

# Θέματα Μαθηματικών

Ευθεία και κύκλος

2011

## ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

### ΕΥΘΕΙΑ-ΚΥΚΛΟΣ

1. Δίνεται η σταθερή ευθεία (ε) :  $\beta\chi + \alpha\psi = \alpha\beta$  καθώς επίσης και η μεταβλητή ευθεία (η):  $\chi + \psi - \mu = 0$ , με  $\mu \neq 0$ . Αν η ευθεία (η) τέμνει τους άξονες  $\chi\chi$  και  $\psi\psi$  στα σημεία A και B αντίστοιχα, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της κορυφής M του ορθογωνίου ABΓM, όπου Γ είναι σημείο της ευθείας (ε).
2. Μια παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ του τριγώνου ABΓ τέμνει τις πλευρές AB και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Οι κάθετες ΔΖ και ΕΗ από τα Δ και Ε πάνω στη ΒΓ ορίζουν το ορθογώνιο ΔΖΗΕ. Να αποδειχθεί ότι το μέσον Ρ του ύψους ΑΟ που αντιστοιχεί στην πλευρά ΒΓ, το μέσον Μ της ΒΓ και το κέντρο Ν του ορθογωνίου βρίσκονται στην ίδια ευθεία.
3. Ευθεία κινείται παράλληλα προς την πλευρά ΒΓ, τριγώνου ABΓ και τέμνει τις πλευρές AB και ΑΓ στα σημεία Θ και Η αντίστοιχα. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου τομής των καθέτων στις AB και ΑΓ στα Θ και Η.
4. Εστω Ο το ένα από τα δυο κοινά σημεία δυο τεμνομένων κύκλων. Ευθεία στρέφεται περί του Ο και τέμνει τους κύκλους στα σημεία Α, Β. Να βρεθεί η εξίσωση του γεωμετρικού τόπου του μέσου Μ του ευθυγράμμου τμήματος AB
5. Εστω Α'Β'Γ' είναι οι ορθές προβολές τυχαίου σημείου Μ πάνω στις πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ορθογωνίου τριγώνου ABΓ, στο Α. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του Μ, όταν αυτό μεταβάλλεται έτσι ώστε το εμβαδόν του τριγώνου Α'Β'Γ' είναι σταθερό και ίσο με  $\lambda^2$
6. Υποθέτουμε ότι η ευθεία  $\psi = \mu\chi$  είναι εξίσωση χορδής του κύκλου (c) :  $\chi^2 + \psi^2 - 2\alpha\chi = 0$ . Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο τη χορδή έχει εξίσωση  $(1 + \mu^2) \cdot (\chi^2 + \psi^2) - 2\alpha(\chi + \mu\psi) = 0$
7. Να βρεθεί η ευθεία (ε) που είναι κάθετη στον κύκλο (c)  $\chi^2 + (\psi - 3)^2 = 9$  και στην ευθεία (η)  $6\chi + 8\psi + 1 = 0$
8. α) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι που έχουν εφαπτομένες τις (ε)  $\psi = \epsilon\phi\omega\chi$  και (η)  $\psi = -\epsilon\phi\omega\chi$  έχουν εξισώσεις μία από τις μορφές  $\chi^2 + \psi^2 - 2\alpha\chi + \alpha^2 \sin^2 \omega = 0$  ή  $\chi^2 + \psi^2 - 2\beta\psi + \beta^2 \eta\mu^2 \omega = 0$   
β) Να βρείτε τους κύκλους με εφαπτομένες  $\psi = 2\chi$ ,  $\psi = -2\chi$  που διέρχονται από το σημείο Α(2,6)

9. Δίνεται η εξίσωση ( c ) :  $x^2 + y^2 - 4x - 2ay + 2a - 4 = 0$ ,  $a \in \mathbb{R}$
- Να δείξετε ότι για κάθε  $a \in \mathbb{R}$  η ( c ) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
  - Να βρείτε την τιμή του  $a \in \mathbb{R}$  ώστε ο κύκλος ( c ) να είναι ο μικρότερος όλων
  - Για  $a = 4$  να βρείτε και να αποδείξετε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη αντίστοιχα απόσταση που έχουν τα σημεία του ( c ) από την αρχή των αξόνων. Να βρεθούν τα σημεία αυτά επίσης.
  - Δίνεται το σημείο  $\Delta(4, -2)$ . Να βρείτε και να αποδείξετε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη αντίστοιχα απόσταση που έχουν τα σημεία του ( c ) για  $a = 4$ , από το σημείο  $\Delta$ . Να βρεθούν τα σημεία αυτά επίσης
  - Δίνεται η ευθεία ( ε )  $x + y + 2 = 0$ . Να βρείτε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη αντίστοιχα απόσταση που έχουν τα σημεία του ( c ) για  $a = 4$ , από την ευθεία. Να βρεθούν τα σημεία αυτά επίσης
  - Δίνεται ο κύκλος με κέντρο  $\Lambda(10, 10)$  και ακτίνα  $\rho = 2$ . Να βρείτε και να αποδείξετε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη αντίστοιχα απόσταση που έχουν τα σημεία του παραπάνω κύκλου από αυτά του κύκλου ( c ) για  $a = 4$ . Να βρεθούν τα σημεία αυτά επίσης
  - Να βρείτε σημείο του κύκλου ( c ) για  $a = 4$  του οποίου οι συντεταγμένες μεγιστοποιούν την παράσταση  $\Pi = 3x + 4y - 22$  και σημείο που οι συντεταγμένες του ελαχιστοποιούν την παράσταση  $\Pi$ .



....ούτε σχολείο ούτε φροντιστήριο.....