

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

Κυρτότητα-Ασύμπτωτες-Θεωρήματα D'Hospital-Μελέτη συνάρτησης

Θέμα 1

Η g είναι μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} για την οποία ισχύει:

$$2g(x^3) - g^2(x) \geq 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι :

α) Η $g'(x) = 0$ έχει 2 ρίζες στο $(-1,1)$. β) $g'(-1) = g'(0) = g'(1)$

γ) Η g έχει 4 πιθανά σημεία καμπής στο $(-1,1)$.

Απάντηση:

Θέμα 2

Η παραγωγίσιμη συνάρτηση f ικανοποιεί τη σχέση: $e^{f(x)} + f(x) = x + 1$,

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

β) Να μελετηθεί ως προς τα κοίλα

γ) Αν $f(0) = 0$, να δείξετε ότι: $xf'(x) < f(x) < \frac{x}{2}$, για κάθε $x > 0$.

Απάντηση:

Θέμα 3

Δίνεται η παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x) + f(x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = e + 1$.

α) Να βρείτε το όριο $\lim_{y \rightarrow +\infty} (\lim_{x \rightarrow 2} f(xy))$

β) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο \mathbb{R} .

Απάντηση:

Θέμα 4

Σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις να σημειώσετε τη σωστή απάντηση, αιτιολογώντας την επιλογή σας.

1. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{|x|}$ είναι κυρτή στο \mathbb{R}^* .

2. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή (κοίλη) σ' ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «**κάτω**» (αντίστοιχα «**πάνω**») από την γραφική παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής.

3. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή (κοίλη) σ' ένα διάστημα Δ και x_0 είναι ένα σημείο του Δ , τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει η ανισότητα:

$$f(x) - xf'(x_0) > f(x_0) - x_0f'(x_0) \quad (f(x) - xf'(x_0) < f(x_0) - x_0f'(x_0)).$$

4. Αν $f''(x) = 2\eta\mu x + 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση f είναι κυρτή.

5. Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και είναι κυρτή (κοίλη) στο διάστημα Δ , τότε $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$), για κάθε $x \in \Delta$.

Απάντηση:

Θέμα 5

Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη, $f'(0) = f''(0) = 0$ και $f'''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι:

- (i) Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$ και κυρτή $[0, +\infty)$.
- (ii) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Απάντηση:

Θέμα 6

Αποδείξτε ότι η γραφ. παράσταση της συνάρτησης f για την οποία ισχύει $(x-2)^4 f(x) \geq 2x+1$, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{2\}$, έχει μία τουλάχιστον κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Απάντηση:

Θέμα 7

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[α,β]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(α,β)$.
Αν υπάρχει $γ ∈ (α,β)$ ώστε $f(γ) = 0$ και η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $[α,β]$, να
δείξετε ότι: $\frac{f(α)}{γ-α} + \frac{f(β)}{β-γ} < 0$.

Απάντηση:

Θέμα 8

(i) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω.

Να δείξετε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει: $f(x_1) + f(x_2) > 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$.

(ii) Να δείξετε ότι για κάθε $a \in \mathbf{R}^*$ και $v \in \mathbf{N}$, $v \geq 2$ ισχύει:

$$(e^a + 2)^v + (e^{-a} + 2)^v > 2 \cdot 3^v.$$

(iii) Να δείξετε ότι $100^{100} + 200^{200} > 2 \cdot 150^{150}$.

Απάντηση:

Θέμα 9

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = x \ln x$. Να δείξετε ότι:

(i) Η f στρέφει τα κοίλα κάτω και η g στρέφει τα κοίλα πάνω στο $(0, +\infty)$.

(ii) Η C_f , C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο.

(iii) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει: $\ln x \leq x - 1 \leq x \ln x$.

Απάντηση:

Θέμα 10

(i) Η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και για το εσωτερικό σημείο $x_0 \in \Delta$ ισχύουν $f''(x_0) = 0$ και $f^{(3)}(x_0) < 0$. Να δείξετε ότι το x_0 είναι θέση σημείου καμπής της f .

(ii) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τρεις φορές παραγωγίσιμη και περιττή. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f''(x) + x^2 f'(x) = x^2 - \eta \mu x$.

Να δείξετε ότι η C_f έχει σημείο καμπής το $O(0,0)$.

Απάντηση:

Θέμα 11

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{3\}$ και ισχύουν:

(i) $f(0) = 5, f(4) = 6$.

(ii) $f'(2) = 0, f'(4) = 0, f'(3) = 4$.

(iii) $f''(x) > 0$, αν $x \in (-\infty, 3)$ και $f''(x) < 0$ αν $x \in (3, +\infty)$.

(iv) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

α) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα και τα σημεία καμπής της f .

β) Να κάνετε μία πρόχειρη γραφική παράσταση της f .

Απάντηση:

Θέμα 12

(i) Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο. Να δείξετε

ότι: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - f(x-3h)}{5h} = f'(x)$.

(ii) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης: $g(x) = x^{\sin x}$.

(iii) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\pi + 2h)^{\sin(\pi+2h)} - (\pi - 3h)^{\sin(\pi-3h)}}{h}$.

Απάντηση:

Θέμα 13

Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ αν το σημείο $M(\alpha, \beta)$ βρίσκεται στην γραφική παράσταση

της συνάρτησης $f(x) = \ln x^x$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - \sin \alpha x}{e^{\beta x} - \sin \beta x} = 2$.

Απάντηση:

Θέμα 14

Σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις να σημειώσετε τη σωστή απάντηση, αιτιολογώντας την επιλογή σας.

1. Το όριο $\lim_{x \rightarrow \psi} \frac{x^3 - x\psi^2 - x^2\psi + \psi^3}{x^3 + x^2\psi - 5x\psi^2 + 3\psi^3}$ είναι ίσο με

A. $\frac{1}{2}$ B. 1 Γ. $\frac{3}{2}$ Δ. $\frac{5}{2}$ E. 6.

2. Το όριο $\lim_{x \rightarrow \psi} \frac{(x - \psi)^2}{1 - \sin(x - \psi)}$ είναι ίσο με

A. -2 B. -1 Γ. 0 Δ. 1 E. 2.

3. Το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \epsilon\phi 3x}{\eta\mu 7x}$ είναι ίσο με

A. $-\frac{1}{7}$ B. 0 Γ. $\frac{1}{7}$ Δ. 1 E. 7.

4. Το όριο $\lim_{a \rightarrow x} \frac{\epsilon\phi(x - a)}{4x^2 - 4a^2}$ είναι ίσο με

A. 8x B. 16x Γ. 0 Δ. $\frac{1}{8x}$ E. $\frac{1}{16x}$.

5. Το όριο $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \left(\frac{1}{\sin 5x} - \epsilon\phi x \right)$ είναι ίσο με

A. 1 B. 2 Γ. e Δ. $+\infty$ E. $-\infty$.

6. Το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{x} \cdot \epsilon\phi \frac{\pi x}{2} \right)$ είναι ίσο με

A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi^2}{2}$ Γ. e^2 Δ. π^4 E. $+\infty$.

7. Το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sin x - 1)}{\eta\mu x - x}$ είναι ίσο με

A. -2 B. -1 Γ. 1 Δ. 2 E. 3.

Απάντηση:

Θέμα 15

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{9x^2 + 1}{x + 1} \text{ και } g(x) = (a - 1)\ln x - \beta x^2 - x - 5.$$

Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $A(2, g(2))$ να είναι παράλληλη στην πλάγια ασύμπτωτη της C_f και η g να παρουσιάζει καμπή στο σημείο $x_0 = 1$.

Απάντηση:

Θέμα 16

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 3}{x^2 - 2} + ax - \beta$.

(i) Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

(ii) Για τις τιμές των α, β που βρήκατε στο ερώτημα (i) να βρείτε όλες τις ασύμπτωτες της C_f .

Απάντηση:

Θέμα 17

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $\varepsilon : 5x - y + 1 = 0$. Να βρείτε το όριο

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 f(x) - 5x^3 - x^2 - \sqrt{x^4 + x^2 + 1}}{xf(x) - 4x^2 + x^3} \eta \mu \frac{2}{x}.$$

Απάντηση:

Θέμα 18

Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{\alpha x^4}{(\beta x + \gamma)^3}$, $\beta \neq 0$ έχει πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $\varepsilon : \psi = 2x + 6$, να δείξετε ότι $f(x) = \frac{2x^4}{(x-1)^3}$.

Απάντηση:

Θέμα 19

- (i) Να βρείτε την συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(1) = 1$, $f(-1) = 2$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει $f'(x) = \frac{1}{x}$.
- (ii) Να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Απάντηση:

Θέμα 20

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x (x^2 - 15)$.

- (i) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα τα κοίλα και τα σημεία καμπής.
- (ii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .
- (iii) Να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Απάντηση: