

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

Εντός «ορίων»!

«...ήδη ένα όριο ήμουν ,ένα μη περαιτέρω...»

Θέμα 1

Ελέγξατε την ορθότητα των παρακάτω προτάσεων:

- 1 . Αν $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- 2 . Αν $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, τότε $x_0 \in A$
- 3 . Αν η $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ έχει όριο στο $x_0 \in A$, τότε αυτό είναι μοναδικό
- 4 . Για να δείξουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ μπορούμε δείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - \ell] = 0$
- 5 . Ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0 + h) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
- 6 . Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, τότε και $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |\ell|$
- 7 . Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \ell$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ ή $-\ell$
- 8 . Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, τότε και $\lim_{x \rightarrow x_0} f^{2011}(x) = 0$
- 9 . Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$, τότε και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$
10. Αν τα πλευρικά όρια της f στο x_0 είναι ίσα , τότε υπάρχει το όριο της f
11. Αν για $x < x_0$ είναι $f(x) > 0$ και για $x > x_0$ είναι $f(x) < 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$
12. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \ell$ τότε υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και το $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

Θέμα 2

Επιλέξατε τη σωστή απάντηση:

1. Το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x}{|x|} + \frac{|x|}{x} \right|$ είναι ίσο με
 Α. 0 Β. 1 Γ. 2 Δ. 3 Ε. Δεν υπάρχει
2. Το όριο $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 10x + 9}{\sqrt{x} - 3}$ είναι ίσο με
 Α. 8 Β. 16 Γ. 24 Δ. 32 Ε. 48
3. Το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x} - 1}{3 - 2\sqrt{2x}}$ είναι ίσο με
 Α. $7 + 2\sqrt{2}$ Β. $7 - 2\sqrt{2}$ Γ. $9 - \sqrt{2}$ Δ. $1 + \sqrt{2}$ Ε. 0

Θέμα 3

Αν για τις συναρτήσεις f, g ορισμένες στο \mathbb{R} ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)\eta\mu x - x f(x)}{2x} = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) \cdot \eta\mu x + x \cdot f(x)}{\eta\mu x} = \frac{1}{2}, \text{ τότε να βρεθεί το όριο στο } x_0 = 0 \text{ των συναρτήσεων } f \text{ και } g.$$

Απάντηση:

Θέμα 4

Ελέγξατε την ορθότητα των παρακάτω:

1. Αν η f έχει θετικό όριο, τότε οι τιμές της είναι θετικές στο πεδίο ορισμού της
2. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε οι τιμές της f είναι αρνητικές κοντά στο x_0
3. Αν οι τιμές των f και g είναι άνισες, τότε και τα όριά τους στο x_0 είναι ομοίως άνισα
4. Υπάρχουν συναρτήσεις με θετικές τιμές κοντά στο x_0 , που το όριό τους είναι 0
5. Υπάρχουν συναρτήσεις με αρνητικές τιμές κοντά στο x_0 , που το όριό τους είναι θετικό
6. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)] = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$
7. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)]$ τότε ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
8. Αν είναι $|f(x) - \ell| < 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$
9. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = \ell$, τότε $\ell > 0$
10. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \ell$, τότε $\ell \geq 0$
11. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = \ell$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sqrt{\ell}$
12. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha_0$, $\lim_{x \rightarrow \alpha_0} g(x) = \ell$ και $f(x) \neq \alpha_0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$

Θέμα 5

Να αποδειχθεί ότι: **i)** $\lim_{x \rightarrow 0} \eta\mu\chi\sigma\nu x \left(\eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0$

$$\mathbf{ii)} \lim_{x \rightarrow 0} \left(x + \eta\mu \frac{\pi}{x} \right) \left(\sqrt{1+x^2} - 1 \right) = 0 \quad \mathbf{iii)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{\varepsilon\phi \frac{\pi x}{4}} - 1}{x-1} = \frac{\pi}{4}.$$

Απάντηση:

Θέμα 6

Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \sqrt{x}}{x} = 8$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - 1}{x} = 3$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x) - \sqrt{x}}{\eta\mu 2x}$.

Απάντηση:

Θέμα 7

Επιλέξτε την ορθή απάντηση:

1. Το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu \frac{\pi x}{4} + \epsilon\phi \frac{\pi}{2x}}{x^2 - 2}$ είναι ίσο με
A. 0 **B.** 1 **Γ.** 2 **Δ.** 3 **Ε.** 4

2. Το όριο $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\frac{1}{2} - \sigma\upsilon\nu x}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \eta\mu x}$ είναι ίσο με
A. $-\sqrt{3}$ **B.** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **Γ.** 0 **Δ.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **Ε.** $\sqrt{3}$

3. Το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu x}}{x}$ είναι ίσο με
A. 0 **B.** $\frac{1}{2}$ **Γ.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **Δ.** 1 **Ε.** $\sqrt{2}$

4. Το όριο $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{1 + \eta\mu^3 x}$ είναι ίσο με
A. -1 **B.** $-\frac{2}{3}$ **Γ.** 0 **Δ.** $\frac{2}{3}$ **Ε.** 1

Θέμα 8

Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες κοντά στο x_0 . Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ και

$f(x) \cdot g(x) \neq 0$, κοντά στο x_0 , να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^3(x) + g^3(x) \cdot \eta\mu x}{f^2(x) + g^2(x)} = 0$

Απάντηση:

Θέμα 9

Ελέγξτε την ορθότητα των παρακάτω προτάσεων:

1. Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(ax)}{x} = a$
2. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$ τότε ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
3. Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{f^2(x)}}{f(x)} = 1$
4. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0
5. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$
6. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = 0$
7. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -1$
8. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ τότε η f έχει θετικές τιμές στο πεδίο ορισμού της
9. i) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \neq 0$, τότε το $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)]$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$
 ii) Στην περίπτωση αυτή το πρόσημο είναι το ίδιο με το πρόσημο του ορίου της g
10. i) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, η g διατηρεί πρόσημο κοντά στο x_0 και το $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)]$ υπάρχει, αυτό είναι $+\infty$ ή $-\infty$
 ii) Στην περίπτωση αυτή το πρόσημο είναι το ίδιο με το πρόσημο των τιμών της g
11. Οι απροσδιόριστες μορφές παρουσιάζονται κατά τον υπολογισμό των ορίων
12. Όλες οι πράξεις με το $+\infty$ ή το $-\infty$ είναι μη επιτρεπτές

Θέμα 10

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση:

1. Το όριο $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\eta\mu^2 x - \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu 2x}$ είναι ίσο με
 Α. $-\frac{1}{2}$ Β. $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ Γ. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ Δ. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ Ε. $\frac{1}{4}$
2. Το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2\eta\mu\left(\frac{x-2}{2}\right) - 4}{x-2}$ είναι ίσο με
 Α. 1 Β. 2 Γ. 3 Δ. 4 Ε. 5
3. Το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\varepsilon\phi x - x}{\eta\mu x}$ είναι ίσο με
 Α. -1 Β. 0 Γ. $\frac{1}{2}$ Δ. 1 Ε. 2

Θέμα 11

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση:

1. Το όριο $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 10x + 9}{\sqrt{x} - 3}$ είναι ίσο με

- Α. 8 Β. 16 Γ. 24 Δ. 32 Ε. 48

2. Το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x} - 1}{3 - 2\sqrt{2x}}$ είναι ίσο με

- Α.
- $7 + 2\sqrt{2}$
- Β.
- $7 - 2\sqrt{2}$
- Γ.
- $9 - \sqrt{2}$
- Δ.
- $1 + \sqrt{2}$
- Ε. 0

3. Αν $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - \alpha\sqrt{x}}{x^2 - 9x} = \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$ τότε το β είναι ίσο με

- Α.
- $\frac{1}{9}$
- Β.
- $\frac{1}{12}$
- Γ.
- $\frac{1}{18}$
- Δ.
- $\frac{1}{24}$
- Ε.
- $\frac{1}{27}$

4. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x^2 - 4} = 3$, το $\alpha + \beta$ είναι

- Α. -12 Β. -8 Γ. -4 Δ. -3 Ε. 1

5. Το όριο $\lim_{\alpha \rightarrow x} \frac{x^2 - \sqrt{\alpha x^3}}{\alpha - x}$ είναι ίσο με

- Α.
- $-\frac{x}{2}$
- Β.
- $-x^4$
- Γ.
- $-x^3$
- Δ.
- $-x^2$
- Ε.
- $-x$

6. Το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x\sqrt{x} - 2\sqrt{2}}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$ είναι ίσο με

- Α.
- $\frac{1}{6}$
- Β. 1 Γ. 6 Δ. 12 Ε.
- $6\sqrt{2}$

Θέμα 12Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες στο \mathbb{R} και για κάθε $x \neq 0$ ικανοποιούν τη σχέση

$$x^2 (f(x))^2 + (g(x))^2 \leq x^4 \eta\mu \frac{2\pi}{x}.$$

Να υπολογιστούν τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.Απάντηση:

Θέμα 13

Ελέγξτε την ορθότητα των παρακάτω προτάσεων:

1. Στο $+\infty$ και το $-\infty$ δεν υπάρχουν πλευρικά όρια
2. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ τότε ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$
3. Από την ανισότητα $|\eta\mu x| \leq |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με το κριτήριο παρεμβολής αποδεικνύεται ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \eta\mu x = 0$
4. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ τότε $+\infty$
5. Αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
6. Αν $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{f(x)} = \infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$
7. Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις δεν έχουν όριο στο $+\infty$
8. Τα $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\epsilon\phi x \cdot \sigma\phi x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x)$ υπάρχουν

Θέμα 14

- (i) Αν $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + x^2 - x + 2] = 3$ να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 2f(x) - 3}{f^2(x) - 1} = 2$
- (ii) Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + x}{x - 1} = 2$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - f(x) - 2}{\sqrt{f^2(x) + 3} - 2}$.

Απάντηση:

Θέμα 15

Σχεδιάζοντας πρόχειρες γραφικές παραστάσεις χαρακτηρίστε ως **σωστό** ή **λάθος** τις παρακάτω προτάσεις

1. Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι άρτια και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (ανάλογα αν το όριο είναι ∞)

2. Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\ell$ (ανάλογα αν το όριο είναι ∞)

3. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα κοντά στο x_0

4. Αν $f(x) < 0$ και f γνησίως αύξουσα κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

5. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε περιοχή του $+\infty$

6. Αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε περιοχή του $-\infty$

7. Αν f γνησίως αύξουσα, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, τότε και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = +\infty$

8. Αν f γνησίως αύξουσα στο (α, x_0) και f γνησίως φθίνουσα στο (x_0, β) , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$