ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

Η παράγωγος…ως «όριο»

Θέμα 1

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases} x^2 ημ\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ και να δειχθεί ότι δεν είναι συνεχής.

Απάντηση:

Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=α_1\cdot ημx+α_2\cdot ημ2x+...+α_κ\cdot ημκx$ και ότι ισχύει: $|f(x)|\le|ημx|$ για κάθε $x\in R$. Δείξτε ότι $|α_1+2α_2+...+κα_κ|\le 1$.

Απάντηση:

Θέμα 2
Επιλέξατε τη σωστή απάντηση:

Σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις να σημειώσετε τη σωστή απάντηση.

1. Αν $f(x)=x^3+2x-1$, τότε η $f'(1)$ είναι:
Α. -5 Β. -3 Γ. 3 Δ. 5 Ε. 6.

2. Αν $f(x)=3-\frac{4}{x+1}$, τότε η $f'(1)$ είναι:
Α. $\frac{1}{3}$ Β. $\frac{1}{2}$ Γ. 1 Δ. 2 Ε. 3.

3. Αν $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}$, τότε η $f'\left(\frac{1}{4}\right)$ είναι:
Α. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ Β. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ Γ. $\frac{3}{\sqrt{3}}$ Δ. $\frac{4}{\sqrt{3}}$ Ε. $\frac{5}{\sqrt{3}}$.

4. Αν $f(x)=\sqrt{x^3+\frac{1}{x}}$, τότε η $f'(1)$ είναι:
Α. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ Β. $\frac{1}{3}$ Γ. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ Δ. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ Ε. $\frac{1}{4}$.

5. Αν $f(x)=\left|6-x^2\right|+3x+1$, τότε η $f'(1)$ είναι:
Α. 1 Β. 4 Γ. 5 Δ. 6 Ε. 7.

Θέμα 3

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$, για την οποία ισχύει: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(2x-5)-x}{x-3}=7$

α) Βρείτε το f(1).

β) Αφού δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 1, βρείτε το $f'(1)$.

γ) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f^2(x)-9}{\sqrt{x}-1}$.

Απάντηση:

Θέμα 4

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

1. Αν $f(x)=\left|x^2-6x+9\right|+4x-1$, τότε η $f'(3)$ είναι:

Α. 1 Β. 2 Γ. 3 Δ. 4 Ε. 5.

2. Αν $f(x)=\sqrt{\alpha x+5}$ και $f'(2)=-1$, τότε το α είναι ίσο με:

Α. -2 Β. -1 Γ. 0 Δ. 1 Ε. 2

3. Αν $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(5+3h)-f(5)}{h}=12$, τότε:

Α. $f'(5)=3$ Β. $f'(5)=4$ Γ. $f'(5)=5$ Δ. $f'(5)=6$ Ε. $f'(5)=12$.

4. Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=-2$ και η f είναι συνεχής στο $x_o=0$, τότε:

Α. $f(0)=-2$ Β. $f(-2)=0$ Γ. $f'(0)=0$ Δ. $f'(0)=-2$ Ε. $f'(0)=2$.

5. Αν $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_o+h)-f(x_o)-\alpha h}{h}=0$, $\alpha\in\mathbb{R}$, τότε:

Α. $f'(x_o)=0$ Β. $f'(x_o)=-\alpha$ Γ. $f'(x_o)=\alpha$ Δ. $f'(x_o)=x_o$ Ε. $f'(x_o)=h$

.

Θέμα 5

Αν η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική βαθμού τουλάχιστον 2, δείξτε ότι η $f(x)$ έχει παράγοντα το $(x-\rho)^2$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα και της f και της f'.

Εφαρμογή: να βρεθούν τα α, β ώστε το $f(x)=\alpha x^{2\nu}+\beta x^{\nu-1}+4$ $(\nu \geq 2)$ να έχει παράγοντα το $(x-1)^2$.

Απάντηση:

Θέμα 6

Δίνεται το πολυώνυμο $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0,\ \ \alpha_\nu \neq 0$ και $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_\nu$ πραγματικές ρίζες του. Να δείξετε ότι:

α) Για κάθε x διαφορετικό από τις ρίζες του ισχύει:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-\rho_1}+\frac{1}{x-\rho_2}+\ldots+\frac{1}{x-\rho_\nu}$$

β) Αν τα $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_\nu$ είναι διαφορετικά ανά δύο, η εξίσωση $[f'(x)]^2=f''(x)\cdot f(x)$ είναι αδύνατη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Απάντηση:

Θέμα 7

1. Οι συναρτήσεις $f,g:R\to R$ είναι παραγωγίσιμες στο $x_o=5$ και ικανοποιούν τις συνθήκες:

(i) $f(5)=g(5)$ και

(ii) $f(x)+x\le g(x)+5$, για κάθε $x\in R$.

Να δείξετε ότι $g'(5)-f'(5)=1$.

Απάντηση:

Θέμα 8

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στα σημεία $x_o=0$ και $x_o=3$ αντίστοιχα και ισχύει: $\left(f(x)\right)^2+\left(g(x-3)\right)^2=x^4-18x^2+81$ για κάθε $x\in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι:

(i) $f(3)=g(0)=0$

(ii) $\left(f'(3)\right)^2+\left(g'(0)\right)^2=36$.

Απάντηση:

Θέμα 9

1. Αν η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \alpha x+\beta & ,x>-1 \\ 3 & ,x=-1 \\ \gamma x^2+1 & ,x<-1 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_o=-1$, τότε

Α. $\alpha+\beta+\gamma=-1$ Β. $\alpha+\beta+\gamma=-2$ Γ. $\alpha+\beta+\gamma=3$ Δ. $\alpha+\beta+\gamma=-3$
Ε. $\alpha+\beta+\gamma=1$.

2. Αν η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2 & , x\le 3 \\ \alpha x-\beta & , x>3 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_o=3$, τότε:

Α. $\alpha=\beta=2$ Β. $\alpha+\beta=10$ Γ. $\alpha-\beta=-3$ Δ. $\beta=2\alpha$ Ε. $\alpha=2\beta$.

<u>Απάντηση:</u>

Θέμα 10

Αν για την συνάρτηση f ισχύουν $f(0)=2$ και $f'(0)=4$ να βρείτε την $g'(0)$ όταν

(i) $g(x)=2x+\dfrac{4}{f(x)}$ (ii) $g(x)=f^3(x)+x$.

<u>Απάντηση:</u>

Θέμα 11

1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_o, να δείξετε ότι και η συνάρτηση:
$g(x)=\begin{cases} f(x) & ,x\le x_o \\ f'(x_o)(x-x_o) & ,x>x_o \end{cases}$, είναι παραγωγίσιμη στο x_o.

2.Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(1)=f(2)$ και $2f'(1)=f'(2)$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} f(2x) & ,x\ge 1 \\ f(4x-3) & ,x<1 \end{cases}$, είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=1$.

Απάντηση:

Θέμα 12

Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει:

$$f(x+\psi) = f(x) + f(\psi) + 3x\psi(x+\psi), \text{ για κάθε } x, \psi \in R.$$

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_o = \alpha$ με παράγωγο $f'(\alpha) = 1 + 3\alpha^2$, να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R.

Απάντηση:

Θέμα 13

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$ με $f(0) = 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει : $f(x) + f(2x) + \cdots + f(2012x) \leq \eta\mu(2011x)$. Να δείξετε ότι $f'(0) = \frac{1}{1006}$.

Απάντηση:

Θέμα 14

Έστω $f:(0,+\infty)\rightarrow R$ συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

$f(x\psi)=f(x)+f(\psi)$, για κάθε $x,\psi\in(0,+\infty)$ και

$1-x\leq f(x)\leq\dfrac{1-x}{x}$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_o\in(0,+\infty)$.

<u>Απάντηση:</u>