ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
ΣΤΟΥΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ

1) Δύο μικρές μύγες Α και Β κινούνται πάνω στο μιγαδικό επίπεδο και είναι εικόνες των μιγαδικών z_1 και z_2 αντίστοιχα, ώστε να ισχύει συνεχώς $z_1 = \frac{4+3i}{5} z_2$.

   Να αποδειχθεί ότι:
   a) Οι δύο μύγες Α και Β ισαπέχουν συνεχώς από την αρχή των αξόνων.
   b) Αν η μύγα Α κινείται πάνω στον ορισμένο κύκλο (Κ,ρ), τότε και η μύγα Β κινείται πάνω σε έναν ορισμένο κύκλο, του οποίου να βρεθούν κέντρο και ακτίνα.

2) Αν η εξίσωση $z^2 + \alpha z + \beta = 0$, όπου $\alpha,\beta \in \Re$, έχει ρίζες του μιγαδικούς $z_1 = 3+2i$ και z_2, τότε:
   a) Να βρείτε τους α, β και z_2.
   b) Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ο μιγαδικός $w = z_1^{\nu} + z_2^{\nu}$ είναι πραγματικός.
   c) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή της παράστασης $f(z) = |z - z_1| + |z - z_2|$, $z \in C$.

3) Έστω $f(z) = \frac{3\mathrm{Re}(z) + 4\mathrm{Im}(z)}{z}$, $z \in C-\{0\}$.
   a) Να βρείτε τον γ.τ. των εικόνων των μιγαδικών $z \neq 0$ για τους οποίους ισχύει $|f(z)| = 3$
   b) Αν $\mathrm{Re}(z) = \lambda\,\mathrm{Im}(z)$, τότε:
   c) Να εκφράσετε το $|f(z)|$ ως συνάρτηση του λ.
   d) Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του $|f(z)|$.

4) Έστω a, b, c τρεις μιγαδικοί διάφοροι του μηδενός και διαφορετικοί ανά δύο.
   Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z_1 = \frac{a}{b-c}$ $z_2 = \frac{b}{c-a}$ και $z_3 = \frac{c}{a-b}$.
   Ν.δ.ο: αν οι z_1, z_2 είναι φανταστικοί τότε και ο z_3 είναι φανταστικός. Στην περίπτωση αυτή, αν Α,Β,Γ είναι οι εικόνες των a, b, c στο μιγαδικό επίπεδο, ν.δ.ο: η αρχή Ο των αξόνων είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.

5) Έστω $\chi \in \Re$ και ο μιγαδικός $z = \chi + \frac{i}{x+i}$:
   a) Να σημειώσετε στο γραπτό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

      A) $\mathrm{Im}(z) > \frac{1}{2}$ B) $\mathrm{Im}(z) < -\frac{1}{2}$

C) Im(z)≥0

D) Im(z)≤ $\frac{1}{2}$

E) Τίποτε από τα προηγούμενα

6) Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2 για τους οποίους ισχύει z_1z_2=1+i. Υποθέτουμε ότι η εικόνα M_1 του μιγαδικού z_1 κινείται πάνω στον κύκλο κέντρου K(0,1) και ακτίνας ρ = 1.
   a) Ν.δ.ο: η εικόνα του z_2 κινείται πάνω σε μια ορισμένη γραμμή, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.
   b) Να βρείτε τον μιγαδικό z_2 με το μικρότερο μέτρο.

7) Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z = $\frac{3\lambda+\mathrm{i}}{1+\lambda\mathrm{i}}$, λ $\in\Re$.
   a) Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση.

      A) Κάθε μιγαδικός z έχει μέτρο
      B) Μεγαλύτερο του 3
      C) Μικρότερο ή ίσο του 1
      D) Μεγαλύτερο ή ίσο του 1 και μικρότερο του3
      E) Ίσο με 1
      F) Ίσο με 3

   b) Ν.δ.ο: οι εικόνες όλων των μιγαδικών z ανήκουν σε κύκλο, του οποίου να βρείτε κέντρο και ακτίνα.
   c) Αν z_1 και z_2 είναι δύο τυχαίοι μιγαδικοί από τους παραπάνω, ν.δ.ο: $|z_1 - z_2| \leq 4$

8) Να δειχτεί ότι για κάθε z_1 και z_2 $\in$C ισχύουν:
   a) 2[$|z_1z_2| - \mathrm{Re}(z_1z_2)$]- $|z_1 - \overline{z_2}|^2 - (|z_2| - |z_1|)^2$ (1).
   b) $\sqrt{2}|\mathrm{Im}(z_1)| = \sqrt{|z_1|^2 - \mathrm{Re}\, z_1^{\,2}}$.

9) Δίνεται ο μιγαδικός z για τον οποίο ισχύουν (zi+$\overline{z}\sqrt{3}$) $\in\Re$ και $|z|$ = 1.Ν.δ.ο:
   a) Z^{12}=1
   b) Z^{288}+2Z^{150}+1=0.

10) Έστω z = 1+i και w ένας μιγαδικός με $|w| = 2|z|$.
   a) Να βρείτε για ποιες τιμές του w η παράσταση $|z-w|$ γίνεται i) μέγιστη, ii) ελάχιστη.
   b) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τα παραπάνω αποτελέσματα.

11) Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 για τους οποίους ισχύει :
   a) z_1z_2+ z_3 z_1+ z_2 z_3 =1
   b) $|(z_1+z_2).(z_2+z_3).(z_3+z_1)| = 10$.

   Να βρεθεί το: $|(1+z_1^{\,2}).(1+z_2^{\,2}).(1+z_3^{\,2})|$

12) Έστω ο ακέραιος ν>3 και οι πραγματικοί α,β με $\alpha^2+\beta^2=1$. Θεωρούμε την εξίσωση $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^{\nu}=\alpha+\beta i$. Ν.δ.ο:

a) Όλες οι ρίζες της εξίσωσης έχουν εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο σημεία ομοκυκλικά.
b) Αν z_1, z_2 είναι ρίζες της εξίσωσης, τότε θα ισχύει η σχέση $|z_1-z_2|\leq 2$.
c) Αν ο z_o, είναι ρίζα της εξίσωσης με $|z_o|=2$, ν.δ.ο: $z_o=-2$ και να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\Re$.

13) Θεωρούμε τους μιγαδικούς z_1, z_2, $z_3 \in C^*$, ώστε να ισχύουν: $|z_1|=|z_2|=|z_3|=\rho$ και $\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}\in\Re$. Ν.δ.ο: τουλάχιστον δυο από τους z_1, z_2, z_3 είναι ίσοι.

14) Θεωρούμε τους μιγαδικούς z_1, z_2, $z_3 \in C$, με $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$. Ν.δ.ο:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)+\mathrm{Re}\left(\frac{z_3}{z_2}\right)+\mathrm{Re}\left(\frac{z_3}{z_1}\right)\geq-\frac{3}{2}.$$

(<u>Υπόδειξη</u>. Παρατηρείστε ότι $|z_1+z_2+z_3|^2\geq 0$)

15) Αν Α,Β,Γ είναι οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο και ισχύει: $z_3=\frac{1}{2}iz_1+(1-\frac{1}{2}i)z_2$, ν.δ.ο: το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

16) Αν z_1 και z_2 είναι δύο τυχαίοι μιγαδικοί με μέτρο το 1, τότε :

a) Να αποδείξετε ότι οι ισότητες είναι ισοδύναμες
   A) $z_1+z_2+z_1z_2-1=0$
   B) $z_1+z_2-z_1z_2+1=0$
b) να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού $\frac{z_1z_2+z_1+z_2-1}{z_1+z_2-z_1z_2+1}$

17) Αν $|z+w|=|z|=|w|\neq 0$, ν.δ.ο:

a) $\left(\frac{z}{w}\right)^2+\frac{z}{w}+1=0$
b) $\left|\frac{z}{w}-1\right|=\sqrt{3}$

18) Έστω $\Pi(\chi)=\chi^2+2|z_1-z_2|\chi+(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)$, όπου z_1, $z_2\in C$.

a) Ν.δ.ο: $\Pi(\chi)\geq 0$ για κάθε $\chi\in\Re$.
b) Να βρείτε πότε μπορεί να ισχύει $\Pi(\chi)=0$.

19) Θεωρούμε τους μιγαδικούς z_1και z_2 οι οποίοι είναι τέτοιοι ώστε: ο αριθμός $\frac{1+iz_1}{z_1+i}$ να είναι πραγματικός και $|1+iz_2| = 2|z_2+i|$

a) Να βρείτε τον γ.τ. (c_1) της εικόνας του z_1
b) Να βρείτε τον γ.τ. (c_2) της εικόνας του z_2
c) Να προσδιορίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση των εικόνων z_1και z_2.

<u>Επιμέλεια:</u> Μαύρος Γιάννης
Μαθηματικός