Γενικές Ασκήσεις στην Παράγωγο Συνάρτησης

1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει: $f(x^3) = 3x^4 + 1$ για κάθε $x \in R$ βρείτε τα f΄(1) και f΄(0).

2. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\Re$ και ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2} = 2005$.

α) Να δείξετε ότι: $i)\ f(0)=0,\quad ii)\ f'(0)=1$

β) Να βρείτε το $\lambda \in R$ ώστε: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\lambda(f(x))^2}{2x^2+(f(x))^2} = 3$ *(ΠΕ)*

3. Στη συνάρτηση f(x) = $(x^2+\alpha)\cdot e^{-x}$, $\alpha \in R$, η ευθεία y = -2x + 2 εφάπτεται στην γραφ. παράσταση της f στο $M(0, f(0))$.

α) Να δείξετε ότι α = 2

β) Να βρείτε τα: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση f(x) = 2007, έχει μοναδική λύση στο R.

4. Στη συνάρτηση f ισχύουν f(0) = $f'(0)=1$.

Να βρείτε τα όρια: α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\cdot \sigma\upsilon\nu 2x - 1}{x}$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{4x}$, για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

α) Να δείξετε ότι $f\left(\dfrac{1}{e^5}\right) > 0,\ f\left(\dfrac{1}{4}\right) < 0,\ f(e^5) > 0.$

β) Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της στο $M(1, f(1))$. *(ΠΕ)*

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{4}{x}$, για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

α) Να βρείτε τα: $i)\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f'(x)}{f(x)},\quad ii)\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x\cdot f(x)}{(x-2)^2}$.

β) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την y = -2x + 6. *(ΠΕ)*

7. Η f είναι παρ/μη στο R και ισχύουν: $f'(x) - f(x) = -4e^{-3x}$, για κάθε $x \in R$

και f(0) = 2. Να δείξετε ότι:

α) Η $h(x) = e^{-x} f(x) - e^{-4x}$ είναι σταθερή στο R.

β) $f(x) = e^{x} + \dfrac{1}{e^{3x}}$, για κάθε $x \in R$. *(ΠΕ)*

8. Δίνονται οι μιγαδικοί z, w, $w \neq 0$, για τους οποίους: $|z + w| = |z - w|$

α) Να δείξετε ότι: $\mathrm{Re}\left(z\overline{w}\right) = 0$ β) Ο αριθμός $\dfrac{z}{w}$ είναι φανταστικός

γ) Το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των z, w και την αρχή των αξόνων, είναι ορθογώνιο στο O.

δ) Αν η συνάρτηση f είναι παρ/μη στο [α,β] με 0 < α < β και είναι z = α + if(α), w = f(β) - βi, τότε η εξίσωση $x \cdot f'(x) = f(x)$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β).

9. Δίνεται ο μιγαδικός $z = e^{x} + (x - 1)i,\ x \in R.$

α) Να δείξετε ότι $\mathrm{Re}(x) > \mathrm{Im}(z)$

β) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$: $w \in R$, αν $w = z^2 + z + 2i.$

γ) Να βρείτε τον μιγαδικό με το ελάχιστο μέτρο.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x} + x^{3} + x$, $x \in R$.

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$.

γ) Θεωρώντας ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της, να βρείτε την παράγωγο της f^{-1} στο σημείο 1.