ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

Θεώρημα Fermat-Ακρότατα

Θέμα 1

Αν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu \in R$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu \in R_+^* - \{1\}$, και ικανοποιούν τη σχέση:
$\alpha_1\beta_1^x + \alpha_2\beta_2^x + \ldots + \alpha_\nu\beta_\nu^x \geq \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu$, να δείξετε ότι:
$\beta_1^{\alpha_1} \cdot \beta_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot \beta_\nu^{\alpha_\nu} = 1$

Απάντηση:

Θέμα 2

Η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση και για κάθε $x \in R$ ισχύει:
$f(x) \leq e^x + \ln(x^2+1)$. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $A(0,1)$.

Απάντηση:

Θέμα 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 5^{\alpha x}+6^{\beta x}+7^{\gamma x}$ με $f(x) \geq 3$, για κάθε $x \in R$.
Αποδείξτε ότι :
α) η f έχει ελάχιστο το 3,
β) $5^{\alpha} \cdot 6^{\beta} \cdot 7^{\gamma} = 1$.

Απάντηση:

Θέμα 4
Σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις να σημειώσετε τη σωστή απάντηση, αιτιολογώντας την επιλογή σας.

1. Η συνάρτηση $f(x)=x^3-12x$ ικανοποιεί στο $\left[0,2\sqrt{3}\right]$ τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle. Το σημείο $\xi\in\left(0,2\sqrt{3}\right)$ στο οποίο μηδενίζεται η παράγωγος είναι:

Α. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ **Β.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **Γ.** 1 **Δ.** 2 **Ε.** $\sqrt{2}$.

2. Η συνάρτηση $f:\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]\to\left[-1,1\right]$ με $f(x)=\text{συν}x$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle. Το σημείο $\xi\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ στο οποίο μηδενίζεται η παράγωγος είναι:

Α. $\frac{2\pi}{3}$ **Β.** $\frac{5\pi}{6}$ **Γ.** π **Δ.** $\frac{7\pi}{6}$ **Ε.** $\frac{5\pi}{4}$.

3. Η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2-\alpha x}{x+2}$ ικανοποιεί στο $\left[0,4\right]$ τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle. Το σημείο $\xi\in\left(0,4\right)$ στο οποίο μηδενίζεται η παράγωγος είναι:

Α. $\frac{4}{\sqrt{3}+1}$ **Β.** $2\left(\sqrt{3}+1\right)$ **Γ.** $3\left(\sqrt{2}-1\right)$ **Δ.** $4\left(\sqrt{3}+1\right)$ **Ε.** $2\sqrt{2}+1$.

4. Ποια από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα που δίνεται:

Α. $f(x)=|x|$ στο $[-1,1]$ **Β.** $f(x)=\text{εφ}x$ στο $[0,\pi]$ **Γ.** $f(x)=\text{ημ}2x$ στο $[0,\pi]$

Δ. $f(x)=|x-1|+1$ στο $[-2,4]$ **Ε.** $f(x)=\frac{|x|}{x}$ στο $[0,1]$.

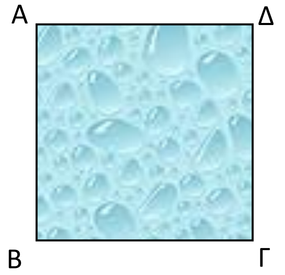
5. Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ικανοποιεί στο $\left[x_1,x_2\right]$ τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle. Το σημείο $\xi\in\left(x_1,x_2\right)$ στο οποίο μηδενίζεται η παράγωγος είναι:

Α. x_1+x_2 **Β.** $2x_1+x_2$ **Γ.** $\frac{3x_1+x_2}{2}$ **Δ.** $2x_1\cdot x_2$ **Ε.** $\frac{x_1+x_2}{2}$.

Απάντηση:

Θέμα 5

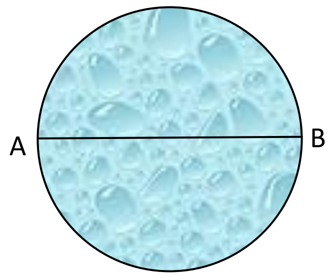
Αν περπατάμε 50 m/min και κολυμπάμε 30 m/min, με ποιό συνδυασμό περπατήματος ή/και κολύμβησης θα φτάσουμε από το Α στο Γ της τετράγωνης πισίνας ΑΒΓΔ πλευράς 20 m στον ελάχιστο δυνατό χρόνο;



<u>Απάντηση:</u>

Θέμα 6

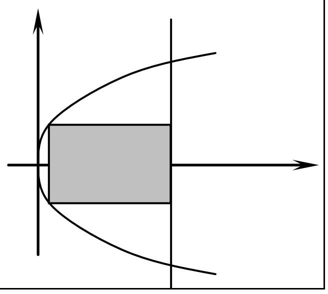
Αν περπατάμε 50 m/min και κολυμπάμε 25 m/min, με ποιό συνδυασμό περπατήματος ή/και κολύμβησης θα φτάσουμε από το Α στο Β της κυκλικής πισίνας διαμέτρου ΑΒ = 50 m στον ελάχιστο δυνατό χρόνο;



<u>Απάντηση:</u>

Θέμα 7

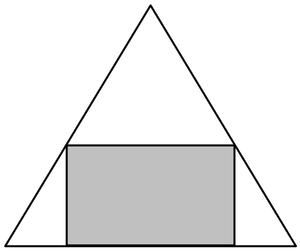
Να βρεθούν οι διαστάσεις ορθογωνίου εγγεγραμμένου στο χωρίο μεταξύ της παραβολής $y^2 = 4x$ και της ευθείας $x = 3$, του οποίου το εμβαδό να είναι μέγιστο.



Απάντηση:

Θέμα 8

Να βρεθούν οι διαστάσεις ορθογωνίου εγγεγραμμένου σε ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 2α, του οποίου το εμβαδό να είναι μέγιστο.



Απάντηση:

Θέμα 9
Σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις να σημειώσετε τη σωστή απάντηση, αιτιολογώντας την επιλογή σας.

1. Τα σημεία Α και Β είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης $f(x)=x^3-6x^2+9x$. Η απόσταση των σημείων Α, Β είναι

Α. 1 Β. $2\sqrt{2}$ Γ. $2\sqrt{5}$ Δ. $3\sqrt{5}$ Ε. 5.

2. Η συνάρτηση $f(x)=\left(x+2\right)^{\frac{1}{3}}\left(1-x\right)^{\frac{2}{3}}$ παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο

Α. $x_o=-1$ Β. $x_o=-\frac{1}{2}$ Γ. $x_o=0$ Δ. $x_o=\frac{1}{2}$ Ε. $x_o=1$

3. Η συνάρτηση $f(x)=\mu x^2-(\mu-3)x+3$, $\mu\in R$ παρουσιάζει ελάχιστο για $x=\frac{1}{8}$. Το μ είναι ίσο με

Α. 5 Β. 4 Γ. 3 Δ. 2 Ε. 1.

4. Η συνάρτηση $f(x)=\mu x^3-(2\mu-1)x^2+4x-3$, $\mu\in R$ παρουσιάζει ακρότατο για $x=1$. Το μ είναι ίσο με

Α. 1 Β. 3 Γ. 6 Δ. 8 Ε. 10.

Απάντηση:

Θέμα 10

Να βρείτε την πολυωνυμική συνάρτηση f , όταν $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{3x^2+4x+6}=\dfrac{2}{3}$, $f(0)=-3$ και το σημείο $x_o=-1$ είναι θέση τοπικού ακροτάτου της f .

Απάντηση:

\

Θέμα 11

Η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι 1−1 και παραγωγίσιμη. Η f' είναι 1−1 και $f'(5)=0$. Αν η συνάρτηση $g(x)=f\left(f(x)\right)$ παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_o=2$, να βρείτε την τιμή $f(2)$.

Απάντηση:

Θέμα 12

Η συνάρτηση $f:R \to R$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύουν $f(3)=0$ και $2e^{f(x)} \le \alpha f(x)+2$ για κάθε $x \in R$, $(\ \alpha \ne 2\ )$. Να δείξετε ότι $f'(3)=0$.

Απάντηση:

Θέμα 13

Η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to R$ είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, έχει σύνολο τιμών $f\left([\alpha,\beta]\right)=[-2,5]$ ενώ $f(\alpha)=1$ και $f(\beta)=0$. Να δείξετε ότι:

(i) Υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $f'(x_1)=f'(x_2)$.

(ii) Η εξίσωση $\kappa f'(x)+\lambda f(x)=0$ με $\kappa,\lambda \in R^*$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α,β).

Απάντηση:

Θέμα 14

Δίνεται η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$. Να δείξετε ότι.

(i) Αν το $f(\alpha)$ είναι τοπικό ελάχιστο και η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=\alpha$ τότε $f'(\alpha)\geq 0$.

(ii) Αν το $f(\beta)$ είναι τοπικό ελάχιστο και η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=\beta$ τότε $f'(\beta)\leq 0$.

(iii) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και $f'(\alpha)<0<f'(\beta)$ τότε υπάρχει $x_o\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_o)=0$.

(iv) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και $f'(\alpha)<\gamma<f'(\beta)$ τότε υπάρχει $x_o\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_o)=\gamma$.

Απάντηση:

Θέμα 15

Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και ισχύει

$$2xf''(x)+3x\left[f'(x)\right]^2=1-e^{-x}, \text{ για κάθε } x\in R.$$

Να δείξετε ότι

(i) Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_o\neq 0$ τότε αυτό είναι τοπικό ελάχιστο.

(ii) Αν η f'' είναι συνεχής και η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_o=0$ τότε αυτό είναι επίσης τοπικό ελάχιστο.

Απάντηση:

Θέμα 16

Η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο R και για κάθε $x \in R$ ισχύει:

$$1 + xe^x \left\{ f''(x) + \left[f'(x) \right]^2 \right\} = e^x .$$

Να δείξετε ότι

(i) Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_o \neq 0$ τότε αυτό είναι ελάχιστο.

(ii) Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_o = 0$ τότε αυτό είναι μέγιστο ή ελάχιστο;

Απάντηση:

Θέμα 17

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.
Αν η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο $x_o\in(\alpha,\beta)$ να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ παρουσιάζει στο x_o τοπικό ελάχιστο το $\dfrac{1}{f(x_o)}$.

Απάντηση:

Θέμα 18

Να βρείτε το σημείο $M\left(\alpha, f(\alpha)\right)$ τέτοιο ώστε η εφαπτόμενη στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=2x-x^2$ στο σημείο Μ να σχηματίζει με τους θετικούς ημιάξονες Ox, $O\psi$ τρίγωνο με ελάχιστο εμβαδόν.

<u>Απάντηση:</u>

Θέμα 19

Έστω $a\geq 0$, $b\geq 0$, $p>1$ και q τέτοιο ώστε $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Να αποδείξετε ότι: $\frac{a}{p}+\frac{b}{q}\geq a^{\frac{1}{p}}\cdot b^{\frac{1}{q}}$.

<u>Απάντηση:</u>

Θέμα 20

Η συνάρτηση $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$ έχει τρεις ρίζες άνισες ρ_1, ρ_2, ρ_3 με $\rho_1<\rho_2<\rho_3$. Να δείξετε ότι

(i) $\alpha^2>3\beta$.

(ii) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{x-\rho_1}+\dfrac{1}{x-\rho_2}+\dfrac{1}{x-\rho_3}$ για κάθε $x\neq\rho_1,\rho_2,\rho_3$.

(iii) Η f έχει δύο τοπικά ακρότατα.

(iv) Αν x_o είναι θέση τοπικού ακρότατου της f τότε $\dfrac{1}{x_o-\rho_1}+\dfrac{1}{x_o-\rho_2}+\dfrac{1}{x_o-\rho_3}=0$.

Απάντηση: