ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

…και ΄΄συνεχίζουμε..΄΄

Θέμα 1

Αν η f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(x)+f(x+1)=x^2+x-1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και είναι συνεχής στο $x=0$, να δειχθεί ότι η f είναι συνεχής στο 1.

Απάντηση:

Θέμα 2

Επιλέξατε τη σωστή απάντηση:

1. Αν η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x}{3x} & , x \neq 0 \\ \kappa & , x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο σημείο $x_o = 0$, τότε ο $\kappa \in \mathbb{R}$ είναι ίσος με

Α. $-\dfrac{1}{3}$ Β. $-\dfrac{1}{6}$ Γ. 0 Δ. $\dfrac{1}{6}$ Ε. $\dfrac{1}{3}$.

2. Αν η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & , x > 2 \\ 2x+\alpha & , x \leq 2 \end{cases}$ είναι συνεχής, τότε ο $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι ίσος με

Α. -2 Β. -1 Γ. 0 Δ. 1 Ε. 2.

Θέμα 3

Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$, με $f(R) = R$, για την οποία ισχύει:

$|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$, για κάθε $x, y \in R$ (1). Να δείξετε:

α) Η f αντιστρέφεται

β) $|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)| \leq |x - y|$, για κάθε $x, y \in R$.

γ) Η f^{-1} είναι συνεχής

Απάντηση:

Θέμα 4

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

1. Αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{9x^2 - 1}{3x - 1} & , x > 0 \\ \alpha x + \beta & , x \leq 0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο σημείο $x_o = 0$, τότε ο $\beta \in \mathbb{R}$ είναι ίσος με

Α. -2 Β. -1 Γ. 1 Δ. 2 Ε. 3.

2. Αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + 4 & , x > 1 \\ 7 & , x = 1 \\ 5x + \beta & , x < 1 \end{cases}$ είναι συνεχής, τότε το $\alpha + \beta$ είναι ίσο με

Α. 1 Β. 2 Γ. 3 Δ. 4 Ε. 5.

Θέμα 5

1. Αν για κάθε $x \neq 1$ ισχύει $f(x) \geq \frac{1}{|x-1|}$, δείξτε ότι η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

2. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f(x) \geq \frac{f^2(x) + \sigma\upsilon\nu^2 x}{2}$ για κάθε $x \in R$,
να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

Απάντηση:

Θέμα 6

1. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0=2$ και $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\eta\mu(x-2)-f(x)(x-2)}{x^2-4} = 1$, να βρεθεί το f(2)

2. Αν οι συναρτήσεις f και φ πληρούν την σχέση $f^2(x)+x^2\varphi^2(x)=x^2-1$, να δειχθεί ότι οι f , φ είναι συνεχείς στο σημείο $x_0=1$

Απάντηση:

Θέμα 7

α) Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το R, είναι συνεχής στο 0 και ισχύει
$f(x+y)=f(x)+f(y)$, για κάθε $x, y \in R$, να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο R.

β) Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$, είναι συνεχής στο 1 και ισχύει
$f(x \cdot y)=f(x)+f(y)$, για κάθε $x, y \in (0,+\infty)$,
να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$.

γ) Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $(0,+\infty)$, $f(x) \neq 0$ και
$f(x \cdot y)=f(x) \cdot f(y)$, για κάθε $x, y \in (0,+\infty)$, δείξτε ότι αν:
i) Η f είναι συνεχής στο 1, τότε είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$.
ii) Η f είναι συνεχής στο 2, τότε είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$.

δ) Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το R, είναι συνεχής στο $\alpha \in R$
και ισχύει $f(x+y)=f(x) \cdot f(y)$, για κάθε $x, y \in R$,
να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο R.

Απάντηση:

Θέμα 8

Η f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει f(0)=3 και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-3-\varepsilon\varphi x}{x^2-x}=5$

α) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο 0

β) Να βρείτε τα όρια i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-3}{x}$, ii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|2f(x)-3|-3}{x}$

Απάντηση:

Θέμα 9

Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f(x)\geq\frac{f^2(x)+\sigma\upsilon\nu^2 x}{2}$ για κάθε $x\in R$,

να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

Απάντηση:

Θέμα 10

Να υπολογισθεί ο αριθμός f(0) για την συνάρτηση f : (-1,1) $\rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία

α) Η f είναι συνεχής στο 0 και β) $\sqrt{4+x^4 \eta\mu \frac{1}{x^2}} \leq 2+x^2 f(x) \leq \sqrt{4+x^6}$

Απάντηση:

Θέμα 11

1.Αν $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(3+h)}{h}=5$ και η f είναι συνεχής στο $x_0=3$, βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$

2.Αν η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xf(x)-\eta\mu 3x}{x^2+x}=2$, να βρεθεί το f(0)

Απάντηση:

Θέμα 12

Δίνεται η ορισμένη στο R και συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}=2005.$$

α) Να αποδείξετε ότι: i) f(0) = 0 ii) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$

β) Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in R$ έτσι ώστε: $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\lambda f^2(x)}{2x^2+f^2(x)}=3.$ *(ΠΕ)*

Απάντηση:

Θέμα 13

Αν f: $\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει f(αβ)=f(α)f(β), για κάθε α, $\beta\in\mathbb{R}^*$ και $f(x)\neq 0$, $x\in\mathbb{R}^*$ να δειχθεί:

α) Αν η f είναι συνεχής στο x_0=1, να δειχθεί ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$

β) Αν η f είναι συνεχής στο $\xi\in\mathbb{R}^*$, να δειχθεί ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$

Απάντηση:

Θέμα 14

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως **σωστό (Σ)** ή **λάθος (Λ)**

1. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} = +\infty$, τότε η f δεν είναι συνεχής στο x_0

2. Αν οι f και g δεν είναι συνεχείς στο x_0 του πεδίου ορισμού τους , τότε και η f+g δεν είναι συνεχής στο x_0

3. Αν η f είναι συνεχής στο x_0 , τότε και η f^2 είναι συνεχής στο x_0

4. Αν η f είναι συνεχής στο x_0 , τότε $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) - f(x_0)] = 0$

5. Αν η f είναι συνεχής στο x_0 , με $f(x_0) \neq 0$, τότε κοντά στο x_0 οι τιμές της f είναι ομόσημες του $f(x_0)$

6. Αν η |f| είναι συνεχής στο x_0 , τότε και η f είναι συνεχής στο x_0

7. Αν η f είναι συνεχής στο x_0 και η g δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε η f+g δεν είναι συνεχής στο x_0

8. Αν $(1 - x)(1 + 5x) \leq f(x) \leq (3x + 1)^2$, τότε η f είναι συνεχής στο 0.