ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

Συνάρτηση ολοκλήρωμα

Θέμα 1

Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο των συναρτήσεων.

(i) $f(x)=\int_1^{\sqrt{x}} e^t\sqrt{9-t^2}\,dt$ **(ii)** $f(x)=\int_1^{\sqrt{x+1}} \frac{1}{\ell nt}\,dt$ **(iii)** $f(x)=\int_3^{\ell nx} \sqrt{25-t^2}\,dt$

(iv) $f(x)=\int_{3x}^{x^2} \frac{\ell nt}{t-1}\,dt$ **(v)** $f(x)=\int_{2-x}^{\ell nx} \sqrt{t-4}\,dt$ **.**

<u>Απάντηση:</u>

Θέμα 2

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$G(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt & ,\ x>0 \\ f(0) & ,\ x=0 \end{cases}.$$

Να δείξετε ότι

(i) Η G είναι συνεχής.

(ii) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$ τότε η G είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$.

Απάντηση:

Θέμα 3

1.Αν η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι συνεχής και για κάθε $x\in R$ ισχύει :

$x+\int_{0}^{2x} f(t)dt = x\eta\mu x$, να δείξετε ότι $f(\pi)=0$.

2.Η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι συνεχής. Αν $g(x)=\int_{2012}^{x^2+2} f(t)dt$ και $g'(1)=6$ να βρείτε το $f(3)$.

<u>Απάντηση:</u>

Θέμα 4

Η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)>0$ για κάθε $x\in R$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση

$$F(x)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x-t)dt,\ x\in R\ \ (\alpha,\beta\in R)$$

είναι παραγωγίσιμη και ότι αν υπάρχει $x_o\in R$ με $F'(x_o)=0$ τότε $F(x)=0$ για κάθε $x\in R$.

Απάντηση:

Θέμα 5

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\int_0^x (x-t)f(t)dt$.

(i) Να βρείτε την παράγωγο της g.

(ii) Να δείξετε ότι η g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Απάντηση:

Θέμα 6

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και ισχύουν:

$$f(1)=5\alpha+6,\ \lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{x^2\ell nx}\int_1^x \big(f(t)-\alpha\big)dt\right]=2.$$

Να βρείτε την τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$.

Απάντηση:

Θέμα 7

1. Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύει:

$$xf(x)-\int_1^x f(t)dt=\ell nx+2\text{, για κάθε } x\in(0,+\infty).$$

2. Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση $f:(-1,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύει:

$$3x+\int_0^x f(t)dt=(1+x)f(x)\text{, για κάθε } x\in[0,+\infty).$$

Απάντηση:

Θέμα 8

Η συνάρτηση $f:(-1,+\infty)\to R$ είναι συνεχής και για κάθε $x\in(-1,+\infty)$ ισχύει

$$2\int_0^x f(t)dt - 3\ell n(x+1) \ge x^2 + \alpha x .$$

Αν η C_f τέμνει τον άξονα $\psi\psi'$ στο σημείο $M(0,5)$ να δείξετε ότι $\alpha = 7$.

Απάντηση:

Θέμα 9

Η συνάρτηση $f:R \to R$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\int_{x^2-x}^{x+3} f(t)dt \le x^2 - 2x - 3.$$

(i) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης

$$g(x) = \int_{x^2-x}^{x+3} f(t)dt.$$

(ii) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (2,6)$ τέτοιο ώστε:
$f'(\xi) = 0$.

<u>Απάντηση:</u>

Θέμα 10

Η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to \mathbb{R}$ είναι συνεχής με $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = 0$, $0<\alpha<\beta$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = 2+\frac{1}{x}\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$, $x\in(0,+\infty)$.

Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (\alpha,\beta)$ ώστε:

(i) Η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $A\left(x_o, g(x_o)\right)$ να είναι παράλληλη στον άξονα xx'.

(ii) $g(x_o) = 2+f(x_o)$.

Απάντηση:

Θέμα 11

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση δικαιολογώντας την επιλογή σας

1. Αν $f(x)=\int_{\sigma\upsilon\nu x}^{0}\frac{dt}{2+t}$**,** η παράγωγος $f'(x)$ είναι

Α. $\frac{1}{2+\sigma\upsilon\nu x}$ Β. $\frac{1}{2-\sigma\upsilon\nu x}$ Γ. $\frac{\eta\mu x}{2+\sigma\upsilon\nu x}$ Δ. $-\frac{\eta\mu x}{2+\sigma\upsilon\nu x}$ Ε. $-\frac{\sigma\upsilon\nu x}{2+\eta\mu x}$.

2. Αν $f(x)=\int_{1}^{e^{3x}}\ell n t dt$**, τότε το** $f'\left(\frac{1}{3}\right)$ **είναι**

Α. e Β. 2e Γ. 3e Δ. 4e Ε. 5e.

3. Το όριο $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\eta\mu x}\int_{0}^{x}te^{t}dt\right)$ είναι ίσο με

Α. -1 Β. $-\frac{1}{2}$ Γ. 0 Δ. $\frac{1}{2}$ Ε. 1.

4. Αν $f(x)=\int_{\ell n(x^2+1)}^{\ell n(x^3+2)}e^{u}du$**,** τότε το $f'(2)$ είναι

Α. 6 Β. 7 Γ. 8 Δ. 9 Ε. 10.

5. Η παράγωγος $\frac{d}{dx}\left(\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\ell n(\eta\mu x)dx+\int_{x}^{2x}\left(t^2+t\right)dt\right)$ είναι ίση με

Α. $3x^2-7x$ Β. x^2+7x Γ. $7x^2+3x$ Δ. x^2+5x Ε. $-x^2$.

Απάντηση: