ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ’ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

Παράγουσα συνάρτησης

Θέμα 1

1. Η συνάρτηση F είναι μια παράγουσα της f στο R. Αν η συνάρτηση F δεν είναι $1-1$ να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in R$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$.

2. Η συνάρτηση F είναι μία παράγουσα της f στο R και για κάθε $x \in R$ ισχύει: $F(x)F(1-x)=f(x^2)$. Να δείξετε ότι $F(1)=0$.

Απάντηση:

Θέμα 2

1. Η συνάρτηση F είναι μια παράγουσα στο R της f και για κάθε $x \in R$ ισχύει $f(x) = (2x+1)e^{x^2+x-F(x)}$. Αν $f(1) = 3$, να βρείτε την συνάρτηση f.

2. Να βρείτε την συνάρτηση $f : R \to R$ με παράγουσα την F, όταν ισχύουν:
$f(0) = 1$ και $f(x)F(x) = -e^{-2x}$ για κάθε $x \in R$.

Απάντηση:

Θέμα 3

Έστω $f : R \to R$ συνεχής συνάρτηση και F μία αρχική της για την οποία ισχύει:
$F^2(x) + \alpha^2 \le 2\alpha F(x^2)$ για κάθε $x \in R$.
Να δείξετε ότι:
(i) $F(0) = F(1) = \alpha$.
(ii) Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

Απάντηση:

Θέμα 4

Η συνάρτηση $f : R \to R$ με $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$ έχει αρχική συνάρτηση την F και για κάθε $x \in R$ ισχύει: $f(x)F(1-x)=1$.

Να δείξετε ότι:

(i) $F(x)\cdot f(1-x)=1$

(ii) $\left(F(x)\cdot F(1-x)\right)'=0$

(iii) $F\left(\frac{1}{2}\right)=1$

(iv) $F(x)F(1-x)=1$

(v) $F(x)=f(x),\ x \in R$

(vi) $F(x)=e^{x-\frac{1}{2}},\ x \in R$.

Απάντηση:

Θέμα 5

Η συνάρτηση $g:(0,\pi)\to R$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in(0,\pi)$ ισχύει $\left[g'(x)-g(x)\right]ημx+g(x)συνx=0$.

Αν $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ να βρεθεί ο τύπος της g.

Απάντηση:

Θέμα 6

(i) Να βρείτε την οικογένεια των καμπυλών C_f οι οποίες σε κάθε σημείο της γραφικής τους παράστασης $M\left(x_o, f(x_o)\right)$ δέχονται εφαπτομένη με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=e^{x_o}-e^{-x_o}$.

(ii) Ποια από τις παραπάνω καμπύλες διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Απάντηση:

Θέμα 7

1. Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R^*$ αν η εφαπτομένη της C_f στο τυχαίο σημείο της $M(x, f(x))$ έχει κλίση $\dfrac{e^{2x}}{f(x)}$ και το σημείο $A(0,1)$ ανήκει στην C_f.

2. Να βρείτε την συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to R$ αν η γραφική παράσταση της f έχει ασύμπτωτη την ευθεία $\varepsilon: \psi = 3x + 4$ και για κάθε $x \in (0,+\infty)$ ισχύει: $f''(x) = \dfrac{4}{x^3}$.

Απάντηση:

Θέμα 8

Για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν:

- $f''(x) = g''(x)$ για κάθε $x \in R$.
- Οι C_f, C_g τέμνουν τον άξονα $\psi\psi'$ στο ίδιο σημείο.
- $f'(1) - g'(1) = -5$.

Να δείξετε ότι

(i) $f(x) = g(x) - 5x$ για κάθε $x \in R$.

(ii) Αν ρ_1, ρ_2 είναι ρίζες ετερόσημες της $g(x)$ τότε υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$.

Απάντηση:

Θέμα 9

Να βρείτε την συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύουν:
$f''(x)=\dfrac{2-2\ell nx}{x^2}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, η C_f διέρχεται από το σημείο $A(1,5)$ και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A\left(,f(1)\right)$ έχει κλίση 3.

Απάντηση:

Θέμα 10

(i) Να βρεθεί η συνάρτηση $f:R \to R$ για την οποία ισχύει: $f'(x) = \lambda \cdot f(x)$ για κάθε $x \in R$, $(\lambda \in R^*)$.

(ii) Έστω $Q(t)$ είναι ο αριθμός των βακτηριδίων σ' έναν οργανισμό, όπου t ο χρόνος σε λεπτά. Ο ρυθμός αύξησης των βακτηριδίων δίνεται από τη σχέση $Q'(t) = 3Q(t)$ και την χρονική στιγμή $t = 0$ υπάρχουν 10 βακτηρίδια να βρείτε τον αριθμό των βακτηριδίων μετά από 90 sec.

Απάντηση: