

## Απειροσύνολα



Το άπειρο ακούγεται στα αυτιά των περισσότερων ως μια αρκετά αφηρημένη έννοια. Φανταστείτε ότι το σύμπαν είναι άπειρο. Το μυαλό δεν μπορεί να το συλλάβει. Για να μπερδευτούμε ακόμα περισσότερο, ας αναφέρουμε ότι το 1873 ο Γκέοργκ Κάντορ, ένας μαθηματικός από τη Χάλε της Γερμανίας, βρήκε ότι υπάρχουν διαφορετικοί τύποι απείρου.

Αρχικά ακούγεται κάπως παράξενο, αλλά είναι δυνατόν να συγκριθούν δυο απειροσύνολα και να βρεθεί ότι το ένα είναι μεγαλύτερο από το άλλο. Όταν ο Κάντορ ανακοίνωσε την ανακάλυψη του, στις αρχές της δεκαετίας του 1870, τα λόγια του αντιμετωπίστηκαν ως αιρετικά, ή το πολύ ως παραλήρημα ενός παράφρονα. Για να συγκρίνετε δυο άπειρα, φανταστείτε μια φυλή που το αριθμητικό της σύστημα συνίσταται στο «ένα, δύο, τρία, πολλά». Οι άνθρωποι αυτοί είναι σε θέση να κρίνουν ποιος είναι ο πλουσιότερος ανάμεσά τους, έστω και αν δεν μπορούν να περιγράψουν αριθμητικά τον πλούτο του. Αν τα κοτόπουλα είναι το κριτήριο του πλούτου, τότε δυο άνθρωποι, για να συγκρίνουν τις περιουσίες τους, δεν έχουν παρά να αντιστοιχήσουν ένα προς ένα τα κοτόπουλά τους. Ο φτωχότερος είναι αυτός που τα κοτόπουλά του θα τελειώσουν πρώτα. Δε χρειάζεται να μπορούν να μετρήσουν τα κοτόπουλά τους για να βρουν ποιος έχει πιο πολλά. Χρησιμοποιώντας αυτήν την ιδέα, της ένα προς ένα αντιστοίχισης, ο Κάντορ απέδειξε ότι τα μέλη του συνόλου των ακεραίων και του συνόλου των κλασμάτων αντιστοιχίζονται ένα προς ένα χωρίς να περισσεύει κανένα. Αυτό μοιάζει να αντιβαίνει στη διαίσθηση, αφού γενικά έχουμε την εντύπωση πως υπάρχουν περισσότερα κλάσματα από τους ακεραίους αριθμούς. Ακόμα, ο Κάντορ επιτόνησε ένα έξυπνο επιχείρημα για να αποδείξει ότι, αντιθέτως, δεν υπάρχει τρόπος να αντιστοιχιστούν ένα προς ένα τα κλάσματα με όλους τους πραγματικούς αριθμούς που συμπεριλαμβάνουν και άρρητους αριθμούς, όπως το  $\pi$  και η τετραγωνική ρίζα του 2. Να λοιπόν δυο απειροσύνολα που έχουν διαφορετικά μεγέθη!