ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

Οι παρακάτω ανισότητες χρησιμοποιούνται για την απόδειξη άλλων ανισοτήτων

1. **(i)** $\alpha^2+\beta^2\geq 2\alpha\beta$ **(ii)** $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\geq 0$ **(iii)** $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\geq 0$

2. **(i)** **Αν** $\alpha>0$**, τότε** $\alpha+\frac{1}{\alpha}\geq 2$ **(ii)** **Αν** $\alpha<0$**, τότε** $\alpha+\frac{1}{\alpha}\leq -2$

3. **(i)** **αν α, β ομόσημοι τότε** $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\geq 2$ **(ii)** **αν α, β ετερόσημοι τότε** $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\leq -2$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

Σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις να σημειώσετε τη σωστή απάντηση.

1. Αν $x^2<x$ και $\psi<0$, ποιό από τα παρακάτω είναι λάθος ;

Α. $0<x<1$ Β. $x\cdot\psi<0$ Γ. $1<\frac{1}{x}$ Δ. $x\cdot\psi<\psi$ Ε. $\frac{x}{\psi}>\frac{1}{x\cdot\psi}$

2. Αν α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί και $\alpha-\beta<0$, $\alpha\cdot\gamma^5<0$ και $\alpha\cdot\beta^2>0$, ποιό από τα παρακάτω είναι αρνητικό;

Α. $\alpha+\beta+\gamma^2$ Β. $\alpha^2+\beta^4\cdot\gamma$ Γ. $\frac{\alpha^3\cdot\beta^2}{\gamma^5}$ Δ. $\frac{\gamma^2}{\alpha\cdot\beta}$ Ε. $\alpha^2+\beta+\gamma^3$

3. Αν α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί με $\alpha>\beta$ και $\beta\cdot\gamma>\alpha\cdot\gamma$, ποιό από τα παρακάτω είναι αληθές ;

Α. $\alpha\beta>0$ Β. $\alpha\beta<0$ Γ. $\frac{\alpha-\beta}{\gamma}>0$ Δ. $\frac{\alpha-\beta}{\gamma}<0$ Ε. $\alpha^2<\beta^2$

4. Ποιός από τους παρακάτω αριθμούς είναι πλησιέστερος στον $\frac{4}{7}$

Α. $\frac{13}{21}$ Β. $\frac{5}{6}$ Γ. $\frac{2}{3}$ Δ. $\frac{5}{7}$ Ε. $\frac{19}{42}$

5. Αν $0<x<\psi<1$, ποιό από τα παρακάτω είναι λάθος ;

Α. $\frac{1}{x}>\frac{1}{\psi}$ Β. $0<\frac{x}{\psi}<1$ Γ. $\frac{1}{\psi}-\frac{1}{x}<0$ Δ. $\frac{1}{x}+\frac{1}{\psi}>2$ Ε. $\frac{1}{x\psi}<1$

6. Αν $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ με $\alpha^5\cdot\beta^{2\nu+2}<0$ και $\beta^3\cdot\gamma^{2\nu}>0$, ποιό από τα παρακάτω είναι αληθές ;

Α. $\alpha>0,\ \beta>0, \gamma\neq 0$ Β. $\alpha<0,\ \beta>0, \gamma\neq 0$ Γ. $\alpha>0,\ \beta>0$

Δ. $\alpha<0, \gamma>0$ Ε. $\alpha<\beta<\gamma$

7. Αν $x,\psi,z\in\mathbb{R}$ με $x^2\cdot\psi<0$, $x^3\cdot\psi\cdot z^3>0$ και $x\cdot z^2>0$, ποιό από τα παρακάτω είναι λάθος ;

Α. $x+z<0$ Β. $x\cdot\psi<0$ Γ. $\psi\cdot z>0$ Δ. $\frac{x}{z}>0$ Ε. $x+\psi<0$

8. Αν $x,\psi,z\in\mathbb{R}$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $3x=4\psi$ και $x=3z$, ποιο από τα παρακάτω είναι αληθές ;
Α. $x<\psi<z$ Β. $x<z<\psi$ Γ. $\psi<x<z$ Δ. $\psi<z<x$ Ε. $z<x<\psi$

9. Αν $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί με $-\beta+2\alpha=0$ και $3\beta=2\gamma$, ποιο από τα παρακάτω είναι αληθές ;
Α. $\alpha<\beta<\gamma$ Β. $\beta<\alpha<\gamma$ Γ. $\alpha<\gamma<\beta$ Δ. $\gamma<\alpha<\beta$ Ε. $\gamma<\beta<\alpha$

10. Αν $3<x<6$ και $4<\psi<10$, πόσες ακέραιες τιμές παίρνει η παράσταση $2x-4\psi$;
Α. 29 Β. 30 Γ. 31 Δ. 32 Ε. 33

11. Αν $\beta=\dfrac{3+\frac{1}{\alpha}}{\alpha+\frac{1}{3}}$ και $\frac{3}{10}<\beta<1$, ποιό από τα παρακάτω είναι αληθές ;

Α. $2<\alpha<9$ Β. $3<\alpha<10$ Γ. $\alpha=4$ Δ. $\frac{3}{10}<\alpha<2$ Ε. $4<\alpha<6$

12. Αν x, ψ είναι ακέραιοι, $-5<x<-1$ και $-7<\psi<-2$, τότε η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση $\dfrac{x+\psi}{\psi-x}$ είναι
Α. 3 Β. 5 Γ. 7 Δ. 9 Ε. 11

13. Αν $x^4<x^2$ και $x^3<x^5$, τότε το x παίρνει τιμές στο διάστημα
Α. $(-1,0)$ Β. $(0,1)$ Γ. $(-\infty,1)$ Δ. $(1,+\infty)$ Ε. $(0,+\infty)$

14. Αν $0<x<\psi$ και $z=\dfrac{x+3\psi}{\psi}$, ποιο από τα παρακάτω εκθέματα είναι αληθές ;
Α. $z=3$ Β. $z=2$ Γ. $0<z<3$ Δ. $3<z<4$ Ε. $4<z<5$

15. Αν $4<x<\psi$, $\alpha=\frac{\psi}{x}$, $\beta=\frac{\psi}{4}$ και $\gamma=\frac{4}{x}$ ποιο από τα παρακάτω είναι αληθές ;
Α. $\gamma<\beta<\alpha$ Β. $\gamma<\alpha<\beta$ Γ. $\beta<\alpha<\gamma$ Δ. $\beta<\gamma<\alpha$ Ε. $\alpha<\beta<\gamma$

16. Η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση $4x^2-12x+19$ είναι
Α. 19 Β. 12 Γ. 10 Δ. 9 Ε. 4

17. Αν $\alpha,\beta \in \mathbb{Z}$ με $2\alpha+\beta<1$ και $5\alpha+4\beta>7$, τότε η μικρότερη ακεραία τιμή που μπορεί να πάρει το $\alpha+\beta$ είναι:
Α. 5 Β. 4 Γ. 3 Δ. 2 Ε. 1

18. Αν α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ με $\alpha^2\cdot\beta<0$, $\alpha\cdot\beta^4>0$ και $\frac{\alpha^3}{\gamma}<0$, τότε το πρόσημο των α, β, γ αντίστοιχα είναι
Α. $-$, $+$, $+$ Β. $-$, $-$, $+$ Γ. $+$, $-$, $+$ Δ. $+$, $-$, $-$ Ε. $+$, $+$, $-$

19. Αν x, ψ, $z \in \mathbb{R}$ με $x^6\cdot\psi=-2$, $\psi\cdot z=3$ και $\frac{1}{x}>0$, τότε το πρόσημο των x, ψ, z αντίστοιχα είναι
Α. $+$, $+$, $+$ Β. $-$, $-$, $-$ Γ. $+$, $-$, $-$ Δ. $+$, $-$, $+$ Ε. $-$, $+$, $+$

20. Αν α,β,γ αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί και $\frac{\alpha}{5}=\frac{\beta}{6}=\frac{\gamma}{7}$, ποιο από τα παρακάτω είναι αληθές ;
Α. $\alpha<\beta<\gamma$ Β. $\alpha<\gamma<\beta$ Γ. $\gamma<\alpha<\beta$ Δ. $\gamma<\beta<\alpha$ Ε. $\beta<\alpha<\gamma$

21. Αν $x<\psi<-2$, $\alpha=\frac{x}{\psi}$, $\beta=\frac{-2}{\psi}$ και $\gamma=\frac{x}{-2}$ ποιο από τα παρακάτω είναι αληθές ;
Α. $\alpha<\beta<\gamma$ Β. $\beta<\alpha<\gamma$ Γ. $\beta<\gamma<\alpha$ Δ. $\alpha<\gamma<\beta$ Ε. $\gamma<\alpha<\beta$

22. Αν x, ψ, z είναι μη μηδενικοί ακέραιοι και ισχύουν $x^2\cdot\psi<0$, $\psi^2\cdot z>0$, $5x=3\psi$, ποιο από τα παρακάτω είναι αληθές ;
Α. $x<z<\psi$ Β. $x<\psi<z$ Γ. $\psi<z<x$ Δ. $\psi<x<z$ Ε. $z<\psi<x$

23. Αν x, ψ είναι πραγματικοί αριθμοί και ισχύουν $x^4<x^3$, $x\cdot\psi>\psi$, ποιο από τα παρακάτω είναι αληθές ;
Α. $0<\psi<1$ Β. $1<\psi<2$ Γ. $\psi=0$ Δ. $\psi>2$ Ε. $\psi<0$

24. Αν α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί με $\gamma<-\gamma$, $\beta\gamma<0$ και $\alpha=2\gamma$, ποιο από τα παρακάτω είναι αληθές ;
Α. $\alpha<\beta<\gamma$ Β. $\beta<\alpha<\gamma$ Γ. $\beta<\gamma<\alpha$ Δ. $\alpha<\gamma<\beta$ Ε. $\gamma<\alpha<\beta$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Απόδειξη ανισοτήτων

25. Να αποδείξετε ότι:
(i) Αν $x>2$, τότε $x^3>x^2+x+2$
(ii) Αν $\alpha>-1$, τότε : $\alpha^3+1\geq\alpha^2+\alpha$
(iii) Αν $x\geq0$ και $\psi\geq0$, τότε : $x^5+\psi^5\geq x^4\psi+x\psi^4$

26. Για κάθε $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:

(i) $(\alpha+\beta)^2 \geq 4\alpha\beta$ (ii) $(\alpha+\beta)^2 \geq 3\alpha\beta$

27. Για κάθε $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:

(i) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \geq \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma$ (ii) $(\alpha+\beta+\gamma)^2 \leq 3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$

28. Να αποδείξετε ότι:

(i) $\dfrac{\alpha^2}{1+\alpha^4} \leq \dfrac{1}{2}$ (ii) $\alpha^4+\beta^4 \geq \alpha^3\beta+\alpha\beta^3$

29. Να αποδείξετε ότι:

(i) $x^4\psi^2+x^4+\psi^2+1 \geq 4x^2\psi$ (ii) $1+2\alpha^4 \geq \alpha^2+2\alpha^3$

30. Να αποδείξετε ότι:

(i) Αν $\alpha<0$, τότε $\dfrac{\alpha}{3}+\dfrac{3}{\alpha} \leq -2$ (ii) Αν $x>2$, τότε $\dfrac{8}{x^2}-\dfrac{x}{4}<\dfrac{3}{2}$

31. Αν $2\alpha+4\beta=1$ να αποδείξετε ότι: $\alpha^2+\beta^2 \geq \dfrac{1}{20}$

32. Για τους πραγματικούς αριθμούς x , ψ , z δίνεται ότι $x+\psi+z=\alpha$.Να αποδείξετε ότι:

(i) $x^2+\psi^2+z^2 \geq \dfrac{\alpha^2}{3}$ (ii) $x\psi+\psi z+zx \leq \dfrac{\alpha^2}{3}$

33. Αν α, β θετικοί αριθμοί και $\alpha+\beta=1$ να αποδειχθεί ότι:

(i) $\alpha\beta \leq \dfrac{1}{4}$ (ii) $\left(1+\dfrac{1}{\alpha}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{\beta}\right) \geq 9$ (iii) $\alpha^4+\beta^4 \geq \dfrac{1}{8}$

34. Να αποδείξετε ότι:

(i) Αν $\alpha \neq 2$ τότε $\dfrac{1}{\alpha^2-4\alpha+4} > \dfrac{2}{\alpha^3-8}$ (ii) Αν $\alpha+\beta=2$ τότε $\alpha^4+\beta^4 \geq 2$.

35. Αν $\alpha+\beta \geq 0$, να αποδείξετε ότι:

(i) $\alpha^3+\beta^3 \geq \alpha^2\beta+\alpha\beta^2$ (ii) $\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{2} \geq \left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^3$

36. Αν α, β είναι θετικοί αριθμοί να αποδείξετε ότι:

(i) $(\alpha+\beta)+(\alpha\beta+1) \geq 4\alpha\beta$, πότε ισχύει η ισότητα;

(ii) $(2\alpha+\beta)^3 \geq 27\alpha^2\beta$

37. Αν α, β είναι θετικοί αριθμοί να αποδείξετε ότι:

(i) $\left(\alpha^4+\beta^4\right)\left(\alpha^5+\beta^5\right)\leq 2\left(\alpha^9+\beta^9\right)$ (ii) $\alpha^8-\alpha^5+\alpha^2-\alpha+1>0$

Πράξεις με ανισότητες

38. Αν $\alpha<\beta<\gamma$ τότε να αποδείξετε ότι:

(i) $\alpha<\dfrac{2\alpha+3\beta}{5}<\beta$ (ii) $\alpha<\dfrac{4\alpha+3\beta+5\gamma}{12}<\gamma$

39. Αν $-3<x<2$ και $-1<\psi<3$ να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών παίρνουν τιμές οι παραστάσεις:

(i) $-3x$ (ii) $2x+5\psi$ (ii) $4x-2\psi$ (iii) $3x-2\psi+5$

40. Αν $3<\alpha<5$ και $1<\beta<3$ να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών παίρνουν τιμές οι παραστάσεις:

(i) $\dfrac{\alpha}{\beta}$ (ii) $(\alpha-1)(\beta+1)$ (iii) $3\alpha^2+4\beta^2$ (iv) $\dfrac{4\alpha}{3\beta+1}$

41. Αν $2<\alpha<6$ και $-5<\beta<-3$ να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών παίρνουν τιμές οι παραστάσεις:

(i) $2\alpha-3\beta$ (ii) $\dfrac{6}{\alpha}-\dfrac{30}{\beta}$ (iii) $2\alpha^2+\beta^2$ (iv) $\dfrac{15\alpha}{3\beta+1}$

Συμπλήρωση τετραγώνου

42. Να αποδείξετε ότι:

(i) $\alpha^2+\beta^2+5\geq 2(2\alpha+\beta)$ (ii) $\alpha^2+2\beta^2+2\alpha\beta+\beta+1>0$

43. Να αποδείξετε ότι:

(i) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+3\geq 2(\alpha+\beta+\gamma)$ (ii) $\alpha^2+4\beta^2+3\gamma^2+14>2\alpha-12\beta+6\gamma$

44. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$

(i) $x^2-2x+2>0$ (ii) $2x^2+3x+5>0$ (iii) $3x^2-4x+2>0$

45. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή των παρακάτω πολυωνύμων (τριωνύμων) και την τιμή του x για την οποία το πολυώνυμο παίρνει ελάχιστη τιμή

(i) $P(x)=x^2-x+1$ (ii) $Q(x)=16x^2-40x+25$

(iii) $R(x)=2x^2+3x-5$

46. Να βρείτε την μέγιστη τιμή των παρακάτω πολυωνύμων (τριωνύμων) και την τιμή του x για την οποία το πολυώνυμο παίρνει μέγιστη τιμή

(i) $P(x)=-x^2+2x-5$ (ii) $P(x)=-x^2+x+2$

(iii) $P(x)=-9x^2-4x-1$

47. Να αποδείξετε ότι:

(i) $x^4+2x^3+\psi^4-4\psi^3+x^2+4\psi^2\geq 0$ για κάθε $x,\ \psi\in\mathbb{R}$

(ii) $2x^2+2x\psi+\psi^2+2x+1\geq 0$ για κάθε $x,\ \psi\in\mathbb{R}$

48. Να αποδείξετε ότι:

(i) $x^2+2x\psi+3\psi^2+2x+6\psi+4\geq 0$ (ii) $x^2+5\psi^2-4x\psi+2x-6\psi+3>0$

Σύγκριση αριθμών

49. Αν $\alpha>\beta>0$ να συγκρίνετε τους αριθμούς $\alpha^3-\beta^3$ και $(\alpha-\beta)^3$

50. Αν $\alpha>\beta>0$ να συγκρίνετε τους αριθμούς $\dfrac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha+\beta}$ και $\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha-\beta}$.

51. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

(i) 2^{300} και 3^{150} (ii) 4^{140} και 5^{120} (iii) $(0,28)^{50}$ και $(0,42)^{30}$.

Ανισοτικές σχέσεις στην Γεωμετρία

52. Αποδείξτε ότι κάθε πλευρά ενός τριγώνου είναι μικρότερη από το μισό της περιμέτρου του τριγώνου.

53. Αν α, β, γ είναι τα μέτρα τα μέτρα των πλευρών ενός τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2<2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)$$

54. Να αποδείξετε ότι: το άθροισμα μιας πλευράς τριγώνου και του ύψους που αντιστοιχεί στην πλευρά αυτή είναι μεγαλύτερο από την ημιπερίμετρο του τριγώνου.

55. Αν α, β, γ είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα α να δείξετε ότι:

$$\beta^3+\gamma^3<\alpha^3$$

56. Με την βοήθεια της ταυτότητας $4\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2$ να αποδείξετε ότι: από όλα τα ορθογώνια που έχουν σταθερή περίμετρο, το τετράγωνο έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν

57. Αν α, β, γ είναι τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου, να αποδείξετε ότι:

(i) $\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}+\dfrac{2(\alpha+\beta)}{\gamma}>3$ (ii) $\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}\right)(\beta+\gamma)>5$

Γενικές

58. Αν $\alpha\in\mathbb{R}^*$ και $\alpha^5-\alpha^3+\alpha=3$, να αποδείξετε ότι $\alpha^6\geq 5$.

59. Αν α, β θετικοί αριθμοί και ισχύει $\alpha+\beta^2<\alpha^2$, να αποδείξετε ότι $\alpha-\beta>\frac{1}{2}$.

60. Να αποδείξετε ότι: αν $\alpha+\beta\geq 0$, $\alpha\neq 0$ και $\beta\neq 0$, τότε $\frac{\alpha}{\beta^2}+\frac{\beta}{\alpha^2}\geq\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$

61. Να αποδείξετε ότι: αν $\alpha<\beta<\gamma$, τότε $\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha<\alpha^2\gamma+\beta^2\alpha+\gamma^2\beta$

62. Αν α, β, γ, δ είναι μη αρνητικοί αριθμοί να αποδείξετε ότι:

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+\delta^4\geq 4\alpha\beta\gamma\delta$$

63. Αν α, β, γ είναι θετικοί αριθμοί να αποδείξετε ότι:

(i) $\frac{\beta\gamma}{\alpha}+\frac{\alpha\gamma}{\beta}+\frac{\alpha\beta}{\gamma}\geq\alpha+\beta+\gamma$ (ii) $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)\geq 8\alpha\beta\gamma$

64. Να αποδείξετε ότι: αν $\alpha\geq 0$, $\beta\geq 0$, $\gamma\geq 0$ και $\alpha+\beta+\gamma=1$, τότε

$$(1-\alpha)\cdot(1-\beta)\cdot(1-\gamma)\geq 8\alpha\beta\gamma$$

65. Να αποδείξετε ότι: αν $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$ και $\alpha+\beta+\gamma=1$, τότε

$$\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{\beta}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)\geq 8.$$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 3
(ΔΙΑΤΑΞΗ ΣΤΟ $\mathbb{R}$)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. 1. Πότε λέμε ότι ο πραγματικός αριθμός α είναι μεγαλύτερος από τον πραγματικό αριθμό β;

2. Να αποδείξετε ότι: για θετικούς αριθμούς α, β και $\nu\in\mathbb{N}^*$ ισχύουν:

(i) $\alpha=\beta\Leftrightarrow\alpha^\nu=\beta^\nu$ και

(ii) $\alpha>\beta\Leftrightarrow\alpha^\nu>\beta^\nu$.

Β. Να χαρακτηρίσετε σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις:

1. Αν οι αριθμοί α, β είναι ετερόσημοι, τότε $\alpha<\beta\Leftrightarrow\frac{1}{\alpha}<\frac{1}{\beta}$

2. Αν $\alpha<\beta<0$ και $\nu\in\mathbb{N}^*$, τότε $\alpha^\nu>\beta^\nu$

3. Αν $0<\alpha<1$ και μ, $\nu\in\mathbb{N}^*$, τότε $\mu<\nu\Leftrightarrow\alpha^\mu>\alpha^\nu$

Γ. Σε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε τη σωστή απάντηση.

1. Αν α,β,γ αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί και $\frac{\alpha}{5}=\frac{\beta}{6}=\frac{\gamma}{7}$, ποιο από τα παρακάτω είναι αληθές ;

Α. $\alpha<\beta<\gamma$ Β. $\alpha<\gamma<\beta$ Γ. $\gamma<\alpha<\beta$ Δ. $\gamma<\beta<\alpha$ Ε. $\beta<\alpha<\gamma$

2. Αν α, β είναι πραγματικοί αριθμοί με $\alpha<\beta$ και $\beta-\frac{\alpha}{3}<0$, ποιο από τα παρακάτω είναι πάντοτε αληθές ;

Α. $\alpha>0$ Β. $\beta>0$ Γ. $\alpha+\beta>0$ Δ. $\alpha^2<\beta^2$ Ε. $\alpha\cdot\beta>0$

3. Αν $0<x<\psi<1$, ποιο από τα παρακάτω είναι λάθος ;

Α. $\frac{1}{x}>\frac{1}{\psi}$ Β. $0<\frac{x}{\psi}<1$ Γ. $\frac{1}{\psi}-\frac{1}{x}<0$ Δ. $\frac{1}{x}+\frac{1}{\psi}>2$ Ε. $\frac{1}{x\psi}<1$

ΘΕΜΑ 2° Α. Να βρείτε τους $x,\ \psi,\ z\in\mathbb{Z}$, αν γνωρίζετε ότι:

$$x^2+4\psi^2+4z^2-6x+4\psi+40z+110\le 0$$

Β. Αν $\alpha<\beta<\gamma$ να αποδείξετε ότι: $\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha<\alpha^2\gamma+\beta^2\alpha+\gamma^2\beta$.

ΘΕΜΑ 3° Α. Αν $-1\le\alpha\le 3$ και $-2\le\beta\le 1$ να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών παίρνουν τιμές οι παραστάσεις:

$$A=2\alpha+3\beta,\ B=5\alpha-3\beta,\ \Gamma=(\alpha+2)(\beta+3)\ \text{και}\ \Delta=\frac{\alpha+3}{\beta+4}-7.$$

Β. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του πολυωνύμου $P(x)=3x^2-2x-9$.

ΘΕΜΑ 4° Α. Αν α, β είναι θετικοί αριθμοί να αποδείξετε ότι:

(i) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\ge 2$

(ii) $\alpha\beta(\alpha+\beta)+\beta\gamma(\beta+\gamma)+\alpha\gamma(\alpha+\gamma)\ge 6\alpha\beta\gamma$