

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

Παράγωγος συνάρτηση-Κανόνες παραγώγισης

Θέμα 1

Σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις να σημειώσετε τη σωστή απάντηση, αιτιολογώντας την επιλογή σας.

1. Αν $f(x) = \ln(1 + \eta\mu x)$, τότε το όριο $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi}$ είναι:

A -1 B 0 Γ 1 Δ 2 E $+\infty$.

2. Αν $f(x) = x^3 - 2x$ και $3f(\alpha) - \alpha f'(\alpha) = 12$, τότε το α είναι:

A 3 B 2 Γ -1 Δ -2 E -3 .

3. Αν $f(x) = \frac{1}{2} \ln(1 - \sigma\upsilon\nu 2x) + 5$, τότε η $f'\left(\frac{\pi}{8}\right)$ είναι:

A $\sqrt{2} - 1$ B $1 - \sqrt{2}$ Γ $1 + \sqrt{2}$ Δ $\frac{\sqrt{2} + 2}{2}$ E $\frac{2 - \sqrt{2}}{2}$.

4. Αν $f(x) = (x^2 - 2)^6 (x^3 + 1)^3$, τότε η $f'(1)$ είναι:

A -132 B -60 Γ 0 Δ 60 E 132 .

5. Αν $f(x) = \ln \sqrt{\epsilon\phi x}$, τότε η $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ είναι:

A $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B $3\sqrt{3}$ Γ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ Δ $4\sqrt{3}$ E $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Απάντηση:

Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \ln \frac{3}{x-2}$.

(i) Να υπολογίσετε την $f'(x)$.

(ii) Να δείξετε ότι $3xf'(x) + 2e^{f(x)} + 3 = 0$.

Απάντηση:

Θέμα 3

Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη, να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης g όταν:

(i) $g(x) = \frac{xf(x)}{x^2+1}$ (ii) $g(x) = \eta\mu f^3(x)$ (iii) $g(x) = f(\eta\mu^3 x)$

Απάντηση:

Θέμα 4

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση:

Σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις να σημειώσετε τη σωστή απάντηση.

1. Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} . Αν $f(3x) = x^2g(x-2)$, $f'(3) = 4$ και $g(-1) = 6$, τότε το $f(3) + g'(-1)$ είναι

A. 6 B. 9 Γ. 12 Δ. 15 E. 18.

2. Αν $f(x) = \ln(\eta\mu^2x)$ και $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}$, τότε το x είναι ίσο με

A. 30° B. 45° Γ. 60° Δ. 75° E.

3. Αν $f(x) = \sqrt{x} \cdot \eta\mu\sqrt{x}$ τότε

A. $f'(0) = 0$ B. $f'(0) = \frac{1}{2}$ Γ. $f'(0) = 1$ Δ. $f'(0) = 2$

E. Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

4. Αν η συνάρτηση f είναι άρτια, τότε το άθροισμα $f'(-1) + f'(1)$ είναι ίσο με

A. $2f'(1)$ B. $f'(2)$ Γ. 0 Δ. $-2f'(1)$ E. $-f'(2)$.

5. Αν $f(x) = \sigma\upsilon\nu(e^x)$ και $g(x) = \eta\mu(\ln x)$, τότε η παράγωγος $(f \circ g)'(1)$ είναι

A. e B. $-\eta\mu 1$ Γ. $\sigma\upsilon\nu 1$ Δ. 1 E. e^e .

Απάντηση:

Θέμα 5

Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη. Θεωρούμε τις συναρτήσεις:
 $g(x) = f(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$ και $h(x) = f(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)$.

Να δείξετε ότι:

$$g''\left(-\frac{\pi}{4}\right) = h''\left(\frac{5\pi}{4}\right).$$

Απάντηση:

Θέμα 6

Αν $f(x) = \frac{x}{2}[\eta\mu(\ln x) - \sigma\upsilon\nu(\ln x)]$, $x > 0$ να δείξετε ότι: $|f'(x)| \leq 1$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$

Απάντηση:

Θέμα 7

1. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση τέτοια ώστε $f(x + \psi) = f(x) + f(\psi) + 3x\psi$ για κάθε $x, \psi \in \mathbb{R}$.

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 να δείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} .

2. Η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x, \psi \in (0, +\infty)$ ισχύει: $f(x\psi) = f(x) + f(\psi)$.

Αν $f'(1) = 2$ να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{2}{x}$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Απάντηση:

Θέμα 8

Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες στο \mathbb{R} . Αν η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $x^2g(x) + (1 + \eta\mu^2x)f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , να δείξετε ότι η συνάρτηση g δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Απάντηση:

Θέμα 9

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + ax + \beta}{x^2 - 2x - 3}$.

Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = k \in \mathbb{R} \text{ και } 5f'(0) + 3f(0) = 9.$$

Απάντηση:

Θέμα 10

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση:

Σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις να σημειώσετε τη σωστή απάντηση.

1. Αν $f(x) = |2x - |x - 3||$, τότε το $f'(2) + f'(4)$ είναι:

- Α. 1 Β. 2 Γ. 3 Δ. 4 Ε. 5.

2. Αν $f(x) = \frac{2(\alpha + \beta x)^{\frac{3}{2}}}{3\beta}$, τότε η $f'(0)$ είναι:

- Α.
- α
- Β.
- $\sqrt{\alpha}$
- Γ.
- $\sqrt[3]{\alpha}$
- Δ.
- 2α
- Ε.
- 3α
- .

3. Αν $f(x) = e^{\eta\mu^2(3x)}$, τότε η $\frac{f'(x)}{\eta\mu 6x}$ είναι ίση με

- Α.
- $3f(x)$
- Β.
- $2f(x)$
- Γ.
- $f(x)$
- Δ.
- $\frac{f(x)}{3}$
- Ε.
- $\frac{f(x)}{\eta\mu 3x}$
- .

4. Αν $f(2x + 3) = x^2 + \mu x - 4$ και $f'(5) = 3$, τότε το μ είναι:

- Α.
- -2
- Β.
- 2
- Γ.
- 4
- Δ.
- 6
- Ε.
- 8
- .

5. Αν $f(x) = 12\sqrt[3]{x} + x - 30$ και $g(x) = (x^3 - 5x + 4)^4$, τότε η $(g \circ f)'(8)$ είναι:

- Α.
- -84
- Β.
- -48
- Γ.
- 96
- Δ.
- 224
- Ε.
- 448
- .

Απάντηση:

Θέμα 11

Η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $g(-1) = 7$. Αν $f(x) = 3(x-2)^2 g(2x-5)$, να αποδείξετε ότι η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και να βρείτε την $f''(2)$.

Απάντηση:

Θέμα 12

Οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)} = e^{-x}$$

Να δείξετε ότι $f^2(x)[g'(x) - g(x)] = g^2(x)[f'(x) - f(x)]$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Απάντηση: