση:

Θέμα 8

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^4 + 4x^2 + 4}$ και έστω Ω το χωρίο που περικλείεται από την C_f , τον άξονα xx' και τις ευθείες $x = 0$, $x = 4$. Να βρείτε την κατακόρυφη ευθεία που χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισοεμβαδικά χωρία.

Απάντηση:

Θέμα 9

(i) Να βρεθεί το εμβαδόν $E(t)$ του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = e^{-x}$ τους άξονες xx' , yy' και την ευθεία $x = t$, ($t > 0$).

(ii) Να βρεθεί το $\lim_{t \rightarrow +\infty} E(t)$.

Απάντηση:

Θέμα 10

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x(2\ln x - 1), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

- (i) Να μελετηθεί η f ως προς την συνέχεια, την παραγωγισιμότητα, να γίνει ο πίνακας μεταβολών της f και η γραφική της παράσταση.
- (ii) Να υπολογιστεί το εμβαδόν $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τις ευθείες $\psi = x$, $x = \alpha$ και $x = e$, με $0 < \alpha < e$.
- (iii) Να βρεθεί το όριο $\lim_{\alpha \rightarrow 0} E(\alpha)$. Τι εκφράζει αυτό το όριο;

Απάντηση:

Θέμα 11

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{\ln x}{x}$ και $g(x) = \frac{x}{2}$.

(i) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από τις C_f , C_g και τις ευθείες $x = 1$, $x = \alpha$ με $\alpha > 1$.

(ii) Να βρείτε το όριο $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{E(\alpha)}{\alpha^2}$.

Απάντηση:

Θέμα 12

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ x \ln(x+1), & x \geq 0 \end{cases}$.

(i) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

(ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f και $C_{f^{-1}}$.

Απάντηση:

Θέμα 13

Δίνεται η συνάρτηση η συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \int_1^x \frac{tf(t)}{x^2} dt, \quad x \in (0, +\infty).$$

(i) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

(ii) Να δείξετε ότι: $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

(iii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες και το σύνολο τιμών της f .

(iv) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα xx' και τις ευθείες $x = 1$, $x = e$.

Απάντηση: