

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

...κύκλος είναι και γυρίζει..

Θέμα 1

Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ να βρεθούν οι σχετικές θέσεις της ευθείας $\varepsilon: y=\lambda x-2$ και του κύκλου $C: x^2+y^2=1$

Απάντηση:

Θέμα 2

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων τομής των ευθειών

$$\varepsilon_1 : \lambda x - y - 1 = 0 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : x + \lambda y - \lambda = 0$$

Απάντηση:

Θέμα 3

• **Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)**

1. Η εξίσωση $x^2 + y^2 = a$ ($a > 0$) παριστάνει κύκλο.
2. Η εξίσωση $x^2 + y^2 + κx + λy = 0$ με $κ, λ \neq 0$ παριστάνει πάντα κύκλο.
3. Ο κύκλος με κέντρο $K(1, -1)$ που περνά από το σημείο $(-1, 1)$ έχει πάντα εξίσωση: $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 8$.
4. Η εξίσωση $x^2 + y^2 + a(x + y + 1) = 0$ παριστάνει κύκλο για κάθε θετικό a .
5. Το σημείο $(\frac{\eta\mu\theta}{2}, \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{2})$ ανήκει στον κύκλο $4(x - \eta\mu\theta)^2 + 4(y - \sigma\upsilon\nu\theta)^2 = 1$ για κάθε πραγματικό αριθμό θ .
6. Οι κύκλοι $x^2 + y^2 + 2x + 3y - 1 = 0$ και $x^2 + y^2 + 2x + 3y + \sqrt{2} = 0$ είναι ομόκεντροι.
7. Το σημείο του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$ με τετμημένη 2 βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y = x$.
8. Οι κύκλοι $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$ και $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 10$ εφάπτονται εξωτερικά.
9. Ο κύκλος $(x + 1)^2 + y^2 = 18$ τέμνει την ευθεία $y = x + 1$.
10. Τα σημεία $(-2, 2)$ και $(4, 2)$ του κύκλου $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$ είναι αντιδιαμετρικά.
11. Οι κύκλοι $x^2 + (y - 1)^2 = 3$ και $x^2 + (y - 1)^2 = \frac{10}{3}$ έχουν δύο κοινά σημεία.
12. Η εξίσωση $(x + y)^2 - 4 = 2xy$ παριστάνει κύκλο.

Θέμα 4

Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 = 4$ και το σημείο $A(8, -6)$. Να βρείτε σημείο M του κύκλου C τέτοιο ώστε η απόσταση (AM) να είναι ελάχιστη.

Απάντηση:

Θέμα 5

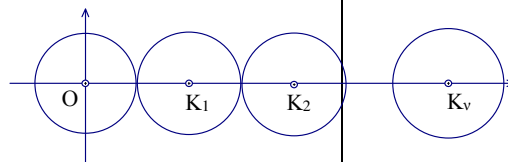
Στο διπλανό σχήμα ο πρώτος κύκλος C_0 έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = \rho^2$ και όλοι οι κύκλοι είναι ίσοι. Να βρεθούν:

α) οι εξισώσεις των κύκλων C_1, C_2, \dots, C_n (συναρτήσει του ρ)

β) το άθροισμα των αποστάσεων των κέντρων K_1, K_2, \dots

K_n από το κέντρο O

γ) οι κοινές εφαπτόμενες όλων των κύκλων.



Απάντηση:

Θέμα 6

Δίνονται οι ευθείες $(\epsilon) : (\eta\mu\theta)x - (\sigma\upsilon\nu\theta)y = \eta\mu 2\theta$ και $(\eta) : (\sigma\upsilon\nu\theta)x + (\eta\mu\theta)y = \sigma\upsilon\nu 2\theta$, με $\theta \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ϵ) , (η) τέμνονται, για κάθε τιμή του $\theta \in \mathbb{R}$.
- β) Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής των (ϵ) , (η) κινείται σε κύκλο.

Απάντηση:

Θέμα 7

• Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

1. Οι εξισώσεις $x = \rho\eta\mu\varphi$ και $y = \rho\sigma\upsilon\nu\varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ είναι οι παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου $C: x^2 + y^2 = \rho^2$.
2. Η εφαπτομένη ευθεία του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$ στο σημείο με τετμημένη 1 έχει εξίσωση $x + y = 1$.
3. Η εξίσωση $x^2 - 2x + 1 + y^2 = 5$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $(1, 0)$.
4. Η καμπύλη που παριστάνει η εξίσωση $x^2 + y^2 = a^2$ είναι γραφική παράσταση συνάρτησης.

5. Η σχέση $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ είναι τύπος συνάρτησης που παριστάνει ημικύκλιο ($-a \leq x \leq a$).
6. Ένας κύκλος έχει το κέντρο του στην ευθεία $y = x$. Έχει πάντα εξίσωση $(x - \alpha)^2 + (y - \alpha)^2 = \rho^2$.
7. Ένα σημείο (x_1, y_1) είναι εσωτερικό κύκλου με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ .
Ισχύει: $(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 < \rho^2$.
8. Τα κέντρα των κύκλων $C_1: x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ και $C_2: x^2 + y^2 + \beta x + \alpha y + \gamma = 0$
είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $y = x$
9. Η εξίσωση $x^2 + y^2 + \sqrt{\alpha}x + \sqrt{\alpha}y - \alpha = 0$ παριστάνει κύκλο όταν $\alpha > 0$
10. Ο κύκλος $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$ εφάπτονται στους άξονες $x'x$ και $y'y$.
11. Έστω ο κύκλος $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$
- α) Αν $\alpha = 0$ έχει κέντρο στον άξονα $x'x$
 - β) Αν $\beta = 0$ και $\gamma = 0$ εφάπτεται στον άξονα $x'x$
 - γ) Αν $\gamma = 0$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων
 - δ) Αν $\alpha + \beta = 0$ το κέντρο του βρίσκεται στην ευθεία $y = -x$
 - ε) Αν $\alpha > 0$ και $\beta > 0$, το κέντρο του βρίσκεται στο 3^ο τεταρτημόριο
12. Οι κύκλοι $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$ και $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ είναι ομόκεντροι όταν $\alpha = -2$ και $\beta = 4$.
13. Οι παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου $x^2 + y^2 = 16$ είναι οι $x = 4\cos\varphi$ και $y = 4\sin\varphi$ με $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Θέμα 8

Θεωρούμε τον κύκλο $C: x^2 + y^2 = 4$ και την ευθεία $\varepsilon: y = 2x + 5$.

- i) Να δείξετε ότι ο κύκλος και η ευθεία δεν έχουν κοινό σημείο.
- ii) Από ένα σημείο M της ευθείας ε φέρνουμε τις εφαπτομένες στον κύκλο και ονομάζουμε A και B τα σημεία επαφής. Να δείξετε ότι, όταν το σημείο M διαγράφει την ευθεία ε , η ευθεία AB διέρχεται από ένα σταθερό σημείο

Απάντηση:

Θέμα 9

- i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x - 2ay + 2a = 4$ παριστάνει κύκλο για κάθε $a \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.
- ii) Για ποια τιμή του a ο παραπάνω κύκλος εφάπτεται:
α) του άξονα $x'x$,
β) της ευθείας $y = -x$

Απάντηση:

Θέμα 10

- A.** Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$, όπου μ, λ πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός. Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή των μ, λ , η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο που διέρχεται από $O(0,0)$
- B.** Έστω ότι για τους πραγματικούς αριθμούς μ, λ ισχύει η σχέση $3\mu + 2\lambda = 0$.
- α)** Να δείξετε ότι, όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$ για τις διάφορες τιμές των μ και λ , έχουν τα κέντρα τους σε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- β)** Να βρείτε τα μ, λ έτσι, ώστε, ο αντίστοιχος κύκλος να τέμνει τον άξονα x' στο σημείο με $A(4,0)$
- γ)** Για τις τιμές των μ, λ που βρήκατε στο ερώτημα β να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου KOA , όπου K το κέντρο του αντιστοίχου κύκλου.

Απάντηση:

Θέμα 11

Δίνεται η εξίσωση $(C_\lambda): x^2+y^2 + (\lambda-2)x-2(\lambda + 2)y + 13\lambda-20=0, \lambda \in \mathbb{R} .$

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} .$
- β) Να βρείτε το κέντρο του παραπάνω κύκλου και να δείξετε ότι αυτό κινείται σε ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} .$
- γ) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος (C_λ) διέρχεται από δύο σταθερά σημεία.

Απάντηση:

Θέμα 12

Υποθέτουμε ότι η ευθεία $\psi = \mu\chi$ είναι εξίσωση χορδής του κύκλου (c) :
 $x^2 + \psi^2 - 2\alpha\chi = 0$. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο τη χορδή έχει εξίσωση
 $(1+\mu^2) \cdot (\chi^2 + \psi^2) - 2\alpha(\chi + \mu\psi) = 0$

Απάντηση:

Θέμα 13

Ναδειχθεί ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x = 0$ παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Να βρεθεί η γραμμή πάνω στην οποία βρίσκονται τα κέντρα αυτών των κύκλων.

Απάντηση:

Θέμα 14

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_a: ax - y = 0$ και $\zeta_a: x + ay = 2, a \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$, οι ευθείες ε_a διέρχονται από σταθερό σημείο A και οι ευθείες ζ_a διέρχονται από σταθερό σημείο B , τα οποία και να προσδιορίσετε.

β. Αν $M(x, y)$ είναι το σημείο τομής των ε_a και ζ_a , να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ το M κινείται σε κύκλο, του οποίου να βρείτε την εξίσωση.

Απάντηση: