ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

Θεωρήματα συνέχειας

Θέμα 1

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως **σωστό (Σ)** ή **λάθος (Λ)**

1. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} = +\infty$, τότε η f δεν είναι συνεχής στο x_0
2. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β], η εξίσωση f(x) = 0 δεν έχει ρίζα στο (α, β) και υπάρχει ξ ε (α, β) ώστε f(ξ) < 0, τότε θα ισχύει f (x) < 0 για κάθε x ε (α, β).
3. Αν οι f και g δεν είναι συνεχείς στο x_0 του πεδίου ορισμού τους , τότε και η f+g δεν είναι συνεχής στο x_0
4. Αν η f είναι συνεχής στο x_0 , τότε και η f^2 είναι συνεχής στο x_0
5. Αν η f είναι συνεχής στο x_0 , τότε $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x) - f(x_0)] = 0$
6. Αν η f είναι συνεχής στο x_0 , με $f(x_0) \neq 0$, τότε κοντά στο x_0 οι τιμές της f είναι ομόσημες του $f(x_0)$
7. Αν η |f| είναι συνεχής στο x_0 , τότε και η f είναι συνεχής στο x_0
8. Αν η f είναι συνεχής στο x_0 και η g δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε η f+g δεν είναι συνεχής στο x_0
9. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β], και παίρνει δύο διαφορετικές τιμές $f(x_1)$, $f(x_2)$ με $x_1, x_2 \in$ [α, β], τότε παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(x_1)$ και $f(x_2)$.
10. Αν για μια συνεχή f στο $\mathbb{R}$, ισχύει $f(x_1) = 1$ και $f(x_2) = 4$, τότε υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = e$.
11. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα [α, β], τότε το σύνολο τιμών της είναι [f (α), f (β)].
12. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [α, β], τότε το σύνολο τιμών της είναι [f (β), f (α)].

Θέμα 2

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)=-4$ και $f(\beta)=4$.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f^2(x)=2f(x)+3$$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (α,β).

Απάντηση:

Θέμα 3

Έστω f συνάρτηση συνεχής στο [0,1]. Αν για κάθε $x\in[0,1]$ ισχύει $-1<f(x)\le 0$ να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in[0,1]$ ώστε:

$$f^2(x_o)+f(x_o)+x_o=0.$$

Απάντηση:

Θέμα 4

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως **σωστό (Σ)** ή **λάθος (Λ)**

1. Κάθε συνεχής συνάρτηση f στο [α, β] με $f(\alpha) \neq f(\beta)$, παίρνει μόνο τις τιμές μεταξύ των f (α) και f (β).

2.Αν $(1 - x)(1 + 5x) \leq f(x) \leq (3x + 1)^2$, τότε η f είναι συνεχής στο 0.

3.Αν η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, τότε το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $\left(\lim_{x\to 0^+} f(x)\ ,\ \lim_{x\to +\infty} f(x)\right)$.

4.Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [α, β]. Αν η f είναι '1 – 1' στο [α, β], τότε είναι και γνησίως μονότονη στο [α, β].

5.Αν η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ είναι συνεχής και 1 - 1 στο Δ, τότε η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής στο f (Δ).

6.Κάθε συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

7.Αν $f(\alpha)f(\beta)<0$ και για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$ είναι $f(x) \neq 0$, τότε η f είναι συνεχής στο [α,β]

8.Αν η f δεν έχει ελάχιστη τιμή , τότε η f δεν είναι συνεχής

9.Αν η f είναι συνεχής στο [α,β] , τότε το f([α,β]) είναι κλειστό διάστημα

10.Αν η f είναι συνεχής στο Δ , τότε το f(Δ) είναι διάστημα ή μονοσύνολο

11.Αν η f είναι συνεχής στο Δ , τότε το f(Δ) είναι δυνατόν να περιέχει δύο στοιχεία

12.Αν $f(\alpha) \neq f(\beta)$ και η f παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές μεταξύ f(α) και f(β), τότε f είναι συνεχής στο [α,β]

Θέμα 5

Αν η f είναι συνεχής στο [1,3] να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,3)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi) = \frac{\text{συν}\xi}{\xi^2 - 4\xi + 3}.$$

Απάντηση:

Θέμα 6

1.Δίνετε η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$. Αν $5\alpha+3\beta+3\gamma=0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[0,2]$.

2.Η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $\alpha\beta>0$ είναι συνεχής και έχει σύνολο τιμών το $[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$, τέτοιο ώστε:

$$\xi\cdot f(\xi)=\alpha\cdot\beta\ .$$

Απάντηση:

Θέμα 7

Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(2,10)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi)=\frac{25-4\xi}{\xi^2-12\xi+20}\ .$$

Απάντηση:

Θέμα 8

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=x^2+\beta x+\gamma$ και $g(x)=-x^2+\beta x+\gamma$ με $\gamma\neq 0$. Αν $f(\rho_1)=g(\rho_2)=0$ με $\rho_1<\rho_2$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)+2g(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (ρ_1,ρ_2).

Απάντηση:

Θέμα 9

Έστω $f,\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις τέτοιες ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:
$\alpha\beta f^2(x)+(\alpha+\beta)g(x)+\alpha\beta x=0$ με $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}^*$ και $\alpha+\beta\neq 0$.

Απάντηση:

Θέμα 10

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[-3,5\right]$ με $f(-3)\neq 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\alpha\in\left(-3,5\right)$, τέτοιο ώστε $\frac{8}{\alpha+3}f(\alpha)=f(5)+f(-3)$.

Απάντηση:

Θέμα 11

Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x+1)=-f(x)$.

Να αποδείξετε ότι:

(i) Η f είναι περιοδική.

(ii) Για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$, υπάρχει $x_o\in\left[\alpha,\alpha+1\right]$ τέτοιο ώστε $f(x_o)=f(x_o+1)$.

Απάντηση:

Θέμα 12
Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει: $f(2)+f(6)<10<f(3)+f(5)$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha+\beta=8$ τέτοιοι ώστε να ισχύει $f(\alpha)+f(\beta)=10$.

Απάντηση:

Θέμα 13
Η συνάρτηση $f:[-\alpha,\alpha]\to\mathbb{R}$, $(\alpha>0)$ είναι συνεχής και έχει σύνολο τιμών το $[-\alpha,\alpha]$. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τις ευθείες $\varepsilon_1:\psi=x$ και $\varepsilon_2:\psi=-x$ τουλάχιστον σ' ένα σημείο.

Απάντηση:

Θέμα 14

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως **σωστό (Σ)** ή **λάθος (Λ)**

1.Αν x_1 , x_2 διαδοχικές ρίζες της συνεχούς συνάρτησης f τότε στο διάστημα (x_1,x_2) είναι $f(x)>0$ ή $f(x)<0$

2.Μια συνεχής συνάρτηση f με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα

3.Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις έχουν σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$

4.Το σύνολο τιμών μιας ρητής συνάρτησης δεν μπορεί να είναι το $\mathbb{R}$

5.Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} -1 \ , & \text{αν } x<0 \\ 1 \ , & \text{αν } x>0 \end{cases}$ είναι συνεχής

Θέμα 15

Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και περιοδική με περίοδο Τ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_o \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε:

$$f\left(x_o+\frac{T}{2}\right)=f\left(x_o\right).$$

Απάντηση: