ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ (§1.1-§1.3)

1. Αν για τα σημεία Α, Β, Γ, Δ υπάρχει σημείο Ρ ώστε $\vec{PA}+\vec{P\Gamma}=\vec{PB}+\vec{P\Delta}$ να δειχθεί ΑΒΓΔ είναι παραλλ/γραμμο

2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να δειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό σημείο Ρ τέτοιο ώστε $5\vec{PA}-3\vec{PB}+\vec{P\Gamma}=\vec{0}$

3. Αν $5\vec{MA}-3\vec{MB}-2\vec{M\Gamma}=\vec{0}$ να δειχθεί ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά

4. Αν $\lambda^2\vec{KA}+(2-3\lambda)\vec{KB}+(\lambda^2-7)\vec{K\Gamma}=\vec{0}$ να βρεθεί ο $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda>0$ ώστε τα σημεία Α, Β, Γ να είναι συνευθειακά

5. Έστω Α, Β, Γ τρία σημεία του επιπέδου. Σε κάθε σημείο Μ του επιπέδου αντιστοιχίζουμε με την συνάρτηση f το διάνυσμα $\vec{f(M)}=3\vec{MA}-2\vec{MB}+\vec{M\Gamma}$ α) Να προσδιορισθούν τα $\vec{f(A)}$, $\vec{f(B)}$, $\vec{f(\Gamma)}$

β) Να δειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό σημείο Ρ ώστε $\vec{f(P)}=\vec{0}$

γ) Να δειχθεί ότι για κάθε σημείο Μ του επιπέδου το $\vec{f(M)}$ εκφράζεται συναρτήσει του $\vec{MP}$

6. Έστω Α, Β, Γ τρία σημεία του επιπέδου και Β΄ το μέσο του ΑΓ. Σε κάθε σημείο Μ του επιπέδου αντιστοιχίζουμε το διάνυσμα $\vec{V_M}=-3\vec{MA}+2\vec{MB}-\vec{M\Gamma}$. Να δειχθεί ότι: α) $\vec{V_A}=2\vec{B'B}$

β) $\vec{V_M}=-2\vec{MA}+\vec{V_A}$ γ) Υπάρχει μοναδικό σημείο G ώστε $\vec{V_G}=\vec{0}$ δ) $\vec{V_M}=-2\vec{MG}$

7. Αν τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ είναι μη παράλληλα ανά δύο και τα $\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ συγγραμμικά και τα $2\vec{\alpha}-\vec{\gamma}$, $\vec{\beta}$ συγγραμμικά να δείξετε ότι και τα διανύσματα $4\vec{\beta}+\vec{\gamma}$, $\vec{\alpha}$ είναι συγγραμμικά

8. Σε τυχαίο σημείο Μ του επιπέδου ενός τριγώνου ΑΒΓ αντιστοιχίζουμε το διάνυσμα $\vec{V_M}=\vec{MA}+\vec{MB}+2\vec{M\Gamma}$ Να δειχθεί ότι το $\vec{V_M}$ διέρχεται από σταθερό σημείο

9. Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ κινούνται τα σημεία A_1, A_2, A_3 ξεκινώντας ταυτόχρονα από τις κορυφές Α, Β, Γ με ταχύτητες $\vec{v_1}=\lambda\vec{AB}$, $\vec{v_2}=\lambda\vec{B\Gamma}$, $\vec{v_3}=\lambda\vec{\Gamma A}$ ($\lambda>0$).Να δειχθεί ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και $A_1A_2A_3$ έχουν το ίδιο κέντρο βάρους

10. Αν τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ όχι συγγραμμικά διανύσματα τότε δείξτε ότι και τα $\vec{v},\vec{u}$ δεν είναι συγγραμμικά διανύσματα όπου $\vec{u}=3\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$ και $\vec{v}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

11. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ ισχύει $2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$, και $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=|\vec{\gamma}|$, να δειχθεί $\vec{\alpha}\,//\,\vec{\gamma}$

12. Αν για τα Ο, Μ, Α, Β, Γ ισχύει η σχέση $\vec{OA}+3\vec{MA}=2\vec{MO}+\vec{M\Gamma}+3\vec{OB}$ ν.α.ο. τα Α ,Β , Γ είναι συνευθειακά

13. Δίνονται τα μη συνευθειακά σημεία Α, Β, Γ. Δείξτε ότι:

α)Αν Μ τυχαίο σημείο του επιπέδου το διάνυσμα $2\vec{MA}+3\vec{MB}-5\vec{M\Gamma}$ είναι ανεξάρτητο του Μ

β)Δεν υπάρχει σημείο Κ ώστε να ισχύει $2\vec{KA}+3\vec{KB}=5\vec{K\Gamma}$

14. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ, Ε τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Αν ισχύει $\vec{AM}=x\vec{A\Delta}+y\vec{AE}$ με x+y=2 να δείξετε ότι: α) $\vec{\Delta E}\,//\,\vec{B\Gamma}$ β) Τα σημεία Μ, Β, Γ είναι συνευθειακά

15. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και οι κ, λ, μ $\in\mathbb{R}$ ώστε κ+λ+μ=0. Να δειχθεί ότι για οποιοδήποτε σημείο Μ του επιπέδου το διάνυσμα $\kappa\vec{MA}+\lambda\vec{MB}+\mu\vec{M\Gamma}$ είναι σταθερό

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ (§1.4)

1. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με Α(1,5) , Β(-6,3) και Γ(2,1).

α) Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου ΑΜ

β) Να δείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{u}=(\lambda , \lambda)$, $\lambda\in\mathbb{R}$ είναι παράλληλο με το $\overrightarrow{AM}$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$

γ) Να υπολογίσετε το λ, ώστε $\overrightarrow{AM}\uparrow\uparrow\vec{u}$

2. Δίνονται τα σημεία $A(1,-\frac{3}{2})$, Β(2,-1) και $M(\alpha, \frac{\alpha-4}{2})$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα Α , Β , Μ είναι συνευθειακά για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$. β) Αν $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ να υπολογίσετε το α.

γ) Να δείξετε ότι δεν υπάρχει τιμή του α έτσι ώστε: $\overrightarrow{OM}<\frac{4\sqrt{5}}{5}$

3. Έστω τα σημεία Α(x-y, y) , Β(2x+y,2y) όπου x , $y\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τα x , y , έτσι ώστε

το $\overrightarrow{AB}$ να σχηματίζει γωνία 45^0 με τον άξονα χ΄χ και $|\overrightarrow{AB}|=2$

4. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α(α,α-2) , Β(β+2,β) , Γ(1,-1) και Δ(0,-2) με α , $\beta\in\mathbb{R}$ είναι συνευθειακά

5. Δίνονται τα σημεία Α (3, 2), Β (7, - 4). Να βρεθεί σημείο Μ του x΄x,

ώστε το τρίγωνο ΜΑΒ να είναι: α) ισοσκελές με κορυφή το Μ β) ορθογώνιο στο Μ

6. Στο ορθογώνιο σύστημα αξόνων Οχψ θεωρούμε τα σημεία Α, Β του x΄x, τα οποία έχουν τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης $x^2-(\lambda^2-5\lambda+20)x-2008=0$. Να βρεθεί ο $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε το μέσο του ΑΒ να έχει τετμημένη 7.

7. Να υπολογιστούν οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\alpha}$ **,** που έχει το ίδιο μήκος με το διάνυσμα $\vec{\beta}=(4,-3)$ και την διεύθυνση του διανύσματος $\vec{\gamma}=(1,\sqrt{3})$

8. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,2)$ και $\vec{\beta}=(2,3)$.

α) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος και $\vec{u}=-10\vec{\alpha}+6\vec{\beta}$ τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα χ΄χ

β) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{v}=(8,13)$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Στη συνέχεια να αναλύσετε το $\vec{v}$ σε δύο συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{\alpha}$ και η άλλη στο $\vec{\beta}$.

9. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και σημείο Ρ της διαγωνίου του ΔΒ. Αν Ε είναι το συμμετρικό του Γ ως προς κέντρο συμμετρίας το Ρ και Ζ , Η οι προβολές του Ε στις ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα , να δειχθεί ότι τα σημεία Ρ , Ζ , Η είναι συνευθειακά.

10. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $\Gamma(x_3,y_3)$ έτσι ώστε $x_3-x_2 = x_2-x_1$. Αν λ_1 ,λ_2 ,λ_3 οι συντελεστές διευθύνσεως των πλευρών ΑΒ , ΒΓ , ΑΓ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι $\lambda_1+\lambda_2=2\lambda_3$.

11. Δίνονται τα σημεία Α(6,-1), Β(1,3), Γ(1,2), Δ(-1,-1), Ε(1,-1)

α) Να βρεθούν συναρτήσει του λ οι συντεταγμένες του σημείου Μ αν $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{MA}$, $\lambda\neq-1$

β) Να υπολογίσετε τα λ αν τα σημεία Γ, Δ, Μ είναι συνευθειακά

γ) Αν Γ, Δ, Μ είναι συνευθειακά και ισχύει $\overrightarrow{\Delta E}=\kappa\overrightarrow{\Delta A}$, $\overrightarrow{\Gamma B}=\nu\overrightarrow{\Gamma E}$ και $\overrightarrow{MA}=\tau\overrightarrow{MB}$ να δείξετε ότι $\kappa\cdot\tau\cdot\nu=1$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ (§1.5)

1. Αν $\vec{u}=(-2,1)$, $\vec{v}=(1,-1)$ να βρεθούν όλα τα διανύσματα $\vec{w}$ με $\vec{w}\perp\vec{v}-\vec{u}$

2. Δείξτε ότι $(\vec{\alpha}\cdot\vec{i})\vec{i}+(\vec{\alpha}\cdot\vec{j})\vec{j} = \vec{\alpha}$

3. i)Δείξτε ότι $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|^2}\cdot\vec{\alpha}$

ii)Αν $\vec{\alpha}=(4,3)$, $\vec{\beta}=(1,-3)$, να βρεθεί το διάνυσμα $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$ και να δείξετε ότι $|\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}(\vec{\alpha}+\vec{\beta})| = 4$

4. Αν $|\vec{\alpha}|=2$ και $|\vec{\beta}|=\sqrt{3}$ και $\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}} = \dfrac{\pi}{6}$ να βρεθούν τα $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$, $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|$

5. Αν $|\vec{\alpha}|=2$ και $|\vec{\beta}|=3$ και $|\vec{\gamma}|=1$ και $2\vec{\alpha}-\vec{\beta}+3\vec{\gamma}=\vec{0}$ να βρείτε τα $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$, $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}$, $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$

και να δείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=3$

6. Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\gamma}=(5,-5)$ σε δυο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}=(2,1)$

7. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(-1,2)$ και $\vec{\beta}=(3,-1)$ και $\vec{u}=(2,4)$

i)να βρείτε το διάνυσμα $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$

ii)να αναλυθεί το $\vec{u}$ σε δυο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μια να έχει την διεύθυνση του $\vec{\alpha}$

8. Δίνονται δυο πραγματικοί αριθμοί x,y τέτοιοι ώστε $x^2+y^2 \le 2$

i) Δείξτε ότι για δυο τυχαία διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ ισχύει ότι $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|\le |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$

ii)αν $\vec{\alpha}=(x,y)$ και $\vec{\beta}=(1,1)$ δείξτε ότι $|x+y|\le 2$

9. Να βρεθεί για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$, τα διανύσματα $\vec{u}=(2x,x-1)$ και $\vec{v}=(x+2,x)$, είναι κάθετα μεταξύ τους και το διάνυσμα $\vec{u}$ δεν είναι παράλληλο στον άξονα y΄y

10. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, με μέτρα $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=1$, που σχηματίζουν γωνία $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$

Αν $\vec{u}=2\vec{\alpha}+4\vec{\beta}$ και $\vec{v}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$, να βρεθούν τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$ και η μεταξύ τους γωνία

11. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, με μέτρα $|\vec{\alpha}|=\sqrt{2}$, $|\vec{\beta}|=1$ και $\vec{u}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ με $|\vec{u}|=\sqrt{5}$. Να βρεθεί $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$

12. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Αν Μ τυχαίο σημείο του επιπέδου , να δειχθεί ότι

$\vec{MA}\cdot\vec{B\Gamma}+\vec{MB}\cdot\vec{\Gamma A}+\vec{M\Gamma}\cdot\vec{AB}=0$

13. Αν $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$, $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\perp(\vec{\alpha}-3\vec{\beta})$ και $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=2$, να δείξετε ότι $|\vec{\alpha}|=\sqrt{3}$ και $|\vec{\beta}|=1$

14. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με μέτρα $|\vec{\alpha}|=3$, $|\vec{\beta}|=6$, να ορισθεί ο $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε $(3\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta})\perp(3\vec{\alpha}-\lambda\vec{\beta})$

15. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το μέσο Δ της ΒΓ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ για τα οποία είναι

$\vec{\Delta M}\cdot\vec{B\Gamma}+2\vec{\Delta M}\cdot\vec{BA}=0$, ανήκουν σε μία ευθεία.

16. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα και έχουν ίσα μέτρα . Θεωρούμε τα διανύσματα

$\vec{u}=\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$ και $\vec{v}=\lambda\vec{\alpha}-\kappa\vec{\beta}$ με $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι τα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι κάθετα έχουν ίσα μέτρα

17. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, με μέτρα $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 5$ Να υπολογίσετε:

α) Το συνημίτονο της γωνίας των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

β) Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$

γ) Τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$

18. Αν για τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύουν $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}|$ και $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|$, δείξετε ότι τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα.

19. Αν Α(0, 3), Β(-2, 1), Γ($2\sqrt{3}$, 1) οι κορυφές τριγώνου ΑΒΓ, υπολογίστε: α) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$ β) τη γωνία ΑΓΒ

20. Αν $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = \sqrt{2}$ και η γωνία των $\vec{p}$, $\vec{q}$ είναι 45^0 , να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{p} - \vec{q}$, $\vec{q}$.

21. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ διανύσματα του επιπέδου με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και γων$(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^0$. Προσδιορίστε το $x \in \mathbb{R}$ στις

παρακάτω περιπτώσεις: α) $(2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha} - x\vec{\beta}) = -2$ β) $(2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - x\vec{\beta})$.

22. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ = (2, 1), $\vec{\beta}$ = (-1, 3). Να αναλυθεί το $\vec{\alpha}$ σε δυο μη μηδενικά διανύσματα κάθετα

μεταξύ τους που το ένα να έχει τη διεύθυνση του $\vec{\beta}$.

23. Να αναλυθεί το $\vec{\alpha} = (4, 6)$ σε δύο συνιστώσες, μιας παράλληλης και μιας κάθετης προς το $\vec{\beta} = (-1, 2)$

24. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με Α(2, 1), Β(4, 8) και Γ(2, 4). Να βρεθούν οι συντεταγμένες της προβολής του σημείου Α πάνω στη πλευρά ΒΓ.

25. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\overrightarrow{AB} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = -3\vec{\beta}$, όπου $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \dfrac{2\pi}{3}$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$, $(4\vec{\beta} + 2\vec{\alpha})^2$, $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$.

β) Αν Μ είναι το μέσον της πλευράς ΒΓ:

i) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

ii) Να βρείτε τη γωνία των $\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$.

26. Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$, να δείξετε ότι $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|\sqrt{3}$

27. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ , στο οποίο τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma A}$ των πλευρών του σχηματίζουν με τον άξονα χ΄χ γωνίες θ_1 , θ_2, θ_3 αντίστοιχα . Δείξτε ότι: $\gamma\sigma\upsilon\nu\theta_1 + \alpha\sigma\upsilon\nu\theta_2 + \beta\sigma\upsilon\nu\theta_3 = 0$

28. i) Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$ και ισχύει $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 1$ (1) , τότε : $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} \leq \dfrac{1}{4}$

ii) Αν επιπλέον $\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 = 1$ (2) , τότε : $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$