ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

Θεώρημα Rolle-ΘΜΤ

« Η θέα από το Θ.Μ.Τ. είναι συναρπαστική! »

Θέμα 1
Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και η f' είναι συνάρτηση «1-1». Να δειχθεί ότι η καμπύλη y=f(x) δεν έχει με κάθε εφαπτομένη της άλλο κοινό σημείο εκτός από το σημείο επαφής.

Απάντηση:

Θέμα 2

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R να δειχθεί ότι υπάρχει αριθμός θε(0,1) ώστε για h>0 να ισχύει:

$f'(x+\theta h)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Απάντηση:

Θέμα 3

Αν $\dfrac{\alpha_\nu}{\nu+1}+\dfrac{\alpha_{\nu-1}}{\nu}+.....+\dfrac{\alpha_2}{3}+\dfrac{\alpha_1}{2}+\dfrac{\alpha_0}{1}=0,\ \nu\in N^*$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots..+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0=0$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1).

Απάντηση:

Θέμα 4
Σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις να σημειώσετε τη σωστή απάντηση, αιτιολογώντας την επιλογή σας.

1. Η συνάρτηση $f(x)=x^3-12x$ ικανοποιεί στο $\left[0,2\sqrt{3}\right]$ τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle. Το σημείο $\xi\in\left(0,2\sqrt{3}\right)$ στο οποίο μηδενίζεται η παράγωγος είναι:

Α. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ **Β.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **Γ.** 1 **Δ.** 2 **Ε.** $\sqrt{2}$.

2. Η συνάρτηση $f:\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]\to\left[-1,1\right]$ με $f(x)=\text{συν}x$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle. Το σημείο $\xi\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ στο οποίο μηδενίζεται η παράγωγος είναι:

Α. $\frac{2\pi}{3}$ **Β.** $\frac{5\pi}{6}$ **Γ.** π **Δ.** $\frac{7\pi}{6}$ **Ε.** $\frac{5\pi}{4}$.

3. Η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2-\alpha x}{x+2}$ ικανοποιεί στο $\left[0,4\right]$ τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle. Το σημείο $\xi\in\left(0,4\right)$ στο οποίο μηδενίζεται η παράγωγος είναι:

Α. $\frac{4}{\sqrt{3}+1}$ **Β.** $2\left(\sqrt{3}+1\right)$ **Γ.** $3\left(\sqrt{2}-1\right)$ **Δ.** $4\left(\sqrt{3}+1\right)$ **Ε.** $2\sqrt{2}+1$.

4. Ποια από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα που δίνεται:

Α. $f(x)=|x|$ στο $[-1,1]$ **Β.** $f(x)=\text{εφ}x$ στο $[0,\pi]$ **Γ.** $f(x)=\text{ημ}2x$ στο $[0,\pi]$

Δ. $f(x)=|x-1|+1$ στο $[-2,4]$ **Ε.** $f(x)=\frac{|x|}{x}$ στο $[0,1]$.

5. Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ικανοποιεί στο $\left[x_1,x_2\right]$ τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle. Το σημείο $\xi\in\left(x_1,x_2\right)$ στο οποίο μηδενίζεται η παράγωγος είναι:

Α. x_1+x_2 **Β.** $2x_1+x_2$ **Γ.** $\frac{3x_1+x_2}{2}$ **Δ.** $2x_1\cdot x_2$ **Ε.** $\frac{x_1+x_2}{2}$.

Απάντηση:

Θέμα 5

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $f(\alpha)-f(\beta)=\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ με $0<\alpha<\beta$. Να δείξετε ότι:

(i) Η συνάρτηση $g(x)=f(x)-\ln x$ ικανοποιεί στο $[\alpha,\beta]$ τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle.

(ii) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\frac{1}{\xi}$.

Απάντηση:

Θέμα 6

Αν η εξίσωση $x^4+\alpha x^3+\beta x^2+8x+5=0$ έχει τέσσερις ρίζες πραγματικές και άνισες, να δείξετε ότι $\alpha^2>\frac{8}{3}\beta$.

Απάντηση:

Θέμα 7

Η συνάρτηση f είνπαραγωγίσιμη στο διάστημα $[1,e]$ με $0<f(x)<1$ και $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[1,e]$. Να δείξετε ότι υπάρχει μόνο ένας αριθμός $x_o\in(1,e)$ τέτοιος ώστε $f(x_o)+x_o\ln x_o=x_o$.

Απάντηση:

Θέμα 8

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f(0)=f(1)=0$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f'(x)}{ημx}-\frac{f(x)}{συνx}=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

Απάντηση:

Θέμα 9

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f(2)=0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in R$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M\left(\xi, f(\xi)\right)$ να τέμνει τον άξονα xx' στο σημείο $P(2\xi, 0)$.

Απάντηση:

Θέμα 10

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [0,2], παραγωγίσιμη στο (0,2) με f(0)= f(2) , να αποδειχθεί ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία α, $\beta \in (0,2)$ τέτοια ώστε: $f'(\alpha) + f'(\beta) = 0$. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το συμπέρασμα.

Απάντηση:

\

Θέμα 11

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(1,5)$, παραγωγίσιμη στο $[1,5]$ και $f(5)=f(1)+14$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ με $\xi_1\neq\xi_2$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=7$.

Απάντηση:

Θέμα 12

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα. Αν $f(\alpha)<0<f(\beta)$, να δείξετε ότι:

(i) Υπάρχει $\gamma\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\gamma)=0$.

(ii) Ισχύει $\dfrac{f(\alpha)}{\alpha-\gamma}+\dfrac{f(\beta)}{\gamma-\beta}<0$.

Απάντηση:

Θέμα 13

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η f' είναι γνησίως φθίνουσα. Να δείξετε ότι:

(i) $f'(4) < f(4) - f(3) < f'(3)$ (ii) $f(7) - f(6) < f'(6) < f(6) - f(5)$

(iii) $f(0) + f(6) < f(2) + f(4)$ (iv) $3f(2) > f(4) + 2f(1)$.

Απάντηση:

Θέμα 14

Η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f(\beta)+\beta=f(\alpha)+\alpha \text{ με } \alpha<\beta.$$

(i) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_o\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_o)=-1$.

(ii) Αν υπάρχουν σημεία $A(x_1,f(x_1))$ και $B(x_2,f(x_2))$ της C_f με $x_1\neq x_2\neq x_o\neq x_1$ τέτοια ώστε οι εφαπτόμενες σ' αυτά της C_f να είναι παράλληλες στην ευθεία $\psi=-x$ να δείξετε ότι η εξίσωση $f'''(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

Απάντηση:

Θέμα 15

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) και $\lim_{x\to\alpha}f(x)=\beta$, $\lim_{x\to\beta}f(x)=\alpha$. Να δείξετε ότι υπάρχει εφαπτόμενη της C_f που είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: x-\psi-1=0$.

Απάντηση:

Θέμα 16

Έστω συνεχής $f : [0,2] \to R$ με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,2)$

Να δείξετε ότι: α) $f(0) \neq f(2)$

β) Υπάρχει $x_0 \in (0,2)$ με $5f(x_0)=2f(0)+3f(2)$

γ) Υπάρχουν ξ_1 , ξ_2 , $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $\frac{3}{f'(\xi_1)}+\frac{2}{f'(\xi_2)}=\frac{5}{f'(\xi)}$

Απάντηση:

Θέμα 17

1) Η συνάρτηση $f: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α,β) και συνεχής με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι:

i) αν υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ με $f(x_0) > 0$, τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) < 0$,

ii) αν υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ με $f(x_0) < 0$, τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) > 0$.

Απάντηση:

Θέμα 18

Αν ισχύουν $\alpha<\gamma<\beta$, και $f'(\gamma)=0$ και $|f''(x)|\leq\theta$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι $|f'(\alpha)+f'(\beta)|\leq\theta(\beta-\alpha)$.

<u>Απάντηση:</u>

Θέμα 19

α) Αν f' γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$ να δείξετε: $f'(\alpha)<\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}<f'(\beta)$

β) Αν f' γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,+\infty)$ να δείξετε: $f'(\alpha)<\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}<f'(x)$

<u>Απάντηση:</u>

Θέμα 20

Έστω η f είναι συνεχής στο [α,β] , παραγωγίσιμη στο (α,β)

α) Αν η f ΄ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (α,β) να δείξετε ότι

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$$

β) Αν η f ΄ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (α,β) να δείξετε ότι

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)>\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$$

γ) Αν $f'(x)\le 1$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, f(α)=α και f(β)=β να δείξετε ότι $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{\alpha+\beta}{2}$

Απάντηση: