Ασκήσεις Συναρτήσεων

<u>ΓΕΝΙΚΟ ΜΕΡΟΣ</u>

30/11/2011

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ
ΓΕΝΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1.1 Να οριστεί η συνάρτηση $g\circ f$ και να παρασταθεί γραφικά αν f(x) = 1 – x και

$$g(x)=\begin{cases}x-1, \alpha\nu\, x\geq 2\\ x+1, \alpha\nu\, x<2\end{cases}$$

1.2 Να οριστεί η συνάρτηση $f\circ g$ αν $f(x)=\sqrt{1-4x^2}$ και g(x) = συνx, x∈[0, 2π]

1.3 Η συνάρτηση f έχει την ιδιότητα $(f\circ f)(x)=x^2-x+1,\ \forall x\in\Re$. Δείξτε ότι f(1) = 1.

1.4 Να βρείτε τις τιμές του λ∈R για τις οποίες f = g, όπου

$$f(x)=3-x+\frac{2x+x^3}{x^2+2} \text{ και } g(x)=\frac{(\lambda^2+2)x^2+(2\lambda-1)x+4-\lambda^2}{x^2+\lambda x+1}$$

1.5 Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R και η g είναι γνησίως φθίνουσα στο R δείξτε ότι
α) η $g\circ f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο R
β) η g – f είναι γνησίως φθίνουσα στο R

1.6 α) Αν η συνάρτηση f είναι άρτια και αύξουσα στο [0, +∞), τότε είναι φθίνουσα στο (-∞, 0].
β) Αν η συνάρτηση f είναι περιττή και παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0\in A_f$, τότε να δείξετε ότι παρουσιάζει ελάχιστο στο $-x_0$.

1.7 Αν f και g είναι 1 – 1, δείξτε ότι και η $f\circ g$ είναι 1 – 1 και ότι $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$.

1.8 Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο **R** , δείξτε ότι ορίζεται η f^{-1} και είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της .
Εφαρμογή: Αν η g είναι γνησίως μονότονη και (2, 3) ∈ C_g, (5, 1) ∈ C_g-1, δείξτε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα και λύστε την ανίσωση $g\left(1+g^{-1}(x-1)\right)<3$

1.9 Δίνονται οι συναρτήσεις f, g ορισμένες στο **R** . Δείξτε ότι αν η συνάρτηση $f\circ g$ είναι 1 – 1, τότε και η συνάρτηση g είναι 1 – 1.

1.10 Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}2x, \ \alpha\nu\ x<0\\ e^x, \ \alpha\nu\ x\geq 0\end{cases}$ είναι γνησίως αύξουσα και βρείτε την αντίστροφή της.

1.11 Όμοια για την $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

1.12 Αν για κάθε $x\in\Re$ ισχύει $6f(x^2)-f^2(x)\geq 9$, δείξτε ότι η f δεν αντιστρέφεται.

1.13 Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση f , της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α(-1,-4) και Β(1,0).
α) Βρείτε το είδος της μονοτονίας της.
β) Λύστε την $f\left(-2+f^{-1}\left(x^2-x\right)\right)<-4$

1.14 Δίνεται συνάρτηση g : $g(x)=\log x-\dfrac{10}{x}+x,\ x>0.$
α) Δείξτε ότι η g αντιστρέφεται.
β) Λύστε την εξίσωση $g(x)=g^{-1}(x)$.
γ) Λύστε την ανίσωση $g(x)>10$.

. **1.15** Έστω η γνησίως μονότονη συνάρτηση f : R $\to$ R.
α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.
β) Αν η γραφ. παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία Α(1,2005) και Β(-2,1) να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}\left(-2004+f(x^2-8)\right)=-2.$ *(ΠΕ)*

1.16 Α) Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση f . Δείξτε την ισοδυναμία:
$f^{-1}(x) = f(x)$ (1) $\Leftrightarrow$ f(x) = x (2)
Β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x-2)+x-3$
α) Να δείξετε ότι αντιστρέφεται
β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γρ. παραστάσεων των f και f^{-1}.

1.17 α) Αν $f(x)=3x+2,\ (g\circ f)(x)=2x^2-x+1$, βρείτε την συνάρτηση g.
β) Αν $g(x)=3x+2,\ (g\circ f)(x)=2x^2-x+1$ βρείτε την συνάρτηση f.

1.18 Αν $(f\circ f)(x)=x^3+f(x)$ για κάθε πραγματικό x,
α) δείξτε ότι η f αντιστρέφεται
β) βρείτε το f (0)

1.19 Αν $f(x)=x^3+x-2$, α) δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα
β) λύστε την ανίσωση $f^{-1}(2x+3)>1$

1.20 Αν f: R* $\to$ R και για κάθε x $\in$ R* ισχύει $2f(x)-3f(\frac{1}{x})=x^2$, να βρεθεί ο τύπος της f.

1.21 Να δείξετε ότι f = g αν ξέρουμε ότι για κάθε x$\in$**R** ισχύει $(f^2+g^2)(x)\leq 2(f+g)(x)-2$

1.22 Δίνεται συνάρτηση f: R $\to$ R τέτοια ώστε για κάθε x, y $\in$R ισχύει
f(x+y) = f(x) + f(y). Δείξτε ότι
α) f(0) = 0
β) η f είναι περιττή
γ) f(νx) = νf(x) για κάθε φυσικό ν
δ) f(νx) = νf(x) για κάθε ακέραιο ν
ε) f(αx) = αf(x) για κάθε ρητό α

1.23 Δίνεται συνάρτηση f: R $\rightarrow$ R τέτοια ώστε για κάθε x$\in$R ισχύει f(x) $\leq$ x και για κάθε x, y $\in$R ισχύει f (x+y) $\leq$ f (x) + f (y). Δείξτε ότι

α) f (0) = 0

β) f (x) = x για κάθε x$\in$R

1.24 Για τη συνάρτηση f ισχύει για κάθε πραγματικό x: $f(f(x))=x^3$.

Α. α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται. β) Να δείξετε ότι $[f(x)]^3=f(x^3)$

Β. α) Να λύσετε την εξίσωση f(x) = x β) Να δείξετε ότι $[f(-1)]^3+[f(1)]^3=f(0)$

γ) Αν f(8) = 64, βρείτε το f(2)

1.25 Δίνεται συνάρτηση f: [0,1] $\rightarrow$ [0,1] τέτοια ώστε $f(x)=\dfrac{(x+1)(x+m)}{x^2+1}$

α) Βρείτε το m. β) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1

1.26 Δίνεται συνάρτηση f : R* $\rightarrow$ R τέτοια ώστε για κάθε x$\in$R* ισχύει $f(x)\left(f^2(x)+x\right)=1$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)\neq 0$, για κάθε x$\in$R*.

β) Να δείξετε ότι η f είναι 1 – 1 και να βρείτε την αντίστροφή της.

1.27 Έστω f, g : R $\rightarrow$ R συναρτήσεις, ώστε η $f\circ g$ να είναι 1-1.

α) Να δείξετε ότι η g είναι 1 – 1.

β) Αν για κάθε x > 0 ισχύει: $g(f(\ln x)+1)=g(x+2)$, να δείξετε ότι $f(x)=e^x+1$, για κάθε x$\in$R.

1.28 Δίνεται η f: R $\rightarrow$ R τέτοια ώστε για κάθε x, y$\in$R ισχύει $f(x-y)=f(x)-f(y)$.

α) Να δείξετε ότι η γραφ. παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Να δείξετε ότι η f είναι περιττή.

γ) Αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική λύση την x = 0

i) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

ii) Αν ο μιγαδικός z έχει μέτρο 1 και ικανοποιεί τη σχέση $f\left(\left|z+\dfrac{i}{z}\right|\right)+f(4)=f(10)$

να βρείτε το $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z}{\bar{z}}\right)$.