Το παράδοξο των γενεθλίων!

Έστω ότι έχουμε 30 άτομα σε ένα δωμάτιο. Είναι πιο πιθανό να υπάρχουν δύο άτομα από αυτά που να έχουν την ίδια μέρα γενέθλια ή είναι πιο πιθανό να μην υπάρχουν δύο άτομα που να έχουν γενέθλια την ίδια μέρα;

Μπορούμε να μοντελοποιήσουμε αυτό το πρόβλημα με το να υποθέσουμε ότι τα γενέθλια του κάθε ατόμου είναι μία τυχαία μέρα από τις 365 του χρόνου, η οποία επιλέγεται τυχαία και είναι ανεξάρτητη για κάθε άτομο. Αυτό, προφανώς, αποτελεί μία απλοποίηση του προβλήματος αφού δεν λαμβάνουμε υπ' όψη μας τα δίσεκτα έτη και τους δίδυμους. Παρ' όλα αυτά σαν μοντέλο είναι απλό και εύκολο στην κατανόηση.

Ένας τρόπος για να υπολογίσουμε αυτή τη πιθανότητα είναι να δούμε όλους τους πιθανούς συνδυασμούς κατά τους οποίους δύο άτομα δεν έχουν γενέθλια την ίδια μέρα. Είναι πιο εύκολο να σκεφτούμε τους συνδυασμούς των ατόμων που δεν έχουν γενέθλια την ίδια μέρα, παρά εκείνους που έχουν την ίδια μέρα. Τριάντα μέρες θα πρέπει να επιλεχθούν από τις 365. Υπάρχουν

$$\binom{365}{30}$$

τρόποι για να το κάνει κανείς αυτό. Αυτές οι 30 μέρες μπορούν να διαμοιραστούν στους τριάντα αυτούς ανθρώπους με

$$30!$$

διαφορετικές αναθέσεις. Άρα, υπάρχουν

$$\binom{365}{30} 30!$$

συνδυασμοί κατά τους οποίους δύο οποιοιδήποτε άνθρωποι δεν έχουν την ίδια μέρα γενέθλια, από τους συνολικά

$$365^{30}$$

τρόπους όπου τα γενέθλια θα μπορούσαν να συμβούν. Και άρα η τελική πιθανότητα είναι

$$\frac{\binom{365}{30} 30!}{365^{30}}$$

Φυσικά, μπορούμε να υπολογίσουμε αυτήν την πιθανότητα για το κάθε άτομο ξεχωριστά. Το πρώτο άτομο στο δωμάτιο έχει γενέθλια. Η πιθανότητα ο δεύτερος να **μην** έχει γενέθλια την ίδια μέρα με τον πρώτο, θα είναι

$$(1 - \frac{1}{365})$$

Η πιθανότητα ο τρίτος να **μην** έχει γενέθλια την ίδια μέρα με τους δύο πρώτους, θα είναι

$$(1 - \frac{2}{365})$$

Με την ίδια λογική, η πιθανότητα το **k**-οστό άτομο στο δωμάτιο να έχει διαφορετική μέρα γενέθλια από όλους τους

$$k - 1$$

πριν από αυτόν, οι οποίοι υποθέτουμε ότι δεν είχαν ίδια μέρα γενέθλια ούτε μεταξύ τους, είναι

$$(1 - \frac{(k-1)}{365})$$

Άρα, η πιθανότητα όλοι οι 30 να έχουν διαφορετική ημερομηνία γέννησης είναι το γινόμενο αυτών των όρων

$$(1 - \frac{1}{365}) \cdot (1 - \frac{2}{365}) \cdots (1 - \frac{29}{365})$$

Μπορείτε να ελέγξετε ότι αυτό το αποτέλεσμα είναι το ίδιο με το πρώτο μας αποτέλεσμα.

Με λίγους πρόχειρους υπολογισμούς, παρατηρούμε ότι αυτό το γινόμενο είναι

$$0.2937$$

με άλλα λόγια, όταν είναι 30 άτομα σε ένα δωμάτιο, υπάρχει μεγαλύτερη από

$$70\%$$

πιθανότητα να υπάρχουν δύο άτομα με γενέθλια την ίδια μέρα!

Με έναν παρόμοιο υπολογισμό, βλέπουμε ότι **χρειάζονται μόνο**

$$23$$

άτομα σε ένα δωμάτιο, ώστε η πιθανότητα να υπάρχουν δύο άτομα με την ίδια μέρα γενέθλια να είναι μεγαλύτερη από αυτή του να μην υπάρχουν! Αν σας φαίνεται περίεργο, μην ανησυχείτε, για αυτό ονομάζεται «παράδοξο»!