

ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ (10)

ΘΕΜΑ 1

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$, για την οποία ισχύουν $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

Να δείξετε ότι υπάρχουν 2011 σημεία x_i με $i = 1, 2, 3, \dots, 2011$ στο διάστημα $[0, 1]$ τέτοια ώστε: $\sum_{i=1}^{2011} \frac{1}{f'(x_i)} = 2011$

ΘΕΜΑ 2

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$, με συνεχή και γνησίως αύξουσα παράγωγο στο $[0, 1]$, για την οποία ισχύει:

$$f'(1) = f(0) + f(1)$$

Να δείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f στο $(0, 1)$, που να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$0 \leq 2 \cdot f'(x) \leq f(1) - f(0), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(2011) = 2011$ και η συνάρτηση $g: g(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Αν ισχύει $g(x) \cdot f'(x) = g(f(x))$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η συνάρτηση f

ΘΕΜΑ 5

Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) \geq \frac{f(1)+f(2011)}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός ξ τέτοιος ώστε

$$f''(\xi) = 0$$

ΘΕΜΑ 6

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[2, 3]$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις $f(2)=2$ και $f(3)=3$

1. Ναδειχθεί ότι υπάρχουν χ_1, χ_2 που ανήκουν στο $(2, 3)$, ώστε $2f'(\chi_1)+3f'(\chi_2)=5$
2. Ναδειχθεί ότι υπάρχουν χ_1, χ_2 που ανήκουν στο $(2, 3)$, ώστε

$$\frac{1}{2f'(\chi_1)} + \frac{1}{3f'(\chi_2)} = \frac{5}{6}$$

ΘΕΜΑ 7

Δίνεται η συνάρτηση $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^{-x^2}$.

α) Να δείξετε ότι $e^{\mu^2} > 2\mu \quad (1)$, για κάθε $\mu > 1$.

β) Να δείξετε ότι $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$, για κάθε $x, y \in [1, +\infty)$

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\kappa \in (1, +\infty)$ ώστε $e^{-\kappa^2} + 3\kappa = 18$.

ΘΕΜΑ 8

α) Να δείξετε ότι $(x+1)e^x \geq 1$, για κάθε $x \geq 0$.

β) Έστω η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ και

$$\text{ισχύει } (f \circ f)(x) - f(x) = e^x - \ln(x+1) - 1, \text{ για κάθε } x \geq 0.$$

ι) Να δείξετε ότι η g είναι “1-1”.

ιι) Αν $f'(0) \neq 0$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$.

ΘΕΜΑ 9

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ με

$$[f(x) + x] \cdot [f(y) + y] = f(x+y) + x + y \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Αν $f(1) = \pi - 1$, να δείξετε ότι :

α) $f(0) = 1$

β) $f(x) \neq -x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) $[f'(x) + 1] \cdot [f(y) + y] = [f'(y) + 1] \cdot [f(x) + x]$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 10

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και για την οποία ισχύουν

- $f(1) = 0$
- $f'(1) = 2010$
- $f(xy) \leq xf(y) + yf(x)$, για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$.

Να βρεθεί ο τύπος της f .

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΜΑΥΡΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ