ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ Α ΒΑΘΜΟΥ

ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ

Έστω $f(x)$, $g(x)$ είναι δύο παραστάσεις μιας μεταβλητής x πού παίρνει τιμές στο σύνολο Α.
Ανίσωση με έναν άγνωστο λέγεται κάθε σχέση της μορφής $f(x)\geq g(x)$ ή $f(x)\geq g(x)$, η οποία αληθεύει για ορισμένες τιμές της μεταβλητής x στο σύνολο Α.

Ορισμός

Μερική λύση μιας ανίσωσης λέγεται κάθε τιμή της μεταβλητής x η οποία την επαληθεύει.

Λύση μιας ανίσωσης λέγεται το σύνολο που περιέχει όλες τις μερικές λύσεις της ανίσωσης.

Ορισμός

Δύο ανισώσεις λέγονται **ισοδύναμες** αν και μόνο αν έχουν τις ίδιες ακριβώς λύσεις.
Αν και οι δύο ανισώσεις δεν έχουν ρίζες, τότε λέγονται επίσης ισοδύναμες.
Αν οι ανισώσεις $f(x)>g(x)$ και $p(x)>q(x)$ είναι ισοδύναμες, τότε γράφουμε:

$$f(x)>g(x)\Leftrightarrow p(x)>q(x).$$

Θεώρημα 1

Η ανίσωση $f(x)>g(x)$ είναι ισοδύναμη με την ανίσωση $f(x)+\varphi(x)>g(x)+\varphi(x)$, όπου $\varphi(x)$ είναι ένας πραγματικός αριθμός ή μια παράσταση του x η οποία έχει το ίδιο σύνολο αναφοράς Α με την ανίσωση $f(x)>g(x)$.

Πόρισμα 1

Αν σε μια ανίσωση μεταφέρουμε έναν όρο από το ένα μέλος στο άλλο αλλάζοντας το πρόσημο του παίρνουμε ισοδύναμη ανίσωση, δηλαδή

$$f(x)+\varphi(x)>g(x)\Leftrightarrow f(x)>g(x)-\varphi(x).$$

Θεώρημα 2

Η ανίσωση $f(x)>g(x)$ είναι ισοδύναμη με την ανίσωση $f(x)\cdot\varphi(x)>g(x)\cdot\varphi(x)$ όπου $\varphi(x)$ είναι μια παράσταση του x η οποία έχει το ίδιο σύνολο αναφοράς Α με την ανίσωση $f(x)>g(x)$ και $\varphi(x)>0$ για κάθε $x\in A$.

Πόρισμα 2

Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε τα μέλη μιας ανισότητας με έναν **θετικό αριθμό**, τότε παίρνουμε ισοδύναμη ανισότητα με την ίδια φορά.

Θεώρημα 3

Η ανίσωση $f(x)>g(x)$ είναι ισοδύναμη με την ανίσωση $f(x)\cdot\varphi(x)<g(x)\cdot\varphi(x)$ όπου $\varphi(x)$ είναι μια παράσταση του x η οποία έχει το ίδιο σύνολο αναφοράς Α με την ανίσωση $f(x)>g(x)$ και $\varphi(x)<0$ για κάθε $x\in A$.

Πόρισμα 3

Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε τα μέλη μιας ανισότητας με έναν **αρνητικό αριθμό**, τότε παίρνουμε ισοδύναμη ανισότητα με αντίθετη φορά.

Πόρισμα 4

Η ανίσωση $f(x)>g(x)$ είναι ισοδύναμη με την ανίσωση $f^{\nu}(x)>g^{\nu}(x)$ αν $\nu\in\mathbb{N}^*$ και $f(x)\geq 0$, $g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in A$, όπου Α είναι το σύνολο αναφοράς της ανίσωσης $f(x)>g(x)$.

Σχόλιο

Αν ο ν είναι περιττός τότε η συνθήκη $f(x)\geq 0$, $g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in A$ στο προηγούμενο πόρισμα μπορεί να παραληφθεί.

Ι. ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Ανίσωση πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο λέγεται μία ανίσωση που περιέχει τον άγνωστο (μεταβλητή) αυτό στην πρώτη δύναμη και δεν περιέχει άλλους αγνώστους. Πολλές ανισώσεις με έναν άγνωστο μετά από πράξεις παίρνουν μορφή $\alpha x+\beta>0$ ή $\alpha x+\beta<0$, όπου α, β είναι γνωστοί αριθμοί.

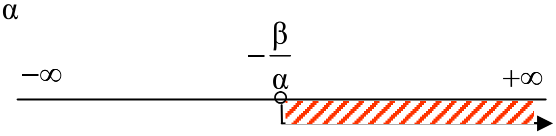
Η ανίσωση : αx+β>0

Έχουμε $\alpha x+\beta>0 \Leftrightarrow \alpha x>-\beta$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

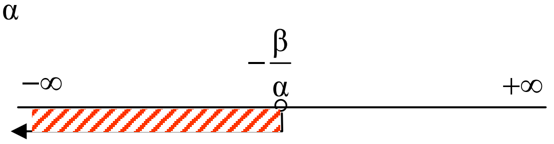
- Αν $\boldsymbol{\alpha>0}$, τότε: $\alpha x>-\beta \Leftrightarrow x>-\dfrac{\beta}{\alpha}$

  (Η λύση της ανίσωσης παρίσταται γεωμετρικά με το διπλανό σχήμα)



- Αν $\boldsymbol{\alpha<0}$, τότε: $\alpha x>-\beta \Leftrightarrow x<-\dfrac{\beta}{\alpha}$

  (Η λύση της ανίσωσης παρίσταται γεωμετρικά με το διπλανό σχήμα)



- Αν $\boldsymbol{\alpha=0}$, τότε η ανίσωση γίνεται $0\cdot x>-\beta$, οπότε
  (i) Αληθεύει **για κάθε** $\boldsymbol{x\in\mathbb{R}}$ όταν $0>-\beta \Leftrightarrow \beta>0$ και
  (ii) Είναι **αδύνατη** όταν $0\leq-\beta \Leftrightarrow \beta\leq 0$

Σχόλιο

Όμοια λύνεται η ανίσωση $\alpha x+\beta<0$, όπως και οι ανισώσεις $\alpha x+\beta\geq 0$, $\alpha x+\beta\leq 0$.

Παραμετρικές ανισώσεις

Λέγονται οι ανισώσεις οι οποίες εκτός από τον άγνωστο περιέχουν ένα ακόμη γράμμα συνήθως α ή β ή ….κ ή λ, το οποίο παριστάνει οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό και λέγεται **παράμετρος**.
Για να λύσουμε μία παραμετρική ανίσωση για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου την μετασχηματίζουμε στη μορφή $\alpha x>\beta$ ή $\alpha x<\beta$ και **διακρίνουμε περιπτώσεις** όπως παραπάνω.

II. ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΑ

Λέγονται οι ανισώσεις που περιέχουν τον άγνωστο στην απόλυτη τιμή μιας παράστασης

Για την λύση των ανισώσεων με απόλυτα είναι χρήσιμες οι παρακάτω ιδιότητες :

1. Αν $\theta>0$ τότε ισχύει : $|x|<\theta \Leftrightarrow -\theta<x<\theta$
   Αν $\theta>0$ τότε ισχύει : $|x|\leq\theta \Leftrightarrow -\theta\leq x\leq\theta$

2. Αν $\theta>0$ τότε ισχύει : $|x|>\theta \Leftrightarrow (x>\theta \text{ ή } x<-\theta)$
   Αν $\theta>0$ τότε ισχύει : $|x|\geq\theta \Leftrightarrow (x\geq\theta \text{ ή } x\leq-\theta)$

III. ΣΥΝΑΛΗΘΕΥΟΥΣΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΕΝΑΝ ΑΓΝΩΣΤΟ (ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΕΝΑΝ ΑΓΝΩΣΤΟ)

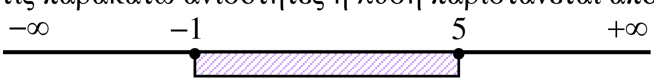
Συναληθεύουσες ανισώσεις ή **σύστημα ανισώσεων με έναν άγνωστο** ονομάζουμε δύο ή περισσότερες ανισώσεις με έναν άγνωστο, όταν πρέπει να βρούμε τις τιμές του αγνώστου οι οποίες επαληθεύουν συγχρόνως όλες τις ανισώσεις.
Είναι φανερό ότι η λύση ενός συστήματος ανισοτήτων είναι **η τομή** των λύσεων των ανισοτήτων που περιέχει.
Επομένως για να λύσουμε ένα σύστημα ανισοτήτων, λύνουμε ξεχωριστά κάθε ανίσωση που περιέχει και παίρνουμε την τομή των λύσεων αυτών των ανισοτήτων.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

Σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις να σημειώσετε τη σωστή απάντηση.

Ανισώσεις με απόλυτα α βαθμού

1. Ποιας από τις παρακάτω ανισότητες η λύση παριστάνεται από το σχήμα:



Α. $|x-2|<3$ Β. $|x-2|\le 3$ Γ. $|x-4|<3$ Δ. $|x-4|\le 3$ Ε. $|x-3|\le 2$

2. Το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $|2x-1|<x+3$ είναι:

Α. $\left(-\frac{2}{3},4\right)$ Β. $(6,+\infty)$ Γ. $(4,+\infty)$ Δ. $(-\infty,4)$ Ε. $(0,6)$

3. Το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $2|x|-3x>5$ είναι:

Α. $(-5,-1)$ Β. $(-1,+\infty)$ Γ. $(-\infty,-1)$ Δ. $(-1,5)$ Ε. $(1,5)$

4. Το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $|x-4|>|x+2|+2$ είναι:

Α. $(0,+\infty)$ Β. $(-2,2)$ Γ. $(-\infty,0)$ Δ. $(-2,+\infty)$ Ε. $(-\infty,2)$

5. Το άθροισμα όλων των ακεραίων που επαληθεύουν τις ανισώσεις $5\le|2x+7|\le 13$ είναι:

Α. -35 Β. -25 Γ. -21 Δ. -9 Ε. 9

6. Το μήκος του διαστήματος των λύσεων της ανίσωσης $\left|\frac{2}{x-5}\right|\ge\frac{1}{3}$ είναι :

Α. 10 Β. 11 Γ. 12 Δ. 13 Ε. 14

7. Το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $||x-2|-5|<1$ είναι:

Α. $(-4,-2)$ Β. $(-4,8)$ Γ. $(6,8)$ Δ. $(-2,6)$ Ε. $(-4,-2)\cup(6,8)$

8. Αν $||x-4|-4|<3$, τότε το πλήθος όλων των ακεραίων τιμών που μπορεί να πάρει ο x είναι

Α. 8 Β. 9 Γ. 10 Δ. 11 Ε. 12

9. Οι λύσεις της ανίσωσης $\frac{|x-3|}{|x|-3}\le 0$ είναι:

Α. $-3\le x\le 3$ Β. $-3<x<3$ Γ. $-3<x\le 3$ Δ. $-3\le x<3$ Ε. $-2\le x\le 2$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Λύση ανισώσεων α βαθμού

1. Να λύσετε τις ανισώσεις

(i) $(x+5)^2-2(3x-2)>(x-3)^2-(2x+4)$ (ii) $4-\frac{3}{2}x\ge\frac{13}{8}-\frac{1}{6}(4x-3)$.

2. Να βρείτε όλες τις θετικές ακέραιες λύσεις των ανισώσεων:

(i) $(2x+3)(2x-3)-(2x-1)^2\le 2$ (ii) $(x-1)(x^2+x+1)-x(x^2-1)\ge 4$.

3. Να λύσετε τις ανισώσεις

(i) $5(x+3)-\frac{x-7}{8}>\frac{11}{2}(x-2)$ (ii) $\frac{5}{3}x+\frac{7-3x}{2}\geq x-\frac{7+3x}{3}+\frac{x}{6}$.

4. Να λύσετε τις ανισώσεις

(i) $\frac{7x+5}{6}-\frac{3x-9}{2}>8$ (ii) $\frac{3x-1}{2}-\frac{1}{3}\geq\frac{3x-2}{4}+1$.

5. Να λύσετε τις ανισώσεις

(iii) $\frac{2x^2-5x+3}{6}-\frac{4-x}{12}+\frac{5-x^2}{3}\geq\frac{2x-1}{9}$

(iv) $3\left\{x+\frac{1-3x}{4}-\left[1-2\left(x-\frac{x+3}{5}\right)\right]\right\}>5x-2$.

6. Για ποιες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ η εξίσωση $(\alpha-2)x^2-(2\alpha+1)x+\alpha-1=0$ έχει ρίζες πραγματικές άνισες. $\alpha\in\left(\frac{7}{16},2\right)\cup(2,+\infty)$.

7. Να λύσετε την εξίσωση $x^2+(1-2\mu^2)x+\mu^4-\mu^2=0$. Αν x_2 είναι η μικρότερη ρίζα της εξίσωσης, να βρείτε τον $\mu\in\mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $x_2<\mu^2+\mu-2$.

$x_1=\mu^2,\ x_2=\mu^2-1,\ \mu>1$.

8. Να λύσετε την εξίσωση $9x^2-3(\alpha^2+2)x+\alpha^2+1=0$. Αν x_1 είναι η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης, να βρείτε τον $\alpha\in\mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $x_1<\frac{\alpha^2+\alpha}{3}$.

Ανισώσεις με απόλυτα

9. Να λύσετε τις ανισώσεις:

(i) $|x+5|\leq 7$ (ii) $|3-x|\leq 6$ (iii) $|4x+1|\leq 7$ (iv) $|3-2x|\leq 5$.

10. Να λύσετε τις ανισώσεις:

(i) $|x+1|>2$ (ii) $|x-4|>1$ (iii) $|2x+3|>4$ (iv) $|5-4x|>3$.

11. Να λύσετε τις ανισώσεις:

(i) $|x+6|\geq 3$ (ii) $|x-2|\geq 4$ (iii) $|3x+1|\geq 8$ (iv) $|5-2x|\geq 5$.

12. Να λύσετε τις ανισώσεις:

(i) $\left|3x-\frac{5}{2}\right|\geq 2$ (ii) $|3x-1|\geq 5$ (iii) $|3x|-2>|x|+8$ (iv) $|4-3x|>7$.

13. Να λύσετε τις ανισώσεις:

(i) $|x| \le x$ (ii) $|x| > x$ (iii) $|x| \le -x$ (iv) $|x| > -x$.

14. Να λύσετε τις ανισώσεις:
(i) $|x-2| > x-2$ (ii) $|x-2| \le x-2$ (iii) $|x-2| < x-2$.

15. Να λύσετε τις ανισώσεις
(i) $\frac{|x|+1}{2} - \frac{|x|+2}{6} > \frac{3|x|-2}{3}$ (ii) $\frac{|x-3|-2}{6} + \frac{|x-3|-1}{4} \le \frac{3|x-3|+5}{6} - 2$.

16. Να λύσετε τις ανισώσεις:
(i) $\frac{2|x+1|}{3} - \frac{2|x+1|-8}{6} \le |x+1|-2$ (ii) $\frac{2|1-2x|-3}{9} - \frac{|1-2x|+5}{6} \ge \frac{3-|1-2x|}{2} - 1$.

17. Να λύσετε τις ανισώσεις:
(i) $||x+3|-7| \le 4$ (ii) $||2x+1|-5| > 2$.

18. Να λύσετε τις ανισώσεις:
(i) $\frac{3|x|+1}{4} - \frac{4+x}{3} > 1$ (ii) $3|x|+4|x-1| > 5$.

19. Να λύσετε τις ανισώσεις:
(i) $|x-2| \le |x+4|$ (ii) $|x+2|+|x-3| > 5$.

20. Να λύσετε τις ανισώσεις:
(i) $|2x+1|+|6x| > 9$ (ii) $\left|-\frac{5}{x+2}\right| \le \left|\frac{10}{x-1}\right|$.

21. Να λύσετε τις ανισώσεις:
(i) $|x-1|+|x-2|-1 < 2x$ (ii) $|x-1|+|2-x| > 3+x$.

22. Να λύσετε τις ανισώσεις:
(i) $|x-1|+|x-2|+|x-3| \le x+1$ (ii) $|x|+|x-1|+|x-2| > 9$.

23. Να λύσετε τις ανισώσεις:
(i) $||x-1|+x| < 3$ (ii) $||x-3|+1| \ge 2$.

Συστήματα ανισώσεων (συναληθεύουσες ανισώσεις)

24. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:

(i) $\begin{cases} 2-x>2x-8 \\ \dfrac{x-3}{4}-x<\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{x-2}{3} \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{4}-\dfrac{2x-1}{3}<2 \\ \dfrac{3x}{4}+\dfrac{7}{8}<\dfrac{x}{4}+\dfrac{5}{2} \end{cases}$.

25. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:

(i) $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{2}+\dfrac{1}{3}>\dfrac{3x-4}{4}+1 \\ \dfrac{x+3}{2}+\dfrac{x}{3}\le\dfrac{3x-1}{4}+2 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} \dfrac{x}{8}+\dfrac{5x-4}{12}<\dfrac{x-2}{6}-\dfrac{x+1}{3}+\dfrac{3x}{4}+1 \\ x>\dfrac{17x-11}{25}+\dfrac{7x-5}{20}+\dfrac{3}{4} \end{cases}$.

26. Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις των συστημάτων:

(i) $\begin{cases} 4x+5<5x+\dfrac{9}{2} \\ 1-\dfrac{3x-88}{7}>5x \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} \dfrac{3x}{4}+\dfrac{7}{8}\le\dfrac{x}{4}+\dfrac{5}{2} \\ \dfrac{x+1}{4}-\dfrac{2x-1}{3}<2 \end{cases}$.

27. Να λύσετε τα συστήματα ανισώσεων :

(i) $3<|3-x|\le 7$ (ii) $7<|3-2x|<11$.

28. Δίνεται η παράσταση: $A=(|x-1|-2)\cdot(1-|\psi-2|)+\psi^2-4\psi+3$

(i) Για ποιες τιμές του $\psi\in\mathbb{R}$ η παράσταση A είναι ίση με μηδέν ανεξάρτητα από τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$.

(ii) Αν $\psi\neq 3$, $\psi\neq 1$ και $A=0$, να απλοποιήσετε το κλάσμα:

$$K=\frac{2|x-1|+3|\psi-2|+9}{|x-1|},\ x\neq 1$$

(iii) Αν $2|x-1|+3|\psi-2|=0$ να βρείτε την τιμή της παράστασης A

(iv) Αν $\psi=4$ να λύσετε την ανίσωση: $A>2$.