ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

Τρόποι ολοκλήρωσης-Θεμελειώδες θεώρημα

Θέμα 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x+1}{x}, & x>1\\ \dfrac{2x}{x^2+1}, & x\le 1\end{cases}$. Να αποδειχθεί ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[-1,3]$ και να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I=\int_{-1}^{3} f(x)dx\ .$$

Απάντηση:

Θέμα 2

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

(i) $\int_0^2\left[\int_1^3\left(\int_2^4 x\psi\omega d\omega\right)d\psi\right]dx$ (ii) $\int_2^5\left[\int_1^4(6x+2\psi)d\psi\right]dx$

(iii) $\int_{-2}^2\left[\int_0^{\ln 3}(3\psi^2+1)e^x dx\right]d\psi$ (iv) $\int_1^2\left[\int_2^x\left(\int_1^{\psi}(6x+5\psi+2\omega)d\omega\right)d\psi\right]dx$.

Απάντηση:

Θέμα 3

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

(i) $\int_0^1 (2x+1)e^x dx$ (ii) $\int_1^2 \ln^2 x dx$ (iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sigma\upsilon\nu x dx$ (iv) $\int_1^e x^2 \ln x dx$.

<u>Απάντηση:</u>

Θέμα 4
Σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις να σημειώσετε τη σωστή απάντηση, αιτιολογώντας την επιλογή σας.

1.Αν $f(x)=x+1$**,** το ολοκλήρωμα $\int_0^3 2f(x)df(x)$ είναι ίσο με

Α. 10 Β. 12 Γ. 13 Δ. 15 Ε. 16.

2. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f:R\to R$, το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{2}\frac{3x^2f(x)-x^3f'(x)}{f^2(x)}dx$ είναι ίσο με

Α. 1 Β. $\frac{1}{2}$ Γ. $\frac{3}{2}$ Δ. 2 Ε. $\frac{5}{2}$.

3. Αν $\alpha>0$ και $\int_{-\alpha}^{0}\frac{(\alpha+2x)^2}{\alpha}dx=27$, τότε το α είναι ίσο με

Α. 7 Β. 8 Γ. 9 Δ. 10 Ε. 11.

4. Το ολοκλήρωμα $\int_1^2\frac{dx}{x^2+x}$ είναι ίσο με

Α. $\ell n\frac{3}{2}$ Β. $\ell n\frac{4}{3}$ Γ. $\ell n\frac{5}{2}$ Δ. $\ell n3$ Ε. $\ell n4$.

Απάντηση:

Θέμα 5

Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο.

(i) Αν $\int_0^2 \left[f(x)+xf'(x)\right]dx = 6$, να βρεθεί η τιμή $f(2)$.

(ii) Αν $3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x)+f''(x)\right]\sigma\upsilon\nu x\,dx = 3$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, να βρεθεί η κλίση της εφαπτομένης της $\mathbf{C_f}$ στο σημείο $M\left(0,f(0)\right)$.

Απάντηση:

Θέμα 6

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

(i) $\int_{0}^{1} \mathbf{x(3x^2+1)^5dx}$ (ii) $\int_{-3}^{-1} \mathbf{(2x-1)^2(x+2)^6dx}$ (iii) $\int_{-1}^{0} \mathbf{x^3\sqrt{x^4+8}\ dx}$

(iv) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \mathbf{συν^3xημxdx}$ (v) $\int_{e}^{e^2} \mathbf{\frac{1}{xln^3x}dx}$ (vi) $\int_{0}^{3} \mathbf{\frac{3x^2}{\sqrt{1+x}}dx}$.

<u>Απάντηση:</u>

Θέμα 7

i) Να βρεθούν οι $\alpha,\beta,\gamma \in R$ ώστε:

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{x-1}+\frac{\gamma}{(x-1)^2},\ x\neq 0,1.$$

(ii) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\mathbf{I}=\int_2^4 \frac{x^4-x^3-x^2+x+1}{x^3-2x^2+x}dx$.

Απάντηση:

Θέμα 8

(i) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,5]$, να αποδειχθεί ότι:

$$\int_0^5 f(5-x)dx=\int_0^5 f(x)dx\ .$$

(ii) Αν $\alpha,\beta>0$, να αποδειχθεί ότι: $\int_0^5 x^{\alpha}(5-x)^{\beta}dx=\int_0^5 x^{\beta}(5-x)^{\alpha}dx$.

Απάντηση:

Θέμα 9
Σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις να σημειώσετε τη σωστή απάντηση, αιτιολογώντας την επιλογή σας.

1.Το ολοκλήρωμα $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+x}$ είναι ίσο με

Α. $-\frac{1}{2}$ Β. 0 Γ. $\frac{1}{2}$ Δ. $\frac{3}{2}$ Ε. $\frac{7}{4}$.

2.Αν $\int_0^1 \frac{x^\alpha}{x^\beta}dx = \frac{\int_0^1 x^\alpha dx}{\int_0^1 x^\beta dx}$, $\beta \neq 0$ τότε η διαφορά $\alpha-\beta$ είναι:

Α. -1 Β. 0 Γ. 1 Δ. 2 Ε. 3.

3.Το ολοκλήρωμα $\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx$ είναι ίσο με

Α. $\frac{4}{3}$ Β. $\frac{7}{3}$ Γ. 3 Δ. $\frac{11}{3}$ Ε. 4.

4. Το ολοκλήρωμα $\int_3^4 \frac{x^2+4x+4}{x^2-3x+2}dx$ είναι ίσο με

Α. $1+25\ell n2-9\ell n3$ Β. $\ell n2+\ell n3$ Γ. $\ell n2-\ell n3$ Δ. $25\ell n2-9\ell n3$ Ε. 0.

5. Το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1-\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x+1}\right)dx$ είναι ίσο με

Α. 0 Β. $\frac{\pi}{3}$ Γ. $\ell n\frac{3}{2}$ Δ. $\frac{\pi}{3}\cdot\ell n\frac{3}{2}$ Ε. $\frac{\pi}{3}+\ell n\frac{3}{4}$.

6. Το ολοκλήρωμα $\int_0^{\ell n8} \left[\frac{d}{d\psi}\left(\int_1^{2\psi} e^{2x}dx\right)\right]d\psi$ είναι ίσο με

Α. 2^6 Β. $\frac{2^{12}-1}{2}$ Γ. 2^{11} Δ. 2^{12} Ε. $2^{12}+1$.

7. Το ολοκλήρωμα $\int_0^{\ell n2} \frac{e^t}{e^{2t}+3e^t+2}dx$ είναι ίσο με

Α. $\ell n\frac{9}{8}$ Β. 1 Γ. $\ell n\frac{4}{5}$ Δ. $\ell n2$ Ε. $\ell n3$.

8. Το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^4 4x(x+1)^3dx$ είναι ίσο με

Α. 1875 Β. 1925 Γ. 1955 Δ. 1985 Ε. 1991.

Απάντηση:

Θέμα 10

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα.

(i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\eta\mu^3 x}{1+\sigma\upsilon\nu x}dx$ **(ii)** $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{\ell nx \cdot \ell n(\ell nx)}{x}dx$ **(iii)** $\displaystyle\int_1^{2} e^{x^3+2\ell nx}dx$

(iv) $\displaystyle\int_1^{4} \ell n\left(\frac{5-x}{2x}\right)dx$ **(v)** $\displaystyle\int_1^{\pi^2} \eta\mu\sqrt{x}dx$ **(vi)** $\displaystyle\int_e^{e^2} \eta\mu\left(\ell nx\right)dx$.

Απάντηση:

\

Θέμα 11

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{(x-3)^2}{x-2}$, $x\in(2,+\infty)$.

(i) Να δείξετε ότι $f(x)=x-4+\frac{1}{x-2}$.

(ii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_3^4 f(x)dx$.

<u>Απάντηση:</u>

Θέμα 12

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα.

(i) $I=\int \frac{3x-2}{x^3+x^2-4x-4}dx$ **(ii)** $I=\int \frac{1}{x(x-1)^2}dx$

(iii) $I=\int \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt{x+1}}dx$.

Απάντηση:

Θέμα 13

Έστω $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{ημx}{ημx+συνx}dx$ και $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{συνx}{ημx+συνx}dx$.

(i) Να δείξετε ότι $I=J$

(ii) Να υπολογίσετε τα I και J .

Απάντηση:

Θέμα 14

(i) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ισχύει $f(x)=f(\alpha+\beta-x)$.Να δείξετε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx=\frac{\alpha+\beta}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx .$$

(ii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{0}^{\pi} x\eta\mu x\sigma\upsilon\nu^{2}x dx$.

Απάντηση:

Θέμα 15

Έστω f συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι:

(i) $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(-x)dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx$.

(ii) Αν $\alpha f(x)+\beta f(-x)=xe^{-x}$ με $\alpha+\beta\neq 0$ τότε $\int_{-1}^{1} f(x)dx = -\frac{2}{e(\alpha+\beta)}$.

Απάντηση:

Θέμα 16

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$ με $f(x)>0$ για κάθε $x\in[0,1]$. Να δείξετε ότι

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}dx=\frac{1}{2}.$$

Απάντηση:

Θέμα 17

(i) Να δείξετε ότι $\int_0^\alpha x^2(\alpha-x)^\nu dx = \int_0^\alpha x^\nu(\alpha-x)^2 dx$.

(ii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 x^2(1-x)^{2012} dx$.

<u>Απάντηση:</u>

Θέμα 18

Αν $I_\nu = \int_1^e x\left(\ell nx\right)^\nu dx$, $\nu \in N$ να δείξετε ότι για κάθε $\nu \in N^*$ ισχύει:

$$2I_\nu + \nu I_{\nu-1} = e^2$$

Κατόπιν να υπολογίσετε το I_3.

Απάντηση:

Θέμα 19

Να δείξετε ότι

$$\int_0^{\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^{\pi}(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu\psi)\,dt\right)d\psi\right)dx=2\pi^2.$$

Απάντηση:

Θέμα 20

(i) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $E(t)=\int_1^t (x-2)\ell n x dx$, για κάθε $t>1$.

(ii) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{E'(t)}{t\ell n t}$.

Απάντηση:

Θέμα 21

(i) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I(x)=\int_x^0 e^t\left(2t^2-3t\right)dt$.

(ii) Να υπολογίσετε το όριο $L=\lim_{x\to-\infty} I(x)$.

Απάντηση: