

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

Κατ'...ευθείαν!

Θέμα 1

- Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

1. Συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας (ϵ) είναι η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον $x'x$
2. Η ευθεία η οποία διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_1, y_2)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης μηδέν.
3. Υπάρχουν δύο ευθείες ϵ_1, ϵ_2 με συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 αντίστοιχα για τις οποίες ισχύει συγχρόνως
 $\lambda_1 = \lambda_2$ και $\lambda_1 \lambda_2 = -1$.
4. Οι ευθείες με εξισώσεις $y = \frac{1}{|\lambda|} x$ και $y = -\lambda x$ είναι κάθετες για κάθε $\lambda \neq 0$.
5. Οι ευθείες $y = -\frac{\kappa}{3} x + 1$ και $y = -\lambda x + 2$ είναι παράλληλες. Τότε ισχύει $\kappa = 3\lambda$.
6. Οι ευθείες $y = 2x + 1$ και $4x - 2y + 5 = 0$ είναι παράλληλες.
7. Οι διχοτόμοι των γωνιών των αξόνων $x'x, y'y$ έχουν εξισώσεις $y = x$ και $y = -x$ και τέμνονται κάθετα.
8. Οι ευθείες $y = 2$ και $y = 2x$ είναι παράλληλες.
9. Οι ευθείες $5x + y = 1$ και $x - 5y - 1 = 0$ είναι κάθετες.
10. Τα σημεία $A(\kappa, \alpha), B(\lambda, \alpha), \Gamma(\mu, \alpha)$ είναι συνευθειακά.
11. Τα σημεία $A(\alpha + \beta, \gamma), B(\beta + \gamma, \alpha), \Gamma(\gamma + \alpha, \beta)$ είναι συνευθειακά αν $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$.
12. Από το σημείο $A(x_0, y_0)$ περνά μία μόνο ευθεία με δεδομένο συντελεστή διεύθυνσης λ .
13. Δίνονται τα σημεία $A(-3, -1), B(2, 2), \Gamma(-3, 4)$ και $\Delta(3, -6)$. Η ευθεία AB είναι κάθετη προς την ευθεία $\Gamma\Delta$.
14. Η εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο $(1, 1)$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ίση με 135° είναι $x + y = 0$.
15. Η ευθεία $\frac{x}{\beta} + \frac{y}{\alpha} = 1$ με $\alpha, \beta \neq 0$ τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(\alpha, 0)$ και $B(0, \beta)$.

Θέμα 2

Εστω η ευθεία $\varepsilon: 8x-4y=11$ και τα σημεία $A(\lambda, 1)$, $B(2, \lambda)$, που είναι συμμετρικά ως προς κέντρο συμμετρίας σημείο της ε . Να βρεθούν:

- Ο $\lambda \in \mathbb{R}$
- Η οξεία γωνία φ που σχηματίζει η ευθεία ε με την AB .

Απάντηση:

Θέμα 3

Θεωρούμε τα σημεία $A(-2t+6, 0)$ και $B(0, 4t-2)$. Όταν το t διατρέχει το \mathbb{R} , να βρείτε:

- Την ελάχιστη απόσταση (AB)
- Το γ.τ. του μέσου M του ευθυγράμμου τμήματος AB .

Απάντηση:

Θέμα 4

Ελέγξτε την ορθότητα των παρακάτω:

1. Όταν ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας δεν ορίζεται, τότε η εξίσωσή της είναι της μορφής $x=x_0$.
2. Η γωνία που σχηματίζει η ευθεία $3x + \sqrt{3}y + 1 = 0$ με τον άξονα $x'x$ είναι 120° .
3. Η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ είναι πάντα εξίσωση ευθείας.
4. Αν $A \neq B$, τότε η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει πάντοτε ευθεία.
5. Στην ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης. Τότε ισχύει $B=0$.
6. Το διάνυσμα $\vec{\eta} = (-2, 1)$ είναι κάθετο στην ευθεία $x + y + 2 = 0$.
7. Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$.
8. Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\eta} = (A, -B)$.
9. Δύο ευθείες παράλληλες στα διανύσματα $\vec{\delta}_1 = (A, B)$ και $\vec{\delta}_2 = (-B, A)$ αντίστοιχα είναι μεταξύ τους κάθετες.
10. Μια ευθεία κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (A, B)$ με $B \neq 0$ έχει εξίσωση της μορφής: $Ax + By + \Gamma = 0$.
11. Η απόσταση του σημείου $M_0(x_0, y_0)$ από την ευθεία $(\epsilon): Ax + By + \Gamma = 0$ είναι d

$$(M_0, \epsilon) = \frac{Ax_0 + By_0 + \Gamma}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$
12. Η απόσταση $d(M_0, \epsilon)$ του σημείου $M_0(x_0, y_0)$ από την ευθεία $(\epsilon): Ax + By + \Gamma = 0$ επαληθεύει την ισότητα $|Ax_0 + By_0 + \Gamma| = d(M_0, \epsilon) \sqrt{A^2 + B^2}$
13. Το εμβαδόν ενός τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίσο με την ορίζουσα $\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma})$.
14. Όλα τα διανύσματα με κοινό φορέα έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης.
15. Η ευθεία $y = k^2x + 1$ σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα $x'x$ για κάθε $k \neq 0$.

«Μην ανησυχείς για το τι σκέπτονται οι άλλοι για εσένα. Είναι απασχολημένοι με το να ανησυχούν τι σκέπτεσαι εσύ για αυτούς.»

Θέμα 5

Θεωρούμε την ευθεία $\varepsilon: 2y = x$ και σημείο A του ημιάξονα Ox . Από το A φέρνουμε την ευθεία $\varepsilon_1 // y'y$ και την ευθεία $\varepsilon_2 // \varepsilon$. Η ε_1 τέμνει την ε σ' ένα σημείο B . Από το B φέρνουμε την ευθεία $\varepsilon_3 \perp \varepsilon$, η οποία τέμνει την ε_2 στο M . Να βρείτε το γ.τ. των σημείων M όταν το A διαγράφει τον Ox .

Απάντηση:

Θέμα 6

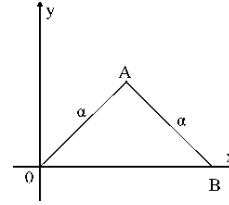
Μια τυχαία ευθεία $\varepsilon: \beta x + \alpha y = \alpha\beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ και $4\alpha + 5\beta = 20$, τέμνει τους άξονες $x'x$, $y'y$ στα σημεία K και L αντίστοιχα. Ναδειχθεί ότι το μέσο M του τμήματος KL κινείται σε σταθερή ευθεία

Απάντηση:

Θέμα 7

Επιλέξτε την ορθή απάντηση:

1. Στο διπλανό σχήμα η εξίσωση της ευθείας ΟΑ είναι $y = \sqrt{3}x$. Η γωνία ΟΑΒ ισούται με
A. 30° **B.** 60° **Γ.** 45° **Δ.** 90°
E. 135°



2. Ο συντελ. διεύθυνσης μιας ευθείας (ϵ), που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ ορίζεται πάντα όταν:
A. $y_1 \neq y_2$ **B.** $x_1 = x_2$ και $y_1 \neq y_2$ **Γ.** $x_1 \neq -x_2$ και $y_1 \neq y_2$ **Δ.** $y_1 = y_2$ και $x_1 = x_2$ **E.** $x_1 \neq x_2$
3. Η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει πάντα ευθεία με
A. $A=0$ και $B=0$ **B.** $A=0$ ή $\Gamma \neq 0$ **Γ.** $A^2 + B^2 \geq 0$ **Δ.** $|A| + |B| > 0$
E. $|A| + |B| < 0$
4. Το διάνυσμα $\vec{\delta}(-2, 3)$ είναι κάθετο στην ευθεία
A. $2x - 3y + 1 = 0$ **B.** $2x + 3y + 1 = 0$ **Γ.** $3x + 2y + 1 = 0$ **Δ.** $3x - 2y + 1 = 0$ **E.** $3x - 2y - 1 = 0$
5. Έστω (ϵ): $Ax + By + \Gamma = 0$ (με $A \neq 0$ και $B \neq 0$), τότε:
A. το διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, A)$ είναι κάθετο στην (ϵ)
B. το διάνυσμα $\vec{\delta} = (A, -B)$ είναι παράλληλο στην (ϵ)
Γ. το διάνυσμα $\vec{\delta} = (-B, A)$ είναι παράλληλο στην (ϵ)
Δ. το διάνυσμα $\vec{\delta} = (A, B)$ είναι παράλληλο στην (ϵ)
E. το διάνυσμα $\vec{\delta} = (-A, B)$ είναι κάθετο στην (ϵ)

“Τα Μαθηματικά είναι ποίηση και όχι πίεση”

Θέμα 8

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{d}_1 = (a, \beta)$ και $\vec{d}_2 = (\gamma, \delta)$, τα οποία δεν είναι συγγραμμικά.

- Ναδειχθεί ότι $a\delta \neq \beta\gamma$
- Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, y)$, ώστε τα σημεία $K(a, \beta)$, $L(\gamma, \delta)$ και $N(ax+\gamma y, \beta x+\delta y)$ να είναι συνευθειακά.

Απάντηση:

Θέμα 9

Ελέγξατε την ορθότητα των παρακάτω προτάσεων:

1. Η ευθεία $x + \lambda(x-y) - \lambda = 0$ τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας xOy για κάθε τιμή του αριθμού λ .
2. Οι ευθείες $\varepsilon_1: y = 2x+1$, $\varepsilon_2: y = 2x-1$, $\varepsilon_3: x + 2y + 1 = 0$ και $\varepsilon_4: x + 2y + 2 = 0$ τεμνόμενες ορίζουν ορθογώνιο παραλληλόγραμμο
3. Η εξίσωση της ευθείας ε που είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon': x + 3 = 0$ και περνά από το σημείο $(3, 2)$, είναι $y = 3$.
4. Οι ευθείες $2x - 3y = 11$ και $4y + 3x + 9 = 0$ έχουν κοινό σημείο το $(-1, 3)$.
5. Η ευθεία $y = \lambda x + 3$ έχει δύο κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$
6. Αν οι ευθείες $(\mu + 1)x - y = 0$ και $3x + y - 7 = 0$ είναι παράλληλες, τότε $\mu = 2$.
7. Η εξίσωση $xy = x$ παριστάνει μια μόνο ευθεία του καρτεσιανού επιπέδου.
8. Το σημείο $A(\eta\mu\theta, 0)$ με $\theta = \frac{\pi}{7}$ ανήκει στην ευθεία $2x + ky = 3$.
9. Η απόσταση των παράλληλων ευθειών $y = x$ και $y = x + 1$ είναι 1.

Θέμα 10

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση:

1. Στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων δίνονται τα σημεία A (3, 5) και B (-1, 8). Η προβολή του AB στον άξονα $x'x$ έχει μήκος
Α. 3 Β. 5 Γ. -1 Δ. 8 Ε. 4
2. Η ευθεία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ αμβλεία γωνία είναι
Α. $y = |\lambda|x - 2$ Β. $y = 2$ Γ. $y = 3x + 2$ Δ. $y = |\lambda|x + \beta$ με $\lambda < 0$ Ε. η κάθετη στην $2x - 3y + 2 = 0$
3. Αν η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες $x'x$, $y'y$ στα A($\alpha, 0$), B(0, β) αντίστοιχα με $\alpha = 2\beta$. Τότε η (ε) σχηματίζει
Α. γωνία 60° με τον $x'x$ Β. γωνία 90° με τον $x'x$ Γ. γωνία οξεία με τον $x'x$ Δ. γωνία αμβλεία με τον $x'x$
Ε. κλίση ίση με $\frac{1}{2}$
4. Στο καρτεσιανό επίπεδο η εξίσωση $y^2 = x^2$ παριστάνει
Α. μια ευθεία κάθετη στον $x'x$ Β. μόνο τη διχοτόμο της γωνίας xOy
Γ. μόνο τη διχοτόμο της γωνίας yOx' Δ. τις διχοτόμους των γωνιών xOy και yOx' Ε. μια ευθεία κάθετη στον $y'y$
5. Αν A(1,3) και B(5,3), το συμμετρικό του μέσου του AB ως προς τον άξονα $x'x$ είναι το
Α. (2,3) Β. (2,-3) Γ. (3,-3) Δ. (-3,3) Ε. (-3, -3)

" Οι μεγάλοι άνθρωποι μιλούν για ιδέες. Οι μεσαίοι άνθρωποι μιλούν για γεγονότα. Οι μικροί άνθρωποι μιλούν για τους άλλους." Πλάτωνας

Θέμα 11

Δίνεται η εξίσωση $\lambda^2 x - \lambda y + 2 = 0$ (1)

- α) Να βρείτε για ποια $\lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει ευθεία γραμμή
β) Για τα λ που βρήκατε να δείξετε ότι οι ευθείες της οικογένειας δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο
γ) Να δείξετε ότι από το τυχαίο σημείο $M(\alpha, \beta)$ του επιπέδου διέρχονται δύο το πολύ ευθείες της οικογένειας. Ποια πρέπει να είναι η σχέση των α, β ώστε να διέρχεται από το M μία μόνο ευθεία;

Απάντηση:

Θέμα 12

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2 - 1)x + 2\lambda y - \lambda^2 - 2\lambda - \gamma = 0$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ και γ πραγματική σταθερά.

- α.** Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ η εξίσωση παριστάνει ευθεία γραμμή.
- β.** Εάν $\gamma = -1$, να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την παραπάνω εξίσωση διέρχονται από το ίδιο σημείο.
- γ.** Εάν $\gamma \neq -1$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων εκείνων που από το καθένα διέρχεται μόνο μία ευθεία η οποία επαληθεύει την παραπάνω εξίσωση

Απάντηση:

Θέμα 13

Μία ευθεία ε τέμνει τις ευθείες $\varepsilon_1: y=0$, $\varepsilon_2: y=x$, $\varepsilon_3: y=4x$, $\varepsilon_4: x=0$, στα σημεία Λ , A , B , M αντίστοιχα. Αν $\alpha\beta > 0$ και $\overline{\Lambda A} = \overline{B M}$ να υπολογισθεί ο συντελεστής διεύθυνσης λ της ε . (Στην γενική περίπτωση αν $\varepsilon_2: y=\alpha x$ και $\varepsilon_3: y=\beta x$ τότε $\lambda = -\sqrt{\alpha\beta}$)

Απάντηση:

Θέμα 14

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου $M(x,y)$ για το οποίο είναι

$$\overline{OM} = \frac{\alpha(1+t^2)-2t}{1+t^2} \vec{i} + \frac{\beta t}{1+t^2} \vec{j}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{όπου } O \text{ η αρχή των αξόνων}$$

Απάντηση:

Θέμα 15

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon: x+\lambda y=\lambda+3$ και $\zeta: y=\lambda x-3\lambda-1, \lambda \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι:

α) καθεμιά από τις ε, ζ διέρχεται από σταθερό σημείο (ανεξάρτητο του λ)

β) $\varepsilon \perp \zeta$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$,

γ) το σύστημα $\begin{cases} x+\lambda y=\lambda+3 \\ y=\lambda x-3\lambda-1 \end{cases}$ έχει μοναδική λύση και οι ευθείες ε, ζ έχουν μοναδικό

κοινό σημείο M

δ) να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του M όταν το λ μεταβάλλεται

Απάντηση: