ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Α ΒΑΘΜΟΥ

ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΕΝΑΝ ΑΓΝΩΣΤΟ

Έστω $f(x)$, $g(x)$ είναι δύο παραστάσεις μιας μεταβλητής x πού παίρνει τιμές στο σύνολο Α.
Εξίσωση με έναν άγνωστο λέγεται κάθε ισότητα της μορφής $f(x)=g(x)$, η οποία αληθεύει για ορισμένες τιμές της μεταβλητής x στο σύνολο Α.

Η παράσταση $f(x)$ λέγεται **πρώτο μέλος** και παράσταση $g(x)$ λέγεται **δεύτερο μέλος** της εξίσωσης.

Η μεταβλητή x λέγεται **άγνωστος** της εξίσωσης.

Το σύνολο Α λέγεται **σύνολο (ή πεδίο ορισμού) αναφοράς** της εξίσωσης.

Αν η ισότητα $f(x)=g(x)$ αληθεύει για κάθε $x \in A$, τότε λέγεται **ταυτότητα.**

Ρίζα ή λύση μιας εξίσωσης λέγεται η τιμή της μεταβλητής x η οποία επαληθεύει την εξίσωση.

Δύο εξισώσεις λέγονται **ισοδύναμες** αν και μόνο αν έχουν τις ίδιες ακριβώς λύσεις, δηλαδή όταν κάθε ρίζα της μιας είναι και ρίζα της άλλης και αντίστροφα. Αν και οι δύο εξισώσεις δεν έχουν ρίζες, τότε λέγονται επίσης ισοδύναμες, γράφουμε:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow p(x)=q(x).$$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Εξίσωση πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο λέγεται μία εξίσωση που περιέχει τον άγνωστο (μεταβλητή) αυτό στην πρώτη δύναμη και δεν περιέχει άλλους αγνώστους.

Η λύση της εξίσωσης $αx = β$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $α \neq 0$ τότε: $αx = β \Leftrightarrow x = \frac{β}{α}$

  Δηλαδή αν $α \neq 0$, η εξίσωση **έχει ακριβώς μια λύση** την $x = \frac{β}{α}$
- Αν $α = 0$ και $β \neq 0$ τότε η εξίσωση $αx = β$ γίνεται $0x = β$, δεν έχει λύση και λέμε ότι είναι **αδύνατη.**
- Αν $α = 0$ και $β = 0$ τότε η εξίσωση $αx = β$ γίνεται $0x = 0$, έχει λύση κάθε πραγματικό αριθμό και λέμε ότι είναι **ταυτότητα.**

ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Λέγονται οι εξισώσεις οι οποίες εκτός από τον άγνωστο περιέχουν ένα ακόμη γράμμα συνήθως α ή β ή ….κ ή λ, το οποίο παριστάνει οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό και λέγεται **παράμετρος**.

Για να λύσουμε μία παραμετρική εξίσωση για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου την μετασχηματίζουμε στη μορφή $\alpha x = \beta$ και διακρίνουμε περιπτώσεις όπως παραπάνω.

Παράδειγμα

Να λυθεί η εξίσωση : $\lambda^2 x - \lambda = 4x + 2$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Λύση

Έχουμε: $\lambda^2 x - \lambda = 4x + 2 \Leftrightarrow \lambda^2 x - 4x = \lambda + 2 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 4)x = \lambda + 2 \Leftrightarrow$

$(\lambda - 2)(\lambda + 2)x = \lambda + 2 \ (1)$.

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $\lambda \neq 2$ και $\lambda \neq -2$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση την
$$x = \frac{\lambda + 2}{(\lambda + 2)(\lambda - 2)} = \frac{1}{(\lambda - 2)}$$
- Αν $\lambda = 2$, η εξίσωση γίνεται $0x = 4$ και είναι αδύνατη
- Αν $\lambda = -2$, η εξίσωση γίνεται $0x = 4$ και είναι αδύνατη

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Α ΒΑΘΜΟΥ

Ι. ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Έστω $f(x)$, $g(x)$ είναι δύο παραστάσεις μιας μεταβλητής x πού παίρνει τιμές στο σύνολο Α.

Κλασματική εξίσωση λέγεται κάθε ισότητα που έχει ή μπορεί να πάρει την μορφή
$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Η κλασματική εξίσωση $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ είναι ισοδύναμη με το σύστημα $\left[f(x) = 0\right.$ και $\left. g(x) \neq 0\right]$, δηλαδή
$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}.$$

Παράδειγμα

Να λυθεί η εξίσωση : $\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x} = \frac{x-4}{x^2+2x}$

Λύση

Έχουμε: $\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x} = \frac{x-4}{x^2+2x} \Leftrightarrow \frac{3}{x+2} - \frac{2}{x} = \frac{x-4}{x(x+2)}$, η εξίσωση ορίζεται όταν $x(x+2) \neq 0 \Leftrightarrow (x \neq 0$ και $x \neq -2)$. Τότε

$\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x} = \frac{x-4}{x(x+2)} \Leftrightarrow x(x+2)\frac{3}{x+2} - x(x+2)\frac{2}{x} = x(x+2)\frac{x-4}{x(x+2)} \Leftrightarrow$

$3x - 2(x+2) = x - 4 \Leftrightarrow 3x - 2x - x = 4 - 4 \Leftrightarrow 0x = 0$.

Άρα η εξίσωση έχει λύση, κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0, -2\}$.

II. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΑ

Λέγονται οι εξισώσεις που περιέχουν τον άγνωστο στην απόλυτη τιμή μιας παράστασης

Για την λύση των εξισώσεων με απόλυτα είναι χρήσιμες οι παρακάτω ιδιότητες :

1. Αν $\theta > 0$ τότε ισχύει : $|x| = \theta \Leftrightarrow (x = \theta \text{ ή } x = -\theta)$
2. Αν $\alpha \in \mathbb{R}$ τότε ισχύει : $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow (x = \alpha \text{ ή } x = -\alpha)$

Παραδείγματα

1. Να λυθεί η εξίσωση: $|x-2| = 5$

Λύση

Έχουμε

$|x-2| = 5 \Leftrightarrow x-2 = \pm 5 \Leftrightarrow (x-2=5 \text{ ή } x-2=-5) \Leftrightarrow (x=7 \text{ ή } x=-3)$

2. Να λυθεί η εξίσωση: $||1-2x|-10| = 3$

Λύση

Έχουμε

$||1-2x|-10| = 3 \Leftrightarrow |1-2x|-10 = \pm 3$, οπότε

- $|1-2x|-10 = 3 \Leftrightarrow |1-2x| = 13 \Leftrightarrow 1-2x = \pm 13 \Leftrightarrow (1-2x=13 \text{ ή } 1-2x=-13) \Leftrightarrow$ $(-2x = 12 \text{ ή } -2x=-14) \Leftrightarrow (\mathbf{x_1 = -6 \text{ ή } x_2 = 7})$
- $|1-2x|-10 = -3 \Leftrightarrow |1-2x| = 7 \Leftrightarrow 1-2x = \pm 7 \Leftrightarrow (1-2x=7 \text{ ή } 1-2x=-7) \Leftrightarrow$

$(-2x = 6 \text{ ή } -2x=-8) \Leftrightarrow (\mathbf{x_3 = -3} \text{ ή } \mathbf{x_4 = 4})$

III. ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Λέγονται οι εξισώσεις που περιέχουν τον άγνωστο x στον εκθέτη μιας δύναμης. Για να λύσουμε μία εκθετική εξίσωση την μετατρέπουμε στη μορφή $\alpha^{f(x)} = \alpha^{g(x)}$, όπου $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$ οπότε είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $f(x) = g(x)$

Παράδειγμα

Να λυθούν οι εξισώσεις:

(i) $\mathbf{9^x = \frac{1}{81}}$ **(ii)** $\mathbf{32^x = 8^{1-x}}$

Λύση

(i) Έχουμε: $9^x = \frac{1}{81} \Leftrightarrow (3^2)^x = \frac{1}{3^4} \Leftrightarrow 3^{2x} = 3^{-4} \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow \mathbf{x = -2}$

(ii) Έχουμε: $32^x = 8^{16-x} \Leftrightarrow (2^5)^x = (2^3)^{16-x} \Leftrightarrow 2^{5x} = 2^{48-3x} \Leftrightarrow 5x = 48 - 3x \Leftrightarrow$

$8x = 48 \Leftrightarrow \mathbf{x = 6}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

Σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις να σημειώσετε τη σωστή απάντηση.

1. Αν $\frac{\sqrt{2}}{x}+\frac{1}{6\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$, τότε το x είναι ίσο με

Α. $\frac{1}{3}$ Β. $\frac{2}{3}$ Γ. 1 Δ. $\frac{3}{2}$ Ε. 3

2. Αν η εξίσωση $\alpha^2 x-\alpha=4x-2$ είναι αδύνατη τότε το α είναι ίσο με
Α. 1 Β. 2 Γ. 0 Δ. -1 Ε. -2

3. Αν η εξίσωση $\left(\mu^2-5\right)x+\nu^2=3x+2$ είναι ταυτότητα, τότε το $\mu^2+\nu^2$ είναι ίσο με
Α. 12 Β. 10 Γ. 9 Δ. 8 Ε. 7

4. Αν η εξίσωση $\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{1-x}=\frac{4}{x+2}$ έχει ρίζα την $x=2$, τότε ο α είναι ίσος με
Α. -3 Β. -2 Γ. 2 Δ. 3 Ε. 4

Εξισώσεις με απόλυτα α βαθμού

5. Το άθροισμα όλων των ριζών της εξίσωσης $2\left|2x-\frac{3}{2}\right|=5$ είναι ίσο με

Α. $-\frac{3}{2}$ Β. -1 Γ. 0 Δ. $\frac{3}{2}$ Ε. 2

6. Το άθροισμα όλων των λύσεων της εξίσωσης $\left||x-2|-5\right|=1$ είναι ίσο με
Α. -6 Β. 4 Γ. 6 Δ. 8 Ε. 14

7. Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\left||2x-1|-7\right|=9$ είναι ίσο με
Α. 0 Β. 1 Γ. 2 Δ. 3 Ε. 4

8. Το σύνολο λύσεων της εξίσωσης $|x|+|x-2|=1$ είναι:
Α. $\{x\in\mathbb{R}:x<0\}$ Β. $\{x\in\mathbb{R}:0<x<2\}$ Γ. $\{x\in\mathbb{R}:2<x\}$ Δ. $\mathbb{R}$ Ε. $\varnothing$

9. Το σύνολο λύσεων της εξίσωσης $|x+3|+|x-1|=4$ είναι:
Α. $(-3,1)$ Β. $[-3,1]$ Γ. $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$ Δ. $(-3,1]$ Ε. $[-3,1)$

Εξισώσεις εκθετικές

10. Αν $\left(\frac{3^x+3^x+3^x}{7^x+7^x+7^x}\right)^2=\frac{49}{9}$, τότε το x είναι ίσο με
Α. -6 Β. -4 Γ. -2 Δ. -1 Ε. 0

11. Αν $\dfrac{2^{\alpha-x}+2^{\alpha}-2^{-x}-1}{2^{\alpha}-1}=9$, τότε το x είναι ίσο με

Α. -3 Β. -2 Γ. -1 Δ. 2 Ε. 3

12. Αν $\alpha\neq 0$ και $\dfrac{(4\alpha)^{\alpha+1}}{\alpha(2\alpha)^{\alpha}}=(0,25)^{\alpha}$, τότε ο α είναι ίσος με

Α. $-\dfrac{2}{3}$ Β. $-\dfrac{1}{2}$ Γ. 1 Δ. $\dfrac{3}{2}$ Ε. 2

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

13. Να λύσετε τις εξισώσεις

(i) $(3x-1)^2-5(2x+1)^2+(6x-3)(2x+1)=(x-1)^2$

(ii) $(x-1)^3+x^3+(x+1)^3=3x(x^2-1)$

14. Να λύσετε τις εξισώσεις

(i) $\dfrac{x+6}{2}+\dfrac{2(x+17)}{3}+\dfrac{5(x-10)}{6}=2x+6$

(ii) $\dfrac{4x}{7}-\dfrac{2(3x-2)}{21}-\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{5(3-4x)}{7}+\dfrac{1}{3}$

Παραμετρικές εξισώσεις

15. Να λύσετε τις εξισώσεις

(i) $2\lambda(2\lambda x-1)=x+1$ (ii) $(\alpha^3+4)x-\alpha(1+4x)=\alpha^2x-1$

16. Να λύσετε τις εξισώσεις

(i) $\dfrac{\mu x-\lambda}{3}+\dfrac{x}{2}=3-\mu$ (ii) $\lambda(\lambda x-1)+5x=\mu+6(\lambda x-1)$

17. Να βρείτε τους $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση

$$(x-3\lambda)^2+12x=9(\lambda+\mu)(\lambda-\mu)+12-6\lambda+(x+3\mu)^2$$

να είναι ταυτότητα .

18. Για ποιες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ οι παρακάτω εξισώσεις

$$\alpha^2(x-\alpha+1)=2\alpha(x-1) \text{ και } \frac{\alpha(\alpha-x)}{2}-\frac{2(\alpha-x)}{\alpha}=\frac{\alpha^2-4}{2\alpha}$$

να είναι συγχρόνως αδύνατες.

19. Να λύσετε τις εξισώσεις

(i) $(3x-2)(2x+1)=4x^2-1$ (ii) $x^3-4x=0$

(iii) $4x^4-5x^2+1=0$ (iv) (vi) $(5x+9)(x^2-4)=(x+2)(x^2-4)$

Κλασματικές εξισώσεις

20. Να λύσετε τις εξισώσεις

(i) $\frac{3(9x-3)}{9x-6}=2+\frac{3x+1}{3x-2}$ (ii) $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x+2}{x+3}+\frac{4}{x^2+2x-3}=0$

21. Να λύσετε τις εξισώσεις

(i) $\frac{2x-13}{2x-16}+\frac{2(x-6)}{x-8}=\frac{7}{8}+\frac{2(5x-39)}{3x-24}$ (ii) $\frac{9x-5}{3x+1}+\frac{12x+1}{2-6x}=\frac{9-108x+36x^2}{4(9x^2-1)}$

Εξισώσεις με απόλυτα α βαθμού

22. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(i) $3|x-5|+1=|x-5|+7$ (ii) $\left|\frac{x+2}{x-1}\right|=2$

23. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(i) $|2x-1|=|x+3|$ (ii) $|4x-5|=3|x|$.

24. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(i) $||x|-5|=3$ (ii) $|8-|x||=5$ (iii) $||2x-3|-6|=4$

25. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(i) $\frac{7|x|+4}{5}-|x|=\frac{3|x|-5}{2}$ (ii) $\frac{|x|+1}{3}+\frac{|x|+2}{4}=\frac{2|x|+1}{2}-\frac{1}{12}$

26. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(i) $\frac{|2x+1|+1}{4}+\frac{19}{3}=\frac{|3+6x|-1}{3}$ (ii) $\frac{2|x+1|}{3}+\frac{3|x+1|-7}{2}=|x+1|$

27. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(i) $2|x|-x=3$ (ii) $2|x-3|+5x=7$ (iii) $|3-2x|+x=11$

28. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(i) $|2x+1|-|3-x|=|x-4|$ (ii) $|x-2|+|x-3|+|2x-8|=9$.