

Τι είναι Γεωμετρία



Klein

Είναι γνωστό ότι το μήκος εξαρτάται από την μονάδα μέτρησης. Αφού όμως μια γεωμετρική πρόταση είναι ανεξάρτητη από το μοναδιαίο μήκος, έπεται ότι τα θεωρήματα της γεωμετρίας πρέπει να αναφέρονται σε λόγους μηκών τμημάτων παρά στα ίδια τα μήκη.

Ένας άλλος τρόπος να το πούμε αυτό είναι ότι στην γεωμετρία δεν γίνεται διάκριση μεταξύ ομοίων σχημάτων. Σύντομα, αν ένα θεώρημα ισχύει για ένα συγκεκριμένο σχηματισμό θα ισχύει και για κάθε όμοιο σχηματισμό. Ενώ αυτό το επιχείρημα είναι σωστό για όλα τα θεωρήματα της στοιχειώδους γεωμετρίας, δεν ισχύει, για παράδειγμα για όλες τις γεωμετρικές κατασκευές. Αν σε μία γεωμετρική κατασκευή μας δοθεί το μήκος ενός τμήματος, τότε αυτό το μήκος δεν εννοεί αριθμό, αλλά ισότητα με γνωστό τμήμα. Για παράδειγμα, αν ζητηθεί να κατασκευαστεί τρίγωνο $AB\Gamma$ δοθέντων των δύο πλευρών, $A\Gamma$ και AB , και της διαμέσου $A\Delta$, εννοείται πως έχουμε τμήματα ίσα με $A\Gamma$, AB , και $A\Delta$. Αυτό που περιέχεται εδώ είναι το μήκος των τμημάτων παρά οι λόγοι τους και αυτό έχει σαν αποτέλεσμα ότι δεν είναι δυνατόν όλα τα όμοια με το $AB\Gamma$ τρίγωνο να θεωρηθούν σαν αποδεκτές λύσεις. Αν ένα τρίγωνο αποτελεί λύση τα υπόλοιπα όμοια προς αυτό άλλα όχι ίσα δεν θα είναι λύσεις.

Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ιδιότητες σχημάτων που μένουν αμετάβλητες κάτω από την ομοιότητα θα είναι και ιδιότητες που μένουν αμετάβλητες κάτω από την ισότητα. Το αντίστροφο, δείξαμε ότι δεν ισχύει, υπάρχουν περισσότερες ιδιότητες σε μια γεωμετρία ισότητας παρά σε μια γεωμετρία ομοιοτήτων. (Σε μια γεωμετρία ισότητας η απόσταση μεταξύ δύο σημείων είναι μια επιπλέον γεωμετρική ιδιότητα ενώ στις ομοιότητες μόνο οι λόγοι τμημάτων έχουν σημασία.) Έτσι μπορούμε να ορίσουμε μια γεωμετρία στην οποία μελετάμε τα σχήματα διατηρώντας τα μήκη ή αλλιώς τα σχήματα μεταφέρονται το ένα στο άλλο χωρίς να αλλοιώνονται τα μήκη και μια γεωμετρία στην οποία διατηρούνται ιδιότητες σχημάτων κάτω από την ομοιότητα. Στην δεύτερη περίπτωση θα λέγαμε ότι το συμπύσιμα αντικαθίσταται με το όμοια.

Γενικεύοντας ορίζουμε δύο σχήματα να είναι ισοδύναμα ως προς μία κλάση μετασχηματισμών αν μπορεί να απεικονισθεί το ένα στο άλλο από ένα μετασχηματισμό της κλάσης. Η γεωμετρία που σχετίζεται με τη συγκεκριμένη κλάση μετασχηματισμών ορίζεται σαν η μελέτη των ιδιοτήτων των σχημάτων που διατηρούνται κάτω από τους μετασχηματισμούς της κλάσης. Είμαστε τώρα έτοιμοι να δώσουμε ένα βασικό ορισμό. Τι είναι Γεωμετρία;

Γεωμετρία είναι μια μελέτη αναφορικά με τις ιδιότητες σχημάτων που μένουν αναλλοίωτες κάτω από τους μετασχηματισμούς μιας **ομάδας** μετασχηματισμών. Για τους μνημένους η λέξη ομάδα έχει μια πολύ σαφή έννοια και είναι απαραίτητη στον ορισμό. Ο ορισμός αυτός οφείλεται στον Γερμανό μαθηματικό F. Klein (εικόνα).

Τελικά στην ευκλείδεια Γεωμετρία για τη μελέτη μιας πρότασης μας χρειάζονται δύο είδη μετασχηματισμών: αυτοί που διατηρούν τα μήκη (ισομετρίες) και αυτοί που διατηρούν τους λόγους των μηκών (ομοιότητες). Ενδιαφέροντα και εντυπωσιακά συμπεράσματα μπορούμε να πάρουμε και με παράλληλη ή κεντρική προβολή.