

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

Εξίσωση εφαπτομένης-Ρυθμός μεταβολής

Θέμα 1

Σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις να σημειώσετε τη σωστή απάντηση, αιτιολογώντας την επιλογή σας.

1. Αν η ευθεία $\psi = x + 3$ εφάπτεται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + \mu x + \nu$ στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$ τότε το $\mu - \nu$ είναι ίσο με:
Α. 5 Β. 4 Γ. 3 Δ. -3 Ε. -5.
2. Αν η ευθεία $3x - \psi + 10 = 0$ εφάπτεται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2 - \alpha x + 1}{x - 1}$ στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 3$ τότε το α είναι ίσο με:
Α. 4 Β. 6 Γ. 8 Δ. 10 Ε. 12
3. Αν η εφαπτόμενη στην γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 - (3\alpha - \beta)x - 7$ στο σημείο $A(1, 2)$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\psi = x + 2$, τότε η διαφορά $\alpha - \beta$ είναι:
Α. -17 Β. -15 Γ. -12 Δ. 27 Ε. 29.
4. Αν η ευθεία $\mu^2 \psi = 8\mu x - 4$ εφάπτεται στην παραβολή $\psi = 4x^2$ στο σημείο με τετμημένη $x_0 = \frac{1}{4}$, τότε το μ είναι ίσο με:
Α. 1 Β. 2 Γ. 3 Δ. 4 Ε. 5.
5. Η εφαπτόμενη στην γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{\alpha + 4x^2}$, $\alpha > 0$ στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 2$, έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{8}{5}$. Το α είναι ίσο με
Α. 1 Β. 3 Γ. 6 Δ. 9 Ε. 12.

Απάντηση:

Θέμα 2

Για την πολυωνυμική συνάρτηση f είναι γνωστό ότι ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2 + x + 1} = 2$ και ότι

η εφαπτομένη της C_f στο $A(0,1)$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: 3x - y + 2 = 0$.

α) Βρείτε τον τύπο της f .

β) Να δείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Απάντηση:

Θέμα 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + 2x + x^3$.

α) Να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f .

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο $M(3, f^{-1}(3))$.

Απάντηση:

Θέμα 4

Σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις να σημειώσετε τη σωστή απάντηση, αιτιολογώντας την επιλογή σας.

1. Αν η εφαπτόμενη στην γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f(x) = ax^2 - (3a - \beta)x - 7$ στο σημείο $A(1, 2)$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\psi = x + 2$, τότε η διαφορά $a - \beta$ είναι:

- A. -17 B. -15 Γ. -12 Δ. 27 E. 29.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f : (-\infty, 5) \rightarrow (-24, +\infty)$ με $f(x) = x^2 - 10x + 1$. Η εφαπτόμενη στην γραφική παράσταση της συνάρτησης $f^{-1}(x)$ στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 40$ έχει συντελεστή διεύθυνσης

- A. $-\frac{1}{32}$ B. $-\frac{1}{16}$ Γ. $-\frac{1}{8}$ Δ. $-\frac{1}{4}$ E. $\frac{1}{4}$.

3. Οι εφαπτόμενες της παραβολής $\psi = x^2 + 3$ που διέρχονται από το σημείο $A(2, 6)$ τέμνουν τον άξονα $\psi\psi'$ σε σημεία που απέχουν μεταξύ τους απόσταση ίση με

- A. 2 B. 4 Γ. 6 Δ. 8 E. 10.

Απάντηση:

Θέμα 5

Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f^3(x) + f^2(x) + xf(x) + 6 = 0.$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ϵ της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$.

Απάντηση:

Θέμα 6

Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή και παραγωγίσιμη.

Αν $f(3) = 5$ και $f'(-3) = 2$:

(i) Να βρείτε τις εφαπτόμενες ϵ_1 και ϵ_2 της C_f στα σημεία $A(3, f(3))$ και

$A(-3, f(-3))$, αντίστοιχα .

(ii) Να βρείτε την απόσταση των παραλλήλων ευθειών ϵ_1 και ϵ_2 .

Απάντηση:

Θέμα 7

Για τον μιγαδικό z ισχύει: $|z - 2i - 1| = |5i - 6 - zi|$

α) Βρείτε τον γεωμ. τόπο του z .

β) Την χρονική στιγμή που η εικόνα του μιγαδικού z βρίσκεται στο σημείο $A(3,4)$ του προηγούμενου γεωμ. τόπου, το $\text{Re}(z)$ αυξάνεται με ρυθμό 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. αυτή τη χρονική στιγμή να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής:

i) του $\text{Im}(z)$ και ii) του $|z|$.

Απάντηση:

Θέμα 8

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ η πλευρά $A\Gamma$ αυξάνει με ρυθμό 0,2 cm/s, η πλευρά AB αυξάνει με ρυθμό 0,1 cm/s, και η γωνία A αυξάνει με ρυθμό 0,075 rad/s.

Βρείτε το ρυθμό μεταβολής α) της πλευράς $B\Gamma$ β) του εμβαδού του τριγώνου, όταν $a = 5$ cm, $\beta = 4$ cm, $\gamma = 3$ cm.

Απάντηση:

Θέμα 9

Ποδηλάτης κινείται σε κύκλο ακτίνας $\rho = 100 \text{ m}$, με ταχύτητα 30 km/h διαγράφοντας τόξο AB . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της χορδής AB τη χρονική στιγμή κατά την οποία η επίκεντρη γωνία θ του τόξου AB είναι $\pi/3$

Απάντηση:

Θέμα 10

Αν $\psi = 7 + 5\eta^2\theta$ και η γωνία θ μειώνεται σταθερά με ρυθμό 4 rad/sec , να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του ψ (ως προς τον χρόνο) όταν $\theta = \frac{5\pi}{12}$.

Απάντηση:

Θέμα 11

Μια σκάλα μήκους 4 m είναι τοποθετημένη σ' ένα τοίχο. Το κάτω μέρος της σκάλας γλιστράει στο δάπεδο με ρυθμό μεταβολής 0,2 m/sec . Τη χρονική στιγμή t_0 που η κορυφή της σκάλας απέχει από το δάπεδο 2 m , να βρείτε:

(i) Το ρυθμό μεταβολής της γωνίας της σκάλας με τον τοίχο .
(ii) Την ταχύτητα με την οποία πέφτει το άνω μέρος της σκάλας

Απάντηση:

Θέμα 12

Σημείο M κινείται πάνω στην ευθεία $\varepsilon : 2x + 3y = 5$. Αν η τετμημένη του σημείου την χρονική στιγμή t είναι $2t^2 + 1$, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του όταν το σημείο βρίσκεται στην θέση (19, -11) .

Απάντηση:

Θέμα 13

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 1 + \ln x$ και το σημείο A που η εφαπτομένη ε σε αυτό διέρχεται από το σημείο $B(0,1)$.

(i) Να βρείτε την εξίσωση της ε .

(ii) Αν ένα κινητό M κινείται κατά μήκος της καμπύλης C_f και καθώς περνάει από το A η τεταγμένη του x ελαττώνεται 4 cm/sec , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το A .

Απάντηση:

Θέμα 14

Έστω E το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζουν τα σημεία $O(0,0)$, $A(x,0)$ και $B(0,1 + \ln x)$, με $x > 1$. Αν το x μεταβάλλεται με ρυθμό μεταβολής 2 m/sec , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E , όταν $x = 4 \text{ m}$.

Απάντηση: