

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

Σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις να σημειώσετε τη σωστή απάντηση.

1. Η παράσταση $\frac{(-2^{-2})^{-3} \cdot (-2^{-3})^{-4}}{(-2^{-4})^5 : (-2^2)^3}$ είναι ίση με

- A. -2^{44} B. -2^{-4} Γ. -2^{-8} Δ. 2^4 Ε. 2^{44}

2. Αν $\alpha^x = 2$ και $\beta^y = 3$, τότε η παράσταση $\frac{\alpha^x \cdot \beta^{-y}}{\alpha^{-3x} \cdot \beta^{-2y}}$ είναι ίση με

- A. 24 B. 36 Γ. 48 Δ. 54 Ε. 60

3. Αν $2^{x+2} + 2^{x-1} - 2^x = 56$, τότε το x είναι ίσο με

- A. 2 B. 3 Γ. 4 Δ. 5 Ε. 6

4. Η παράσταση $\frac{2^{16} + 2^{18} + 2^{30}}{4^{10} + 4^{11} + 4^{17}}$ είναι ίση με

- A. 2^{-10} B. 2^{-4} Γ. 2^4 Δ. 2^6 Ε. 2^{10}

5. Η παράσταση $\frac{5 \cdot 2^{v+2} + 2^v}{3 \cdot 2^{v-2} + 2^v}$ είναι ίση με

- A. 4 B. 6 Γ. 8 Δ. 10 Ε. 12

6. Αν $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{160}{9}$, τότε η παράσταση $\frac{2^{x+1} + 2^{x-2}}{3^{x+1} - 3^{x-1}}$ είναι ίση με

- A. 12 B. 15 Γ. 18 Δ. 24 Ε. 30

7. Η παράσταση $\left(\frac{6^{v-2}}{3^4} + \frac{3^{u-4}}{36}\right) : \left(\frac{6^{v-4}}{9} + \frac{3^{u-2}}{6^4}\right)$ είναι ίση με

- A. 3 B. 4 Γ. 5 Δ. 6 Ε. 8

8. Η παράσταση $(x + \psi)^{-1} \cdot \left(\frac{x^{-1} + \psi^{-1}}{x^{-1}}\right)$ είναι ίση με

- A. x B. x^{-1} Γ. ψ Δ. ψ^{-1} Ε. 1

9. Η παράσταση $\frac{2}{3a^{u-v} - 2} + \frac{3}{2a^{v-u} - 3}$ είναι ίση με

- A. -1 B. 0 Γ. $\frac{2}{3}$ Δ. 1 Ε. $\frac{3}{2}$

10. Αν $7^x = \mu$, τότε η παράσταση $\frac{49^{x+1} - 7^4}{7^{x+1} + 49}$ είναι ίση με

- A. $49\mu - 7$ B. $7\mu - 49$ Γ. $7\mu - 7$ Δ. $\mu - 7$ Ε. 7μ

11. Αν $\alpha + \beta = 10$, τότε η τιμή της παράστασης $\frac{\alpha^2 - \beta^2 - 10\beta - 25}{\alpha^2 - \beta^2 - 5\alpha - 5\beta}$ είναι ίση με

- A. 1 B. $\frac{3}{2}$ Γ. 5 Δ. $\frac{15}{2}$ Ε. 10

12. Αν η απλοποιημένη μορφή της έκφρασης $\frac{x^2 - 3x + \alpha}{x^2 + \beta x - 2}$ είναι $\frac{x - 4}{x - 2}$, τότε το ζευγάρι

(β, α) είναι ίσο με

- A. (11, -4) B. (4, -1) Γ. (-1, -4) Δ. (-4, 1) Ε. (4, 1)

13. Αν $x^4 - 3x^2 - 5 = 0$, τότε η τιμή της παράστασης $x^4 + \frac{25}{x^4}$ είναι ίση με

A. 14 B. 19 Γ. 21 Δ. 25 Ε. 35

14. Αν $x + \frac{1}{x-3} = 7$, τότε η τιμή της παράστασης $x^2 - 6x + \frac{1}{x^2 - 6x + 9}$ είναι ίση με

A. 5 B. 14 Γ. 16 Δ. 21 Ε. 27

15. Αν x, ψ θετικοί αριθμοί, $\frac{1}{x} + \frac{1}{\psi} = 1$ και $x^2 + \psi^2 = 24$ τότε το άθροισμα $x + \psi$ είναι ίσο με

A. 4 B. 6 Γ. 8 Δ. 10 Ε. 12

16. Αν $x^2 - x\psi + \psi^2 = 4$ και $x^3 + \psi^3 = 4$ τότε το γινόμενο $x \cdot \psi$ είναι ίσο με

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ Γ. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ Δ. $-\sqrt{3}$ Ε. -1

17. Αν $\frac{\alpha^2 - x^2}{\alpha^2 x + \alpha x^2} = 4$ και $\alpha x = 3$ τότε το άθροισμα $\alpha^2 + x^2$ είναι ίσο με

A. 78 B. 84 Γ. 116 Δ. 138 Ε. 150

18. Αν $x - \psi = 5$ και $x \cdot \psi = 2$ τότε η διαφορά $x^3 - \psi^3$ είναι ίσο με

A. 205 B. 195 Γ. 155 Δ. 105 Ε. 95

19. Αν $\alpha \neq 0$ και $(x-1)^2 = \alpha$, τότε το γινόμενο $(x^2 - 3x + 2) \cdot (x^2 - x)$ είναι ίσο με

A. $\alpha + 1$ B. $\alpha^2 - 1$ Γ. $\alpha^2 + 1$ Δ. $\alpha^2 + \alpha$ Ε. $\alpha^2 - \alpha$

20. Αν $x \neq \psi$ και $3x^2 - 2x\psi - \psi^2 = 0$, τότε το πηλίκο $\frac{2\psi}{3x - \psi}$ είναι ίσο με

A. -2 B. -1 Γ. 0 Δ. 2 Ε. 3

21. Αν $\alpha - \beta = 6$ και $\alpha \cdot \beta = 2$ τότε η τιμή της παράστασης $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ είναι ίση με

- A. 18 B. 20 Γ. 22 Δ. 24 Ε. 30

22. Αν $x + \psi = 4$ και $x - z = 1$ τότε η τιμή της παράστασης $\frac{xz - x^2 + \psi z - x\psi}{\psi + z - 1}$ είναι ίση με

- A. 4 B. 3 Γ. 2 Δ. -2 Ε. -3

23. Αν $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = 0$, τότε η τιμή της παράστασης $\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) : \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha}\right)$ είναι ίση με

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ Γ. 1 Δ. 2 Ε. 4

24. Αν $\alpha^2 - 4\alpha\beta - \beta^2 = 0$, τότε η τιμή της παράστασης

$$\frac{\alpha^2 - \beta^2 + \alpha\gamma + \beta\gamma}{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta + \alpha\gamma - \beta\gamma} - \frac{\alpha^2 - \beta^2 - \alpha\gamma + \beta\gamma}{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma}$$

είναι ίση με

- A. -2 B. -1 Γ. 0 Δ. 1 Ε. 2

25. Αν $x = 3^k + 3^{-k}$ και $\psi = 3^k - 3^{-k}$ τότε η τιμή της παράστασης $(x^2 - \psi^2)^3$ είναι ίση με

- A. 16 B. 64 Γ. 72 Δ. 81 Ε. 125

26. Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ και $(\alpha + \beta)^3 (\alpha + \gamma)^3 (\beta + \gamma)^3 = -27$ τότε το γινόμενο $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ είναι ίσο με

- A. -9 B. -3 Γ. 0 Δ. 3 Ε. 6

27. Αν $\alpha = 10$, τότε η τιμή της παράστασης $\left[\left(\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 \right) - \frac{15}{\alpha - 1} \right] : \left(\alpha^2 + \frac{\alpha^2 - 16}{\alpha^2 - 1} \right)$

είναι ίση με

- A. 1010 B. 1001 Γ. 101 Δ. 11 Ε. 1

28. Αν $\alpha = 1,2$ και $\beta = \frac{5}{6}$ τότε η τιμή της παράστασης $\frac{60(\alpha + \beta)}{[(\alpha - \beta)^2 - (\alpha^2 + \beta^2)]}$ είναι ίση με

- A. -60 B. -61 Γ. -62 Δ. -63 Ε. -64

29. Η παράσταση $\frac{2^{2v} - 2^{2v+2} + 2^{2v+4}}{4^{v-5} - 4^{v-6} + 4^{v-7}}$ είναι ίση με

- A. 2^v B. 2^{v+5} Γ. 2^{v-14} Δ. 2^{14} Ε. 2^{-v}

30. Η παράσταση $\frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + \beta^4} : \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^3 + \beta^3}$ είναι ίση με

- A. $\alpha - \beta$ B. $\alpha + \beta$ Γ. $\frac{1}{\alpha}$ Δ. $\frac{1}{\alpha + \beta}$ Ε. 1

31. Αν $x \neq 0$ και $\psi \neq 0$ παράσταση $\frac{x^{3x} - \psi^\psi \cdot z + x^{2x} \cdot \psi^\psi - x^x \cdot z}{x^x + \psi^\psi}$ είναι ίση με

- A. $x^x \cdot z$ B. $\psi^\psi \cdot z$ Γ. $x^{2x} - z$ Δ. $x^x + \psi^\psi$ Ε. $x^x - \psi^\psi$

32. Η παράσταση $\frac{\alpha^2 - \alpha - 20}{\alpha^3 - 125} \cdot \frac{\alpha^2 + 5\alpha + 25}{\alpha^2 - 16} \cdot \frac{\alpha^2 - 7\alpha + 12}{\alpha^2 - 3\alpha}$ είναι ίση με

- A. α B. $\frac{1}{\alpha}$ Γ. $\alpha - 4$ Δ. $\frac{\alpha - 4}{\alpha}$ Ε. $\frac{\alpha + 4}{\alpha}$

33. Η παράσταση $\frac{x^2 - 2x + x\psi - 2\psi}{2x + 2\psi} : \frac{4x^2 - 16x + 16}{8x^2 - 32}$ είναι ίση με

A. 1 B. x Γ. $\frac{x+1}{x}$ Δ. x+2 Ε. $\frac{x}{x+\psi}$

34. Η παράσταση $\frac{2^{18} - 1}{2^{12} + 2^6 + 1}$ είναι ίση με

A. 17 B. 31 Γ. 43 Δ. 63 Ε. 127

35. Η παράσταση $2 - \frac{3}{1 + \frac{3\alpha + 1}{2 + \frac{3\alpha^2 - 9}{2\alpha + 5}}}$ είναι ίση με

A. $\alpha - 2$ B. $\frac{1}{\alpha + 2}$ Γ. $\frac{\alpha + 2}{2\alpha + 5}$ Δ. $\frac{\alpha + 5}{\alpha + 2}$ Ε. $\frac{\alpha + 3}{\alpha + 2}$

36. Η παράσταση $\frac{1}{\alpha^2 - 1} + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{1 - \alpha} + 1$ είναι ίση με

A. $\frac{1}{\alpha - 1}$ B. $\frac{1}{\alpha}$ Γ. $-\frac{1}{\alpha}$ Δ. 1 Ε. 0

37. Η παράσταση $\frac{\alpha^{-2} \cdot \beta^{-1} + \alpha^{-1} \cdot \beta^{-2}}{\beta^{-2} - \alpha^{-2}}$ είναι ίση με

A. $\alpha + \beta$ B. $\frac{1}{\alpha\beta}$ Γ. $\frac{1}{\alpha - \beta}$ Δ. $\frac{1}{\beta - \alpha}$ Ε. $\frac{1}{\alpha + \beta}$

38. Η παράσταση $\frac{\frac{x - \psi}{x} - \frac{\psi}{x + \psi}}{\frac{x + \psi}{\psi} - \frac{x}{x - \psi}} : \frac{\frac{\psi}{x} - 1}{\frac{x}{\psi} + 1}$ είναι ίση με

A. $\frac{x}{\psi}$ B. $-\frac{x}{\psi}$ Γ. 1 Δ. -1 Ε. x

39. Η παράσταση $\frac{\frac{9}{x^2}-4}{\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x}} - \frac{2\left(4x-\frac{9}{x}\right)}{\frac{9}{x^2}-4}$ είναι ίση με

A. 3 B. 3x Γ. -3x Δ. x Ε. -x

40. Η παράσταση $\frac{1}{x} + \frac{x^2+x+2}{x^2-x} - \frac{4}{x-1}$ είναι ίση με

A. $\frac{1}{x}$ B. $\frac{1}{x-1}$ Γ. $\frac{x}{x-1}$ Δ. $\frac{x-1}{x}$ Ε. 1

41. Η παράσταση $\frac{x^2-\psi^2-2x+1}{x^2-\psi^2-x-\psi} : \frac{x+\psi-1}{x^2+2x\psi+\psi^2}$ είναι ίση με

A. -1 B. 1 Γ. x+ψ Δ. $\frac{1}{x+\psi}$ Ε. 2

42. Η παράσταση $\frac{(x+1)^3-6(x+1)^2+12(x+1)-8}{x^2-2x+1} : \frac{x-1}{3}$ είναι ίση με

A. 3 B. 1 Γ. $\frac{1}{3}$ Δ. $-\frac{2}{3}$ Ε. -5

43. Η παράσταση $\left(\frac{2+\beta}{1-\beta} \cdot \frac{\alpha^2-1}{4-\beta^2}\right) : \frac{\alpha^2+2\alpha-3}{\beta^2-3\beta+2}$ είναι ίση με

A. $-\frac{\alpha+1}{\alpha+3}$ B. $\frac{1}{\alpha+3}$ Γ. $\frac{\beta+1}{\beta-1}$ Δ. α+1 Ε. $\frac{\alpha+1}{\alpha+3}$

44. Η παράσταση $\frac{x}{x^2 - x\psi} + \frac{x}{x^2 + x\psi} - \frac{2x}{x^2 - \psi^2}$ είναι ίση με

- A. $\frac{x}{x - \psi}$ B. $\frac{4x}{x^2 - \psi^2}$ Γ. $\frac{2}{\psi}$ Δ. $\frac{2}{x}$ Ε. 0.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

I. Δυνάμεις

45. Να κάνετε τις πράξεις και να βρείτε την αριθμητική τιμή

(i) $\left\{ x + \left[1 + \left(\frac{3-x}{x+1} \right)^{-1} \right]^{-1} \right\}^{-1}$ για $x = -\frac{1}{3}$

(ii) $\frac{\frac{1}{2} - \alpha^{-1}}{4 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{-2}} \cdot \left[\frac{1}{2^{-2}(2+\alpha)} - 2\alpha^{-1} - 1 \right]$ για $\alpha = -\frac{1}{2}$.

46. Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$\Pi = (3x - 2\psi)^3 - 4x(x^2 + 9\psi^2) + \frac{15^{v^2}}{3^{(v+1)(v-1)}} - 3 \cdot 5^{v^2} + 2\psi [27x^2 + (2\psi)^2], \quad v \in \mathbb{Q}$$

και να βρείτε την αριθμητική τιμή της όταν:

$$x = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 27 \cdot 35^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}}{5^{-3} \cdot 125 \cdot (-4)} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

II. Ταυτότητες

47. Να αποδείξετε τις ταυτότητες

(i) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha = \frac{1}{2} [(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2]$

(ii) $(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + \psi^2) = (\alpha x + \beta \psi)^2 + (\alpha \psi - \beta x)^2$ (ταυτότητα του Lagrange)

(iii) $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 - 2\alpha^2\beta^2 - 2\beta^2\gamma^2 - 2\alpha^2\gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha - \beta + \gamma)(\alpha + \beta - \gamma)(\alpha - \beta - \gamma)$

(ταυτότητα του De Moivre)

48. Αν $\alpha + \beta = 4$ και $\alpha\beta = 3$, να υπολογίσετε τις εκφράσεις:

$$\alpha^2 + \beta^2, \alpha^3 + \beta^3, \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}, \frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} \text{ και } \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\beta}{\alpha^2}.$$

49. Αν $\alpha + \frac{1}{\alpha} = 3$ να δείξετε ότι: $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} = 7$ και $\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} = 18$.

50. Να βρείτε τους $x, \psi \in \mathbb{R}$ όταν:

(i) $(x+3)^2 + (\psi-2)^2 = 12x - 8\psi$ (ii) $3(x^2 + \psi^2 + 9) = (x + \psi + 3)^2$.

51. Αν $\gamma = \alpha + 2$ και $\beta = \alpha - 1$, να αποδείξετε ότι: $\frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2 - \alpha^2\beta^2 - \gamma^2 + 1}{\alpha^2\beta\gamma - \frac{\gamma}{\beta} + \beta\left(\alpha^2 - \frac{1}{\beta^2}\right)} + 1 = \alpha^2$.

III. Παραγοντοποίηση

52. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

(i) $\alpha^3\beta^3 - 125$ (ii) $x^3 - (\psi + \omega)^3$

(iii) $1000\omega^3 - 216\phi^3$ (iv) $(\alpha + \beta)^3 - (\alpha - \beta)^3$

53. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

(i) $\alpha^7 + 1$ (ii) $\alpha^8 - \beta^8$ (iii) $32\alpha^5 - 1$ (iv) $243x^5 + 1$

54. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

(i) $\alpha^5 - \alpha^3 + \alpha^2 - 1$ (ii) $\alpha^4 - 18\alpha^2 + 81$ (iii) $\alpha^8 - 1$ (iv) $x^9 - \psi^9$

55. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

(i) $\alpha^2 - \beta^2 - 6\alpha + 9$ (ii) $(\alpha^2 + 1)^2 - 4\alpha^2$

(iii) $(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2$ (iv) $4\alpha^2(\beta^2 - 1) + 4\beta^2(1 - \beta^2)$

56. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

(i) $(\alpha + 3) \cdot (\alpha^2 + 1) - 4\alpha^2(\alpha + 3)$ (ii) $x^2 + x\psi + x - \psi - 2$

(iii) $(\alpha^2 - \beta^2) \cdot (\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) - \alpha^3 - \beta^3$ (iv) $x^6 - (\alpha^3 - 1)x^3 - \alpha^3$

57. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

(i) $\alpha^5 - 4\alpha^3 + 8\alpha^2 - 32$ (ii) $x^7 - x^3 + 27x^4 - 27$

(iii) $\alpha^4\beta - \alpha\beta^4 - \alpha\beta^7 + \alpha^7\beta$ (iv) $\alpha^4 - \alpha^2(\beta^2 + 1) + \beta^2$

58. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

(i) $2\beta\gamma - (\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2)$ (ii) $(\alpha - \beta)(2\alpha + \beta - 2)$

(iii) $2x^4 - x^3 - 4x^2 + x + 2$ (iv) $\alpha^3(\alpha^2 - 7)^2 - 36\alpha$

59. Να κάνετε γινόμενα παραγόντων τις παραστάσεις:

(i) $(\alpha - 2\beta)^2 - (2\beta - 3)^2$ (ii) $(2x^2\psi - 1)^3 - (x^2\psi + 1)^3$

(iii) $3x^3 + 2x^2 - 3x\psi^4 - 2\psi^4$ (iv) $2\alpha x - \alpha - 4x^2 + 4x - 1$

60. Να κάνετε γινόμενα παραγόντων τις παραστάσεις:

(i) $6\alpha^{2\nu+1} - 18\alpha^{\nu+1}$

(ii) $9\alpha^{3\mu+1} + 27\alpha^{2\mu+1}$

(iii) $2\alpha^{\nu+2}\beta^{\mu-1} - 4\alpha^{\nu+1}\beta^{\mu} + 2\alpha^{\nu}\beta^{\mu+1}$

(iv) $3x^{\nu+2}\gamma^3 - 3\beta^4\gamma^3x^{\nu}$

61. Αν $\alpha + \beta + \gamma = 5$ να κάνετε γινόμενο παραγόντων την παράσταση:

$$A = (\alpha + \beta)^3 + (\beta + \gamma)^3 + (\gamma + \alpha - 10)^3.$$

62. Να λύσετε την εξίσωση: $(x-1)^3 + (x-2)^3 + (3-2x)^3 = 0$.

63. Αν $\alpha + \beta + \gamma = 4$ και $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 10$ να αποδείξετε ότι:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = 28$$

IV. Πράξεις με κλάσματα

64. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

(i) $\frac{\alpha^4 - \alpha^2}{\alpha^5 + \alpha^4 - \alpha^3 - \alpha^2}$

(ii) $\frac{\alpha^5 + \alpha^2\beta^3 - \alpha^4\beta - \alpha\beta^4}{\alpha^4 - \alpha^2\beta^2 + \alpha^3\beta - \alpha\beta^3}$

(iii) $\frac{(\alpha x + \beta \psi)^2 - (\beta x + \alpha \psi)^2}{x^4 - \psi^4}$

65. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα

(i) $\frac{4z^2 + 4z - 24}{z^4 - 9z^2}$

(ii) $\frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - 2\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma}$

(iii) $\frac{\alpha^5 - \alpha^3\beta^2 - \alpha^2\beta^3 + \beta^5}{\alpha^3 + 2\alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 + \beta^3}$

66. Να κάνετε τις πράξεις:

(i) $\left(\frac{\alpha}{\alpha^2 - 4} - \frac{8}{\alpha^2 + 2\alpha}\right) \cdot \frac{\alpha^2 - 2\alpha}{4 - \alpha} + \frac{\alpha + 8}{\alpha + 2}$

(ii) $\left(\frac{\alpha + 3\beta}{(\alpha - \beta)^2} + \frac{\alpha - 3\beta}{\alpha^2 - \beta^2}\right) \cdot \frac{\alpha^2 + 3\beta^2}{(\alpha - \beta)^2}$

67. Να κάνετε τις πράξεις:

$$(i) \left(\frac{\Psi - x}{x} - \frac{x}{\Psi} \right) : \left(2 - \frac{x}{\Psi} - \frac{\Psi}{x} \right) : \left(\frac{\Psi}{x} + 1 \right)$$

$$(ii) \left[\left(\frac{3\alpha}{\alpha^3 - \beta^3} \cdot \frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{\alpha + \beta} - \frac{3}{\beta - \alpha} \right) : \frac{2\alpha + \beta}{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2} \right] \cdot \frac{3}{\alpha + \beta}$$

68. Να κάνετε τις πράξεις

$$(i) \frac{10t^2 - t - 3}{4t^2 - 9} - \frac{4 + 5t}{2t + 3} + \frac{4t - 3}{3 - 2t} \quad (ii) \frac{x^2 - 2}{1 - x} - \frac{2x + 1}{1 + x + x^2} - \frac{x^4 - 4x - 3}{1 - x^3}$$

69. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

$$(i) \left(\frac{5\alpha}{\alpha + x} + \frac{5x}{\alpha - x} + \frac{10\alpha x}{\alpha^2 - x^2} \right) \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha + x} + \frac{x}{\alpha - x} - \frac{2\alpha x}{\alpha^2 - x^2} \right)$$

$$(ii) \left[\left(\frac{p+q}{q} - \frac{2p}{p+q} \right) \cdot \left(1 + \frac{q+1}{p} + \frac{q}{p^2} \right) \right] : \frac{p^2 + q^2}{p^2 q}$$

70. Να κάνετε τις πράξεις:

$$(i) \frac{1}{x^2 + 4x + 4} - \frac{4}{x^4 + 4x^3 + 4x^2} + \frac{4}{x^3 + 2x^2}$$

$$(ii) \frac{1}{\alpha(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{1}{\beta(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} + \frac{1}{\gamma(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}$$

71. Να κάνετε τις πράξεις:

$$(i) \left(\frac{x}{x-2} + \frac{x^2}{x^3+8} \cdot \frac{x^2-2x+4}{2-x} \right) : \frac{8}{x^2-4x+4} - \frac{x^2+x+6}{4x+8}$$

$$(ii) \left(\frac{1}{\alpha^2 - 9} : \frac{x - \alpha}{3\alpha^2 + 9\alpha} - \frac{3\alpha}{9 - 3x - 3\alpha + \alpha x} \right) \cdot \frac{x^3 - 27}{3\alpha}$$

72. Να κάνετε τις πράξεις:

$$(i) \left(\frac{1-x}{x^2+x^3-x^4} - \frac{x^3+x-2}{x^5-x^3-2x^2-x} \right) : \left(\frac{1+x}{x^3+x^4+x^5} - \frac{1-x+x^2}{x^3} \right)$$

$$(ii) \left(\frac{\alpha-1}{\alpha^2-2\alpha+1} + \frac{2(\alpha-1)}{\alpha^2-4} - \frac{4(\alpha+1)}{\alpha^2+\alpha-2} + \frac{\alpha}{\alpha^2-3\alpha+4} \right) \frac{36\alpha^3-144\alpha-36\alpha^2+144}{\alpha^3+27}$$

73. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις και να βρείτε την αριθμητική τιμή τους

$$(ii) \left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1} - \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{4} - \frac{1}{4\alpha} \right), \text{ για } \alpha = -3\frac{3}{4}$$

$$(i) \left[\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\psi} \right) : \frac{x+\psi}{2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\psi^2} \right] \cdot \frac{\psi}{(x+\psi)^2}, \text{ για } x = -\frac{1}{2} \text{ και } \psi = -2$$

74. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

$$(i) \frac{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2} - \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}}{\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} - \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}} \quad (ii) \left(\frac{\alpha+\beta}{2\alpha-2\beta} - \frac{\alpha-\beta}{2\alpha+2\beta} + \frac{2\beta^2}{\alpha^2-\beta^2} \right) : \frac{4\beta}{\alpha^3-\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\beta^3}$$

76. Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$\Pi = \left(\frac{x-2\psi}{x^3+\psi^3} + \frac{\psi}{x^3-x^2\psi+x\psi^2} \right) \cdot \frac{x^3-x\psi^2}{x^2+\psi^2} + \frac{2\psi^2}{x^3+x^2\psi+x\psi^2+\psi^3}$$

και να βρείτε την αριθμητική τιμή της για $x = 0,2$ και $\psi = 0,8$

77. Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$P = \left[(2x+3\psi)^3 + (x^{\nu+1}\psi^5) : \left(-\frac{1}{8}x^{\nu-2}\psi^5 \right) \right] : 9\psi + (\psi-3x)^2 - 4x^2$$

και να βρείτε την αριθμητική τιμή της όταν $x = [(0,1)^{-3} \cdot (0,1)^2]^{-1}$ και

$$\psi = \frac{(2^3)^2 \cdot 2^{-3}}{(2^{-2})^3 \cdot (2^2)^5 \cdot 2}$$

78. Αν α, β, γ είναι διαφορετικοί ανά δύο, να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης

$$P = \frac{(\alpha-1)^2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} - \frac{(\alpha-1)^2}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)} + \frac{(\gamma-1)^2}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

είναι ανεξάρτητη από τους α, β, γ .

79. Αν $x = \frac{(\alpha+1)^3 - 6(\alpha+1)^2 + 12(\alpha+1) - 8}{\alpha^2 - 2\alpha + 1} : \frac{\alpha-1}{3}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{x^2 - \psi^2 - 2x + 1}{x^2 - \psi^2 - x - \psi} : \frac{x + \psi - 1}{x^4 + x^3\psi}$$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 2

(ΔΥΝΑΜΕΙΣ-ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ-ΠΡΑΞΕΙΣ)

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

1. $(x + \alpha)(x + \beta) = x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$

2. $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$

B. Να χαρακτηρίσετε σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις:

1. Ισχύει : $\alpha^k + \alpha^\lambda = \alpha^{k+\lambda}$

2. Ισχύει : $(\alpha^{-1} + \beta^{-1}) \cdot (\alpha^{-2} - \alpha^{-1}\beta^{-1} + \beta^{-1}) = \frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3}$

3. Αν $x+1=\alpha$ και $x^2-x+1=\beta$, τότε $x^3-\alpha\beta+5=6$

Γ. Σε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε τη σωστή απάντηση.

1. Αν $\alpha^x=2$ και $\beta^\psi=3$, τότε η παράσταση $\frac{\alpha^x \cdot \beta^{-\psi}}{\alpha^{-3x} \cdot \beta^{-2\psi}}$ είναι ίση με

A. 24 B. 36 Γ. 48 Δ. 54 Ε. 60

2. Αν $\alpha=8$ και $\beta=5$, τότε η παράσταση $\alpha^5-5\alpha^4\beta+10\alpha^3\beta^2-10\alpha^2\beta^3+5\alpha\beta^3-\beta^5$ είναι ίση με

A. -243 B. -81 Γ. 27 Δ. 81 Ε. 243

3. Η παράσταση $\frac{2^{18}-1}{2^{12}+2^6+1}$ είναι ίση με

A. 17 B. 31 Γ. 43 Δ. 63 Ε. 127

ΘΕΜΑ 2° A. Να βρείτε τα αναπτύγματα: $(2x+3)^4$ και $(x-2\psi)^5$

B. Αν $\alpha, \beta \neq 0$ και $\alpha^2-2\beta^2-\alpha\beta=0$, να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha^3}{\beta^3}-\frac{8\beta^3}{\alpha^3}=7$

ΘΕΜΑ 3° A. Να απλοποιήσετε το κλάσμα: $K = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + \beta^4}$

B. Να υπολογίσετε το $x^3 + \psi^3$ συναρτήσει των α, β όταν $x + \psi = \alpha$ και $x^2 + \psi^2 = \beta$

ΘΕΜΑ 4° Να κάνετε τις πράξεις:

(i) $\frac{2\alpha}{2\alpha-1} - \frac{2\alpha-1}{2\alpha} + \frac{1}{2\alpha-4\alpha^2}$

(ii) $\frac{x^2}{x+\psi} + \left(\frac{x^2}{x+\psi} - \frac{x^3}{x^2+2x\psi+\psi^2} \right) : \left(\frac{x^2}{x^2-\psi^2} + \frac{x}{\psi-x} \right)$.