

ΤΑΞΗ Γ΄

ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΟ Θ.ROLLE ΚΑΙ ΣΤΟ Θ.Μ.Τ.

Θέμα 1

1. Αν η f παραγωγίσιμη στο $[0, \pi]$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in]0, \pi[$. Να δειχθεί ότι

$$\text{υπάρχει } \xi \in]0, \pi[\text{ τέτοιο ώστε } \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + \sigma \phi \xi = 0$$

2. Αν η f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Να δειχθεί ότι για κάθε $\gamma \in]\alpha, \beta[$ υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε : $(\xi - \gamma)f'(\xi) = \xi f(\xi)$

Θέμα 2

1. Αν η f παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) = e^\alpha$ και $f(\beta) = e^\beta$ Να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in]\alpha, \beta[$ $f'(\xi) = f(\xi)$

2. Εάν f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f(\alpha+1) = ef(\alpha)$ $\alpha \in \mathbb{R}$ Να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \alpha+1)$ $f'(\xi) = f(\xi)$

Θέμα 3

1. Η f ορισμένη στο $[-2, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(-2, 2)$ και $f(-2) = -2$ και $f(2) = 2$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi_1, \xi_2 \in]-2, 2[$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = 2$

2. Η f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) $f(\alpha) \neq f(\beta)$

α) Να δειχθεί ότι υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$: $3f(\gamma) = f(\alpha) + 2f(\beta)$

β) Να δειχθεί ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$: $f'(x_1)(\gamma - \alpha) = 2f'(x_2)(\beta - \gamma)$

Θέμα 4

1. Αν η f συνεχής στο $[-1, 6]$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $\gamma \in (-1, 6)$: $f(\gamma) = \frac{f(0) + f(1) + f(2)}{3}$

2. Αν η f συνεχής στο $[0, 2]$ με $f(0) = -6$ και $f(2) = 6$ Να δειχθεί ότι η $f^2(x) = 16$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(0, 2)$.