ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

1) Α) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α,β] και ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$ να δειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε f(ξ)=0.

B) Έστω f μια συνάρτηση μη σταθερή στο [α,β]. Υποθέτουμε ότι είναι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν σημεία $x_1, x_2 \in[\alpha,\beta]$ τέτοια ώστε $f(x_1)\, f(x_2)< 0$.

2) Α) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο [0,3]. Υποθέτουμε ότι:
$\kappa^2\int_0^1 f(t)dt + \lambda^2\int_2^3 f(t)dt = 0$ με $0<\kappa<\lambda$. Να αποδειχθεί ότι η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο [0,3].

B) Έστω f, g συναρτήσεις συνεχείς στο [α,β]. Αν ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$ να αποδειχθεί ότι υπάρχει $x_0 \in [\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=g(x_0)$.

3) Α) Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει:
$f(x) = x + \int_0^x e^{-t} f(x-t)dt \quad x\in R$.

B) Έστω f μια συνάρτηση συνέχης στο R και F μια αρχική της f. Αν $g(x)=e^{-x}F(x)$ $x\in R$ και η g δεν είναι (1-1) να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in R$ τέτοιο ώστε $F(x_0)=f(x_0)$.

4) Α) Έστω f μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο [α,β].

1) Να μελετήσετε τη μονοτονία της: $g(x)=2\int_{\alpha}^{x} f(t)dt-(x-\alpha)(f(\alpha+f(x))$, $x\in[\alpha,\beta]$

2) Να δειχθεί ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt < (\beta-\alpha)\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$.

B) Να βρείτε συνάρτηση f που είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες: $f(0)=1$ $f'(0)=0$, $(1+x^2)f''(x)=2f(x)$ για κάθε $x\in R$

.

5) Α) Έστω μια συνάρτηση f με συνεχή παράγωγο στο [1,2] για την οποία ισχύουν

$f(1)=1$, $f(2)=2$ και $f'(x)\le 2$ για κάθε $x\in[1,2]$. Να δείξετε ότι $\int_1^2 f(x)dx \ge 0$.

Β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και ισχύει $\alpha f(x)+\beta f(-x)=c$ για κάθε $x\in R$ με $\alpha+\beta\neq 0$ να αποδείξετε ότι: $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 2[f(2)+f(-2)]$.

6) Α) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και ισχύει $f(\alpha+x)+f(\alpha-x)=c$ για κάθε x να αποδείξετε ότι: $\int_0^{2\alpha} f(x)dx = 2\alpha f(\alpha)$.

Β) Έστω f μία συνάρτηση συνεχής στο R. Αν ισχύει: $\int_0^{\alpha} f(t)dt \int_0^{\beta} f(t)dt < 0$, $0<\alpha<\beta$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma\in(\alpha,\beta)$ και $x_0\in(0,\gamma)$ τέτοια ώστε $f(x_0)=0$

7) Α) Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$ ισχύουν $f(\alpha)=f(\beta)$ και $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = 0$

Να αποδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=f'(x_0)$.

Β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) και ισχύουν $f(\alpha)=0$ και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0$

8) Α) Αν $0<\lambda<1$ και f συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε : $\lambda\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{\alpha}^{x_0} f(t)dt$.

Β) Έστω $f:[\alpha,\beta]\to R$ μία συνάρτηση με συνεχή παράγωγο στο $[\alpha,\beta]$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι: $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} \frac{x}{f'[f^{-1}(x)]}dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dt$.

9) Α) Έστω $f:[0,+\infty)\to R$ μια συνεχής συνάρτηση με $f(x)>0$ για κάθε $x>0$. Έστω ακόμα η συνάρτηση $F(x)=\int_0^x tf'(t)dt$, $x>0$. Να αποδείξετε ότι : $\frac{1}{x}F(x) < f(x)$ για $x>0$.

Β) Η συνάρτηση $f:[-\alpha,\alpha]\to R$, $\alpha>0$ έχει συνεχή παράγωγο και ισχύουν $f(A)=[-\alpha,\alpha]$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in[-\alpha,\alpha]$. Να αποδείξετε ότι : $\int_{f^{-1}(0)}^{f^{-1}(x)} f(t)dt \ge \int_{f(x)}^{f(0)} f^{-1}(t)dt$, για κάθε $x\in[-\alpha,\alpha]$.

10) Α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο [0 ,α] ,γν.αύξουσα στο διάστημα [0,α] και έχει π. τιμών το [ο,β] . Να αποδειχθεί ότι $\int_0^{\alpha} f(t)dt + \int_0^{\beta} f^{-1}(t)dt = \alpha\beta.$

Β) Έστω f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα [α,β] με $f(\frac{\alpha+\beta}{2}) \neq 0$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει γ∈(α,β) τέτοιο ώστε $\int_{\alpha}^{\gamma} f(t)dt = f(\gamma)\frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}{\alpha+\beta-2\gamma}$.

11) Α) 1) Να μελετήσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων :

h(x)=(x-α) $f(\frac{\alpha+x}{2}) - \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$, x∈[α,β].

g(x)=2 $\int_{\alpha}^{x} f(t)dt - (x-\alpha)(f(\alpha)+f(x))$, x∈[α,β] όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο [α,β] με παράγωγο f ΄ γν. αύξουσα

3) Να αποδειχθεί ότι : (β-α) $f(\frac{\alpha+\beta}{2}) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt \leq (\beta-\alpha)\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$.

Β) Αν για τη συνεχή συνάρτηση f ισχύει $\int_0^1 f(x)dx = \frac{2}{\pi}$ να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο x_0 ∈[0,1] τέτοιο ώστε $f(x_0)$=ημ(πx_0).

12) Α) Αν η συνάρτηση f :[0.1]→R είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη παράγωγο και ισχύει f(0) =f(1)=0 τότε να αποδειχθεί ότι για κάθε x∈[0,1] είναι :

(1-x) $\int_0^x tf''(t)dt + x\int_x^1 (1-t)f''(t)dt = -f(x)$.

Β) Αν οι συναρτήσεις f ,g είναι συνεχείς στο διάστημα [α,β] να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα ξ ∈(α,β) τέτοιο ώστε : g(ξ) $\int_{\alpha}^{\xi} f(t)dt = f(\xi)\int_{\xi}^{\beta} g(t)dt$.

13) Α) Δίνεται η συνάρτηση f(x) = $\int_0^x \sqrt{x}\,\eta\mu t^2 dt$. Να βρεθεί : α) Το π. ορισμού της

β) η f ΄ και γ) $\lim_{x\to 0} f'(x)$.

B) Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο R και η συνάρτηση F(x)= $\int_0^x t(\int_1^{x^2} e^x f(t)dt)dt$,

x$\in$R α) Να δειχθεί ότι : F(x) = $\frac{x^2e^x}{2}\int_1^{x^2} f(t)dt.$

β) Αν f(x) $>$ 0 στο R και F(2)=6e^2 να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από το διάγραμμα C_f τον άξονα xx΄ και τις ευθείες x=1 και x=4 .

14) A) Δίνονται οι συναρτήσεις f ,g για τις οποίες ισχύουν : g(x)= $\int_{2x-1}^{2x+1} \frac{t}{4}dt$

f ΄(x) = g ΄(x)+κx^2+λx-4 για κάθε x$\in$R και κ,λ $\in$R ,f(1) = $-\frac{10}{3}$

α) Να βρεθούν i) ο τύπος της g ii) Τα όρια : $\lim_{x\to 0} g(x)$ και $\lim_{x\to +\infty} g(x)$

iii) Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_g τον άξονα xx΄ και την ευθεία x= $-\frac{3}{2}$.

β) Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα x_1=-1 x_2=3 να βρεθεί ο τύπος της .

γ) Να βρεθεί η θέση x_3 του σημείου καμπής της f καθώς και το σημείο καμπής .

δ) Να δείξετε ότι τα σημεία : Α(x_1,f(x_1)) , Β(x_2,f(x_2)) ,Γ(x_3,f(x_3)) είναι συνευθειακά

B) Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R και γν. αύξουσα . Αν f(0)=0 να δειχθεί ότι η εξίσωση : $\int_0^{f(x)} t^2dt = 1 - e^x$ έχει μία μόνο ρίζα .

15) A) Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [0,+∞) και για την οποία ισχύει : $\int_0^x f(t)dt = (x+1)f(x) - x^2 + 2001.$ Να βρεθεί ο τύπος της f .

B) Δίνεται η συνάρτηση f (x)= $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{2001}{2004}$ με x$>$0

α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία .

β) Να βρεθεί το $\lim_{x\to +\infty}\int_x^{x+1} f(t)dt.$