ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

Συνέπειες ΘΜΤ-Μονοτονία

Θέμα 1

Να βρεθεί ο τύπος της παραγωγίσιμης συνάρτησης $f:R \to (0,+\infty)$, αν είναι γνωστό ότι η κλίση της εφαπτομένης της $\mathbf{C_f}$ σε κάθε σημείο της είναι ανάλογη προς το πηλίκο $\dfrac{x(x^2+3)}{f(x)}$, η $\mathbf{C_f}$ διέρχεται από το σημείο Μ(2,7) και η εφαπτομένη στο σημείο αυτό έχει κλίση 4.

<u>Απάντηση:</u>

Θέμα 2

Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $\mathbf{x}\in\mathbf{R}$ ισχύει $(2+\sigma\upsilon\nu^2 x)\cdot f'(x)=f(x)\cdot \eta\mu 2x$.

(i) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $g(x)=(2+\sigma\upsilon\nu^2 x)\cdot f(x)$ είναι σταθερή.

(ii) Αν $f(0)=5$ να βρεθεί ο τύπος της f .

Απάντηση:

Θέμα 3

Η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_o=1$ με $f'(1)=5$ και για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(\alpha\beta)=\beta\cdot f(\alpha)+\alpha\cdot f(\beta)$.

(i) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.

(ii) Να βρείτε τον τύπο της f.

Απάντηση:

Θέμα 4

Σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις να σημειώσετε τη σωστή απάντηση, αιτιολογώντας την επιλογή σας.

1. Αν $f'(x) = 5x^4 + 2x - 3$ και $f(1) = 3$, τότε το $f(0)$ είναι ίσο με

Α. -1 Β. 0 Γ. 2 Δ. 3 Ε. 4

2. Αν $f'(x) - 2f(x) = 0$ και $f(0) = 3$, τότε το $f(\ln 2)$ είναι ίσο με

Α. 2 Β. 4 Γ. 8 Δ. 12 Ε. 16.

3. Αν $f'(x) = ημx \cdot f^2(x)$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$ και $f(0) = \frac{1}{3}$,

τότε το $f\left(\frac{4π}{3}\right)$ είναι ίσο με

Α. $\frac{1}{3}$ Β. $\frac{2}{3}$ Γ. $\frac{1}{2}$ Δ. $\frac{2}{5}$ Ε. 1.

4. Αν $f'(x) = \frac{1}{1 + συνx}$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{π}{2}\right]$ και $f(0) = 3$ το $f\left(\frac{π}{2}\right)$ είναι ίσο με

Α. -1 Β. 0 Γ. 1 Δ. 2 Ε. 4.

Απάντηση:

Θέμα 5

Η συνάρτηση $f: R \to R$ είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in R$ ισχύει $2f(x) = x \cdot f'(x) - 2x + 10$. Να δείξετε ότι:

(i) Η συνάρτηση f'' είναι σταθερή.

(ii) Αν $f'(1) = 4$, τότε $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$.

Απάντηση:

Θέμα 6

Να βρείτε τις συναρτήσεις f και g αν ξέρετε ότι:

(i) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύουν: $f(1) = 3$ και $xf'(x) = f(x) + x^2$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

(ii) Η g είναι οι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και ισχύουν: $g(x) > 0$, $g(0) = 1$, $g'(0) = 3$ και $8g^2(x) + \left[g'(x)\right]^2 = g''(x) \cdot g(x)$, για κάθε $x \in R$.

Απάντηση:

Θέμα 7

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και $f''(x) = 2f'(x)\,f(x)$ για κάθε $x \in R$.
Αν $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Απάντηση:

Θέμα 8

Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και η ευθεία $y = 2012$ τέμνει την γραφική της παράσταση στα σημεία με τετμημένες 1, 2 και 3.
Να δείξετε ότι:
α) Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον λύσεις στο διάστημα $(1,3)$.
β) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,3)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = f'(\xi)$.

Απάντηση:

Θέμα 9

Η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x)>0$ για κάθε $x\in R$. Αν η $\mathbf{C_f}$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων να αποδειχθεί ότι:

$3f(x)\ge 4f\left(\frac{3x}{4}\right)$ για κάθε $x\in R$.

Απάντηση:

Θέμα 10

Έστω $\mathbf{f:R\to R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $\mathbf{f'(x)>6x^2}$, για κάθε $\mathbf{x\in R}$. Να αποδειχθεί ότι:

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathbf{f(x)=+\infty}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathbf{f(x)=-\infty}$.

(ii) Η εξίσωση $\mathbf{f(x)=0}$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\mathbf{R}$.

Απάντηση:

\

Θέμα 1

(i) Αν για κάθε $x \in R$ ισχύει $f'(x) > 0$ και $g'(x) < 0$ να δείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο.
(ii) Αν $f(x) = e^x + 2x$ και $g(x) = e^{-x} - x^3$ να δείξετε ότι οι C_f, Cg έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

Απάντηση:

Θέμα 12

(i) Να μελετήσετε την μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{\alpha^x + \beta^x x^3}{\beta^x}$ με $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ και $\alpha > \beta$.
(ii) Να λύσετε την ανισότητα $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{x^2} - \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{2-3x} < (3x-2)^3 - x^6$.

Απάντηση:

Θέμα 13

Η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$. Να δείξετε ότι:

(i) $xf'(x)>f(x)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

(ii) Η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{2x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Απάντηση:

Θέμα 14

Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,\alpha]$, $\alpha>0$ και ισχύουν $f(0)=f'(0)=0$ και $f''(x)<0$ για κάθε $x\in(0,\alpha)$.

(i) Να μελετήσετε την μονοτονία της συνάρτησης

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x} & \text{αν } x\in(0,\alpha] \\ 0 & \text{αν } \quad x=0\end{cases}.$$

(ii) Να δείξετε ότι $\alpha f(x)>xf(\alpha)$ για κάθε $x\in(0,\alpha)$.

Απάντηση:

Θέμα 15

Η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τη σχέση $f\left(f'(x)\right)+f(x)=0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

(i) Να δείξετε ότι: $f'\left(f'(x)\right)=x$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

(ii) Αν $f(1)=2$ και $f(e)=5$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Απάντηση:

Θέμα 16

Η συνάρτηση $f:[-2,5]\to R$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x)<0$ για κάθε $x\in[-2,5]$.
Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $A(2,0)$, να δείξετε ότι: $4f(5)+3f(-2)<0$.

Απάντηση:

Θέμα 17

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x-\ln 2}{x-2}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(2,+\infty)$.

Απάντηση:

Θέμα 18

Σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις να σημειώσετε τη σωστή απάντηση, αιτιολογώντας την επιλογή σας.

1. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to(-\infty,0)$ είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα . Ποια από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως φθίνουσα ;

Α. $\left[f(x)\right]^3$ Β. $-f^2(x)$ Γ. $\dfrac{f(x)}{x}$ Δ. $5f(x)$ Ε. $f^4(x)$.

2. Η συνάρτηση $f:\left[\alpha,\beta\right]\to(0,+\infty)$, $\alpha>0$ είναι παραγωγίσιμη και γνησίως φθίνουσα.. Ποια από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως φθίνουσα ;

Α. $\dfrac{1}{f(x)}$ Β. $\dfrac{1}{f^3(x)}$ Γ. $1-f(x)$ Δ. $5f^4(x)$ Ε. $x^2-f(x)$.

3. Η συνάρτηση $f(x)=3^{\ln(x^2+4)}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα

Α. $(-\infty,0)$ Β. $(-\infty,1)$ Γ. $(0,+\infty)$ Δ. $(-2,2)$ Ε. $\mathbb{R}$.

4. Η συνάρτηση $f(x)=-x^3+3x^2-2(\mu+2)x$ είναι γνησίως φθίνουσα, όταν

Α. $\mu>-\dfrac{1}{2}$ Β. $\mu<-\dfrac{1}{2}$ Γ. $\mu>\dfrac{1}{2}$ Δ. $\mu<\dfrac{1}{2}$ Ε. $\mu\le\dfrac{1}{2}$

5. Οι συναρτήσεις $f,g:(\alpha,\beta)\to(0,+\infty)$ είναι παραγωγίσιμες. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα . Ποια από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως φθίνουσα στο (α,β) .

Α. $f(x)-g(x)$ Β. $f(x)+g(x)$ Γ. $f(x)\cdot g(x)$ Δ. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ Ε. $\dfrac{g(x)}{f(x)}$.

Απάντηση:

Θέμα 19

Να μελετήσετε την μονοτονία της $f(x)=\dfrac{\ln(x-1)}{\ln x}$ στο διάστημα $(2,+\infty)$ και να δείξετε ότι:

$\ln(x-1)\ln(x+1)<\ln^2 x$ για κάθε $x>2$.

Απάντηση:

Θέμα 20

Οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμες στο (α,β) και $|f'(x)|<g'(x)$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.

Να δείξετε ότι:

(i) Οι συναρτήσεις $f+g$ και $g-f$ είναι γνησίως αύξουσες στο $[\alpha,\beta]$.

(ii) $|f(x)-f(\alpha)|\le g(x)-g(\alpha)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Απάντηση: