ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

ΤΑΞΗ Γ΄

FERMAT - ROLLE ΚΑΙ Θ.Μ.Τ

1) Αν $\alpha>0$ και $\beta>0$ και $\alpha^x+\beta^x\geq 2$, $\forall\, x\in\Re$ τότε να δείξετε ότι $\alpha\beta=1$

2) Αν η f παραγωγίσιμη στο x=1 και f(1)=2 και $f(x)\leq x^2+x$ $\forall x>0$ Ν.Δ.Ο $f'(1)=3$

3) Αν $\alpha,\beta,\gamma\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ και $\dfrac{\alpha^{3x}+1}{\beta^{2x}+\gamma^x}\geq 1$ $\forall\, x\in\Re$ Ν.Δ.Ο $\alpha^3=\beta^2\gamma$

4) Αν $\alpha^x+\beta^x+\gamma^x\geq 2+\sigma\upsilon\nu x$ $\forall x\in\Re$ $\alpha,\beta,\gamma>0$ Ν.Δ.Ο $\alpha\beta\gamma=1$

5) Αν f,g παραγωγίσιμες στο $(-\alpha,\alpha)$ και $\forall x\in(-\alpha,\alpha)$ ισχύει :

$3+xf(x)\leq g(x)\eta\mu 2x+3^{x+1}$ Ν.Δ.Ο $f(0)-2g(0)=3\ln 3$

6) Αν για κάθε $x\in\Re$ ισχύει $6f(x^2)-f^2(x)\geq 9$ Ν.Δ.Ο α) $f(0)=f(1)$

β)Αν η f παραγωγίσιμη τότε $f'(0)=f'(1)$

7) Αν f,g παραγωγίσιμες στο $\Re$ και η εξίσωση $f(x)\,e^x=g(x)$ έχει τουλάχιστον

δύο ρίζες να δειχθεί ότι μεταξύ των ριζών της εξίσωσης υπάρχει ρίζα της $f'(x)\,e^x=g'(x)-g(x)$

8) Αν f,g συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμες στο (α,β) με $f(\alpha)=f(\beta)\,e^{g(\beta)-g(\alpha)}$

Ν.Δ.Ο υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f'(x_0)+f(x_0)\,g'(x_0)=0$

9) Αν f,g συναρτήσεις δύο φορές παραγωγίσιμες στο $[\alpha,\beta]$

και $f(\alpha)=f'(\alpha)=g(\beta)=g'(\beta)=0$ Ν.Δ.Ο υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$:

$f''(x_0)\,g(x_0)+2f'(x_0)\,g'(x_0)+f(x_0)\,g''(x_0)=0$

10) Αν $0<\alpha<\beta$ και η f παραγωγίσιμη στο (α,β) και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$

με $\alpha f(\beta)=\beta f(\alpha)$ Ν.Δ.Ο υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$: $f(\alpha)-f(\xi)+f(\beta)=(\alpha-\xi+\beta)f'(\xi)$.

11) Δίδεται συνάρτηση g που είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με :
$g(\alpha)-g(\beta)=2(\beta-\alpha)$.
Να δειχθεί ότι η $g'(x)=-2$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α,β).

12) Να δειχθεί ότι : $\frac{1}{5}<\ln\sqrt[3]{2,5}<\frac{1}{2}$

13) Αν $f''(x)>0$ για κάθε $x\in R$. Να δειχθεί ότι :
$2f'(x-1)<f(x+1)-f(x-1)<2f'(x+1)$

14) Αν $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$ και $f(0)=0$ και $f(1)=1$. Να δειχθεί ότι :
$f(x)\leq x$ για κάθε $x\in(0,1)$.

15) Η f διπλά παραγωγίσιμη με $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ και $f(\alpha)=f(\beta)$.

Να δειχθεί ότι : $f'(\alpha)\,.\,f'(\beta)<0$

16) Ορθός κύλινδρος έχει σταθερό ύψος h=5m και ακτίνα βάσεως R . Να

βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του όγκου V ως προς Ε της ολικής επιφάνειας

την χρονική στιγμή που η R=3m .